Corrigé Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2 mercredi 8 novembre 2017
8h15–10h15

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 18 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X+7 & -18 & -12 \\ -1 & X & 0 \\ 6 & -12 & X-8 \end{vmatrix}$$

donne $\chi_A = X^3 - X^2 - 2X$

b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ $X^3 - X^2 - 2X = X(X+1)(X-2)$

c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique a trois racines distinctes,* $0, -1, 2$, *qui sont donc des valeurs propres. Associée à chacune est un espace propre qui a dimension au moins* 1, *leur somme qui est directe a dimension au moins* 3, *ce qui est donc l'espace* $E = \mathbf{Q}^3$ *tout entier. Cela veut dire que* ϕ *est diagonalisable.*

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 0$ *un vecteur propre est* $(0, 2, -3)$, *pour* $\lambda = -1$ *on a un vecteur propre* $(1, -1, 2)$, *et pour* $\lambda = 2$ *on a un vecteur propre* $(2, 1, 0)$.

2. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = 6a_n + a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

a. Calculer les 7 premiers termes de cette suite.

$\surd$ $0, 1, 1, 7, 13, 55, 133$

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

$\surd$ *Comme indiqué dans le cours, les lignes sauf la dernières sont celles de la matrices identité un cran plus bas, et la dernière ligne représente la relation de récurrence:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.

$\surd$ *Le polynôme qui exprime que la suite géométrique de raison* λ *vérifie la relation récurrence est* $X^2 - (6+X) = X^2 - X - 6$. *Alternativement on peut prendre le polynôme caractéristique*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -6 & X-1 \end{vmatrix} = X^2 - X - 6,$$

d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.

$\surd$ *En utilisant la formule pour les racines d'un polynôme de degré* 2 *on trouve* $\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}$ *pour ces racines, ce qui donne* $\lambda = -2$ *et* $\lambda = 3$ *comme valeurs propres. On peut aussi utiliser la factorisation* $X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$. *Pour chaque valeur* $\lambda \in \{-2, 3\}$, *le vecteur* $\binom{1}{\lambda}$ *est vecteur propre.*

e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

$\surd$ $a_n = \frac{1}{5}(3^n - (-2)^n)$

3. Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R}_{<3}[X]$ des polynômes en X de degré inférieur à 3, on considère les 4 vecteurs (c'est-à-dire polynômes) $Q = 2 + 2X + X^2$, $R = 1 + 2X - 2X^2$, $S = -4 - 6X + 3X^2$, et $T = 5 + 6X$. On définit l'application $f : \mathbf{R}^4 \to E$ donnée par $f((a, b, c, d)) = aQ + bR + cS + dT$, qui est linéaire (une application définie ainsi par la formation de combinaisons linéaires l'est toujours).

a. Donner la matrice ${}_{\mathcal{B}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$, où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B} = [1, X, X^2]$ est la base canonique de E.

$\surd$ *C'est la matrices dont les colonnes expriment respectivement Q, R, S, T (qui sont les images sous f des vecteurs de $\mathcal{E}$) sur la base $\mathcal{B}$, c'est la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -6 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer une base du noyau $\ker(f) \subseteq \mathbf{R}^4$ de f.

$\surd$ *Par opération sur les lignes on peut échelonner la matrice à*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le noyau est de dimension 2 (il y a deux colonnes sans pivot), une base est par exemple formée de $(1, 2, 1, 0)$ et $(2, 1, 0, -1)$.

c. Est-ce que f est surjectif?

$\surd$ *D'après le théorème du rang, le rang de f est $\dim(\mathbf{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 4 - 2 = 2$, ce qui est moins que $\dim(E) = 3$, donc f n'est pas surjectif.*

d. Déterminer une base de l'image $\operatorname{Im}(f) \subseteq E$ de f.

$\surd$ *Les éléments de $\ker(f)$ trouvés à la question b donnent les relations $Q+2R+S = 0$ et $2Q+R-T = 0$, qui montrent (via $S = -Q - 2R$ et $T = 2Q + R$) que $S, T \in \operatorname{Vect}(Q, R)$, donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(Q, R, S, T) = \operatorname{Vect}(Q, R)$. Or $[Q, R]$ est clairement libre, donc c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$. (Le fait que $[Q, R]$ est libre est d'ailleurs une conséquence du calcul de $\ker(f)$, car toute relation entre Q, R correspond à un vecteur de $\ker(f)$ dont les deux derniers coefficients sont nuls (pas de S ou T dans la relation), et la description trouvée de $\ker(f)$ montre qu'un tel vecteur est nul.)*

Fin.