Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2 mercredi 2 novembre 2016
8h15–10h15

La consultation du cours écrit, ainsi que de vos notes personnelles, est autorisée. L'utilisation d'une calculatrice, ou tout autre appareil électronique, n'est pas autorisée. Les exercices sont indépendants.

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Décrire le sous-espace $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathbf{R}^3$ par un système d'équations linéaires.
b. Résoudre ce système, et donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.
c. Trouver une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.
d. Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^2$ associé de façon canonique à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que le vecteurs $b_1 = (1, 2)$ est un vecteur propre de ϕ, et déterminer la valeur propre correspondante.
b. Calculer le polynôme caractéristique de A.
c. Trouver une autre valeur propre de A et un vecteur propre b_2 correspondant.
d. Déduire de ce qui précède que ϕ est diagonalisable.
e. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
f. Donner une formule pour A^n avec $n \in \mathbf{N}$, dans laquelle chacun de ses 4 coefficients est explicité.

3. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = 2a_n + 3a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
a. Calculer les 7 premiers termes de cette suite.
b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.
d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.
e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

Fin.