Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 mardi 14 juin 2016
14h–17h

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ $X^3 - 3X^2 + 2X$

b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ *Les racines rationnelles sont diviseurs du coefficient constant* 3 *de* χ_A. *Effectivement* $0, 1$ *et* 2 *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X(X-1)(X-2)$

c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Les trois racines de* χ_A *sont des valeurs propres de* ϕ, *et pour chacune l'espace propre est de dimension au moins* 1 *(en fait exactement* 1, *mais cela ne sera pas utilisé). La somme de ces espaces propres, toujours directe, est donc de dimension au moins* $1+1+1=3$, *d'où elle remplit l'espace* E *qui est de dimension* 3, *et* ϕ *est diagonalisable.*
Pour $\lambda = 0$ *on a* $(1,1,-1)$, *pour* $\lambda = 1$ *on a* $(2,3,-3)$, *et pour* $\lambda = 2$ *on a* $(2,3,-2)$.

2. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<3}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré moins de 3, et $\mathcal{E} = [1, X, X^2]$ la base canonique de cet espace. On considère l'application linéaire $f : E \to E$ donnée par $f(c_0 + c_1X + c_2X^2) = (2c_0 + 2c_1 - c_2) + (-c_0 - 2c_1 + 3c_2)X + (c_1 - c_2)X^2$.

a. Donner la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{E}$.

$\surd$ *Les colonnes donnent les coefficients dans la base* $\mathcal{E}$ *de respectivement* $f(1)$, $f(X)$, *et* $f(X^2)$, *ce qui donne*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

puisque $f(1) = 2 - X$, $f(X) = 2 - 2X + X^2$ *et* $f(X^2) = -1 + 3X - X^2$. *(Aussi, lignes de la matrice décrivent les expressions pour les coefficients de* $1, X, X^2$ *dans* $f(c_0 + c_1X + c_2X^2)$.*)*

b. Montrer que pour tout polynôme $P \in E$ la valeur $P[1]$ de P en $X = 1$ est égale à $f(P)[1]$.

$\surd$ *On posant* $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$ *on a* $P[1] = c_0 + c_1 + c_2$, *pendant que* $f(P)[1] = (2c_0 + 2c_1 - c_2) + (-c_0 - 2c_1 + 3c_2) + (c_1 - c_2) = (2-1)c_0 + (2-2+1)c_1 + (-1+3-1)c_2 = c_0 + c_1 + c_2$, *d'où l'égalité. (Le calcul fait ici revient à vérifier que* $(1\ 1\ 1) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (1\ 1\ 1)$.*)*

c. Soit $V = \{\, P \in E \mid P[1] = 0 \,\}$ le sous-espace de E des polynômes s'annulant en $X = 1$. Montrer que V est f-stable, c'est-à-dire que $f(V) \subseteq V$.

$\surd$ *Pour* $P \in V$ *on a* $0 = P[1] = f(P)[1]$ *d'après la question précédente, donc* $f[P] \in V$.

d. Donner une base $\mathcal{B}$ du sous-espace V.

$\surd$ *Pour* $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$ *la condition* $P[1] = 0$ *donne* $c_0 + c_1 + c_2$. *Une base de l'espace de solutions de ce «système d'une équation en* 3 *inconnues» est formé de la solution avec* $(c_0, c_1, c_2) = (-1, 1, 0)$ *et celle avec* $(c_0, c_1, c_2) = (-1, 0, 1)$, *c'est-à-dire des polynômes* $X - 1$ *et* $X^2 - 1$ *(ce n'est qu'un exemple d'une base parmi une infinité de possibilités).*

e. Par restriction, f définit un endomorphisme du sous-espace V, qu'on désignera par $f|_V$. Donner le polynôme caractéristique de $f|_V$ (il est de degré $2 = \dim V$) et conclure que $f|_V$ est diagonalisable.

$\surd$ *Sur la base de V de la question précédente, la matrice de $f|_V$ est donnée par $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 4 & -1\end{smallmatrix}\right)$ car $f(X-1) = X^2 - X = -(X-1) + (X^2-1)$ et $f(X^2-1) = -3+4X-X^2 = 4(X-1)-(X^2-1)$, et son polynôme caractéristique est $X^2+2X-3 = (X+3)(X-1)$. Les 2 racines distinctes $-3, 1$ montrent que $f|_V$ est diagonalisable. (Ce n'était pas demandé, mais les sous-espaces propres de V sont $E_{-3} = \mathrm{Vect}(1-2X+X^2)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(-3+2X+X^2)$.)*

f. Montrer que f n'admet aucun vecteur propre en dehors du sous-espace V [indication : on pourra déduire de la question *b* ce le seul candidat pour la valeur propre correspondante est $\lambda = 1$] et conclure que f n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *Si P était vecteur propre de f avec $P[1] \neq 0$, disons pour valeur propre λ, on aurait $P[1] = f(P)[1] = \lambda P[1]$, donc $\lambda = 1$. Or $\ker(f-I)$ se calcule à l'aide de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ci-dessus. Il est de dimension 1, avec générateur $P = -3+2X+X^2$, pour lequel $P \in V$. Par conséquent la somme directe des sous-espace propres est contenue dans V (en fait c'est V), et elle ne remplit pas E ; cela veut dire que f n'est pas diagonalisable.*

3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ correspondant de manière canonique à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de ϕ.

$\surd$ $\chi_B = (X-3)(X^2-X-6)(X+2) = (X-3)^2(X+2)^2 = X^4 - 2X^3 - 11X^2 + 12X + 36$. *Les valeurs propres sont 3 et -2, toutes deux racines doubles de χ_B.*

b. Déterminer les sous-espaces propres de ϕ, et constater que ϕ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *Le sous-espace propre pour $\lambda = 3$ est $\ker(B-3\mathbf{I}) = \mathrm{Vect}((1,0,0,0))$ qui n'est pas de dimension 2 (la multiplicité de 3 comme racine de χ_B), d'où B n'est pas diagonalisable. Pour $\lambda = -2$ on trouve le sous-espace propre $\ker(B+2\mathbf{I}) = \mathrm{Vect}((-9,-5,10,0),(-3,-2,1,1))$ qui est de dimension 2 (ce sous-espace propre est égal à son sous-espace caractéristique).*

c. Trouver pour chacune des valeurs propres la dimension de son sous-espace caractéristique.

$\surd$ *Ces dimensions sont les multiplicités des valeurs propres comme racine de χ_B, donc aussi bien pour $\lambda = -1$ que pour $\lambda = 2$ cette dimension est 2.*

d. Dresser une courte liste des possibilités pour le polynôme minimal de ϕ, et décider par un calcul laquelle des possibilités est la bonne.

$\surd$ *En principe les quatre diviseurs unitaires de χ_B sont des candidats pour le polynôme minimal, c'est-à-dire $(X-3)(X+2)$, $(X-3)(X+2)^2$, $(X-3)^2(X+2)$, et $(X-3)^2(X+2)^2$. Mais on sait en comparant les réponses aux questions b et c que $E_3 \neq \tilde{E}_3$ pendant que $E_{-2} = \tilde{E}_{-2}$, donc pour $\lambda = 3$ la multiplicité de comme racine de μ_ϕ n'est pas 1, pendant que pour $\lambda = -2$ cette multiplicité est 1. Donc $(X-3)^2(X+2)$ est la bonne possibilité.*

e. Trouver pour chaque valeur propre λ une base du sous-espace caractéristique $\tilde{E}_\lambda$, choisie ainsi : commencer avec une base du sous-espace propre E_λ, puis (si $\tilde{E}_\lambda$ est différent de E_λ) l'étendre à une base de $\mathrm{Ker}((B-\lambda\mathbf{I})^2)$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une base de $\mathrm{Ker}((B-\lambda\mathbf{I})^m) = \tilde{E}_\lambda$.

$\surd$ *Pour $\lambda = -2$ la base trouvée $[(-9,-5,10,0),(-3,-2,1,1)]$ de $E_{-2} = \tilde{E}_{-2}$ convient. Pour $\lambda = 3$ par contre, il faudra étendre la base $[(1,0,0,0)]$ à une base de $\tilde{E}_3$. En résolvant le système pour $\ker((B-3\mathbf{I})^2)$, on trouve par exemple la solution supplémentaire $(0,2,1,0)$, pour donner la base ordonnée $[(1,0,0,0),(0,2,1,0)]$.*

f. Soit $\mathcal{B}$ la base de E formée en combinant les bases trouvées dans la question précédente. La matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ est triangulaire supérieure (pourquoi ?) ; déterminer T.

$\checkmark$ *Avec nos choix (et en rangeant $\lambda = 3$ avant $\lambda = -2$) on a $\mathcal{B} = [(1,0,0,0),(0,2,1,0),(-9,-5,10,0),(-3,-2,1,1)]$. La matrice est diagonale en 2 blocs 2×2 selon la décomposition $E = \tilde{E}_2 \oplus \tilde{E}_{-1}$. Le bloc pour $\lambda = 3$ est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux $3,3$. Le bloc pour $\lambda = -2$ est diagonal, avec coefficients diagonaux $-2,-2$. Le seul coefficient qui n'est pas déterminé par ces conditions dépend du choix du dernier vecteur v de base de $\tilde{E}_3$, et peut être trouvé en exprimant $B \cdot v$ sur cette base. Pour notre choix $v = (0,2,1,0)$ on a $B \cdot v = (2,6,3,0) = 2(1,0,0,0) + 3v$, donc le coefficient est 2. Donc (pour nos choix) on a*

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Fin.