Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 jeudi 7 octobre 2017
9h–10h

1. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace vectoriel des polynômes en X de degré plus petit que 4. On utilisera la notation P' pour la dérivée d'un polynôme $P \in E$ (avec $(c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3)' = c_1 + 2c_2X + 3c_3X^2$) et $P[a]$ (avec $a \in K$) pour l'évaluation en $X = a$ du polynôme P ; on admet les faits bien connus que $P \mapsto P'$ et $P \mapsto P[a]$ sont des application linéaires, respectivement $E \to E$ et $E \to K$.

a. Pourquoi $V = \{ P \in E \mid P[0] + P[1] = 0, P[2] = P'[0] \}$ est un sous-espace vectoriel de E? [Vous n'êtes pas obligé d'appliquer directement la définition d'un sous-espace vectoriel, bien que c'est une option valable ; votre argument peut s'appuyer sur des faits généraux bien connus.]

$\surd$ *On peut écrire $V = \ker(f)$, où $f : E \to K^2$ est $P \mapsto (P[0] + P[1], P[2] - P'[0])$, ce qui est une application linéaire ; or le noyau d'un application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel. C'est de loin l'argument le plus facile ici. Si l'on applique directement la définition de sous-espace, il est toujours avantageux d'utiliser la linéarité de $P \mapsto P[0] + P[1]$ et de $P \mapsto P[2] - P'[0]$ qui découlent directement de ce qui est admis dans l'énoncé ; par exemple si $P \in V$ alors $\lambda P \in V$ résulte des calculs $(\lambda P)[0] + (\lambda P)[1] = \lambda(P[0] + P[1])$ (par ladite linéarité), ce qui est 0 par hypothèse sur P, et pareil pour $(\lambda P)[2] - (\lambda P)'[0]$. Vouloir faire tout en n'utilisant que les définitions est certes possible, mais fait perdre beaucoup de temps dans les détails ; aussi certains se sont arrêtés avant d'arriver au point d'évoquer l'hypothèse que $P \in V$.*

b. Determiner une base de V.

$\surd$ *On traduit d'abord les équations en coordonnées. Pour $P = c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3$, on a $P[0] + P[1] = 2c_0 + c_1 + c_2 + c_3$, et $P[2] -' P[0] = c_0 + c_1 + 4c_2 + 8c_3$, donc on a le système homogène en c_0, c_1, c_2, c_3 de matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

On pourra échelonner cette matrice à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières colonnes n'ayant pas de pivot, on peut choisir c_2 and c_3 comme paramètres, et trouver comme solutions particulières pour $(c_0, \ldots, c_3)$: $(3, -7, 1, 0)$ et $(7, -15, 0, 1)$ (en prenant $c_2 = 1, c_3 = 0$ respectivement $c_2 = 0, c_3 = 1$). En formant les polynômes décrits par ces solutions, on obtient la base $[3 - 7X + X^2, 7 - 15X + X^3]$ de V.

c. Determiner une base du sous-espace vectoriel $W = \mathrm{Vect}(Q, R, S)$, où $Q = -2 + X + 3X^3$, $R = 1 - 2X - 3X^2$ et $S = 1 + 2X + 5X^2 - 4X^3$.

$\surd$ *Clairement $[Q, R, S]$ est famille génératrice de W, et il convient de trouver d'éventuelles relations entre ces vecteurs. L'espace de telles relations est le noyau de l'application linéaire $g : K^3 \to E$ donnée par $(a, b, c) \mapsto aQ + bR + cS$. Le système linéaire homogène avec comme premier membre la matrice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

de cette application (par rapport aux bases canoniques de K^3 et de $K[X]_{<4}$), et sa solution est (malgré le fait qu'il s'agit de 4 équations en 3 inconnues) es dimension 1, avec $(4, 5, 3)$ comme générateur ; on a donc la relation $4Q + 5R + 3S$. On pourra donc supprimer (par exemple) le vecteur $S = -\frac{1}{3}(4Q + 5R)$ de l'ensemble, et il reste une base $[Q, R]$ de W.

d. Monter que l'intersection $V \cap W$ est égal au sous-espace $\{0\}$ (qui est de dimension 0). [Indication : plutôt que d'utiliser le résultat de la question *b*, on vous conseille d'utiliser la description $V \cap W = \{ P \in W \mid P[0] + P[1] = 0, P[2] = P'[0] \}$, et de procéder comme dans la question *a*].

$\surd$ *D'après la question précédente un $P \in W$ s'écrit de façon unique $P = aQ + bR$ dont l'image $f(P) = af(Q) + bf(R)$ par l'application f de la question a est $a\binom{0}{23} + b\binom{-3}{-13}$, et clairement elle n'est nulle que si $a = b = 0$, c'est-à-dire si $P = 0$. Donc $W \cap V = W \cap \ker(f) = \{0\}$.*

2. Déterminer la matrice inverse (si elle existe) de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer les étapes de la méthode que vous utilisez pour la calculer, et n'oubliez pas de vérifier votre résultat (au moins sur votre brouillon) en le multipliant par A.

$\surd$ *Voici une transformation de $(A \mid I_4)$ en $(I_4 \mid A^{-1})$ par opérations sur les lignes, où l'on fait attention à privilégier des valeurs ± 1 comme pivot, et à annuler, une fois obtenus les pivots, tous les autres entrées dans la colonne ; ainsi les divisions nécessaires ne sont fait qu'au dernier moment. (Tout cela n'est pas obligatoire, mais dans la pratique le calcul avec les nombres rationnels est beaucoup plus propice à commettre des erreurs que celui avec les entiers.)*

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 7 & -10 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & 0 & 5 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & -16 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 13 & -19 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -14 & 21 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & -16 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -13 & 19 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & -14/3 & 7 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & -2 & 2/3 \end{array}\right)$$

Donc l'inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -16 & 6 \\ -2 & -13 & 19 & -6 \\ -2/3 & -14/3 & 7 & -7/3 \\ 1/3 & 4/3 & -2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

ou écrit avec dénominateur commun

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 33 & -48 & 18 \\ -6 & -39 & 57 & -18 \\ -2 & -14 & 21 & -7 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Fin.