Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 jeudi 6 octobre 2016
9h–10h

Consultation du cours écrit, et de vos notes personnelles, est autorisée.
Les espaces vectoriels sont sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

1. Dans l'espace vectoriel $E = K[X]_{<4}$ des polynômes en X de degré plus petit que 4, on considère le sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(P, Q, R, S)$ où $P = 5 - 2X - 3X^2$, $Q = 1 + 2X - 2X^2 + 2X^3$, $R = -2 - 4X + 4X^2 - 4X^3$, et $S = 3 - 6X + X^2 - 4X^3$.

a. Déterminer si la famille $[P, Q, R, S]$ est liée ou libre.

b. On définit l'application linéaire $f : K^4 \to E$ par $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1P + x_2Q + x_3R + x_4S$. Écrire un système d'équations en x_1, x_2, x_3, x_4 qui décrit $\ker(f)$.

c. Résoudre ce système pour trouver une base de $\ker(f)$.

d. Donner une famille extraite de $[P, Q, R, S]$ qui soit une base du sous-espace V.

2. Dans un espace vectoriel E de dimension finie sont donné deux bases $\mathcal{E}, \mathcal{B}$, et le fait que la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Combien de vecteurs possède chacune de ces deux bases ?

b. Déterminer la matrice de passage dans le sens opposé, c'est-à-dire de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$.

3. Dans K^4 on considère les sous-espaces vectoriels $V = \mathrm{Vect}\big(v_1, v_2, v_3\big)$ et $W = \mathrm{Vect}\big(w_1, w_2\big)$, avec $v_1 = (2, 1, 0, 4)$, $v_2 = (0, -1, 3, 2)$, $v_3 = (0, 3, 2, 5)$, et $w_1 = (1, 0, 1, 0)$, $w_2 = (0, 3, -1, 1)$.

a. Montrer que $\dim(V) = 3$ et $\dim(W) = 2$.

b. Trouver une base du sous-espace $V \cap W$.

c. Est-ce que la somme $V + W$ est une somme directe ?

Fin.