Examen Algèbre Linéaire 2 lundi 8 janvier 2018
14h–17h

Le cours écrit, son résumé, et vos notes personnelles sont des documents autorisés. L'utilisation d'une calculatrice, ou de tout autre appareil électronique, est interdite. Les résultats du cours, et ceux vus en TD, peuvent être utilisés si mentionnés clairement.
Les trois parties sont indépendantes.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.
c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.
d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Pourquoi ϕ définit-il, par restriction au sous-espace $V = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique, un endomorphisme $\phi|_V$ de V ?
b. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{\phi|_V}$ de cette restriction.
c. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$. En le factorisant, vous constaterez que χ_ϕ a une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple qu'on appellera ν.
d. Déterminer l'espace propre E_ν pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?
e. Calculer le rang de la matrice $(M - \nu I)^2$; en déduire la valeur du polynôme minimal μ_ϕ.
f. Décrire explicitement (en donnant une base de chacun) les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ ; ils figurent dans une décomposition $\mathbf{C}^4 = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$.
g. Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

3. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\chi_\phi = X^4 + X^3 - X - 1$. Ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, mais ses racines réelles sont toutes dans $\mathbf{Z}$ (ce qui aide à les trouver).
a. Quelle est $\dim(E)$?
b. Pourquoi sait-on que ϕ n'est pas diagonalisable (sur $\mathbf{R}$) ?
c. Décomposer $\chi_\phi = PQ$, avec le facteur P scindé sur $\mathbf{R}$, et le facteur Q sans racines réelles.
d. Argumenter que P et Q sont premiers entre eux.
e. Le lemme des noyaux donne donc $E = V \oplus W$ avec $V = \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $W = \mathrm{Ker}(Q[\phi])$ (car $\chi_\phi = PQ$ est polynôme annulateur de ϕ). Quels sont les polynômes caractéristiques de la restriction $\phi|_V$ de ϕ à V, et de la restriction $\phi|_W$ de ϕ à W ?
f. Montrer que $\phi|_V$ est diagonalisable, et qu'en revanche $\phi|_W$ n'a aucun vecteur propre.
g. On choisit dans V une base de vecteurs propres de $\phi|_V$ (en prenant les différentes valeurs propres dans l'ordre croissant) et dans W on choisit une base dont chaque vecteur sauf le premier est l'image par $\phi|_W$ du vecteur précédent de la base. En combinant les deux bases on obtient une base $\mathcal{B}$ de E. Décrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ (elle est entièrement déterminée).

Fin.