Examen Algèbre Linéaire 2 lundi 4 janvier 2016
14h–17h

Le cours écrit et vos notes personnelles sont autorisés. L'utilisation d'une calculette ou de tout autre appareil électronique est interdite. Tous les résultats du cours, ou obtenus dans les exercices de TD, peuvent être cités et utilisés sans démonstration. Les parties sont indépendantes.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ -6 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.
c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.
d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<3}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré moins de 3, qui est un sous-espace de $\mathbf{R}[X]$. Pour un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ on désigne par P' son polynôme dérivé, et on définit une application linéaire $f : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ par $f(P) = P + (X-1)P' + (X^2+2)P''$ (on admet la linéarité).

a. Montrer que la restriction à E de f définit un endomorphisme ϕ de E (c'est-à-dire montrer que pour $P \in E$ on aura toujours $f(P) \in E$, ce qui permet de définir $\phi : E \to E$ par $\phi(P) = f(P)$), et donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de cet endomorphisme par rapport à la base (canonique) $\mathcal{E} = [1, X, X^2]$ de E.
b. On pose $V = \{\, P \in E \mid P'' = 0 \,\}$ et $W = \mathrm{Vect}(Q)$ pour le polynôme $Q = 6X^2 - 4X + 7 \in E$. Montrer que ce sont deux sous-espaces ϕ-stables de E.
c. Montrer que $E = V \oplus W$.

3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ correspondant de manière canonique à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de ϕ.
b. Déterminer les sous-espaces propres de ϕ, et constater que ϕ n'est pas diagonalisable.
c. Trouver pour chacune des valeurs propres la dimension de son sous-espace caractéristique.
d. Dresser une courte liste des possibilités pour le polynôme minimal de ϕ, et décider par un calcul laquelle des possibilités est la bonne.
e. Trouver pour chaque valeur propre λ une base du sous-espace caractéristique $\tilde{E}_\lambda$, choisie ainsi : commencer avec une base du sous-espace propre E_λ, puis (si $\tilde{E}_\lambda$ est différent de E_λ) l'étendre à une base de $\mathrm{Ker}((B-\lambda\mathbf{I})^2)$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une base de $\mathrm{Ker}((B-\lambda\mathbf{I})^m) = \tilde{E}_\lambda$.
f. Soit $\mathcal{B}$ la base de E formée en combinant les bases trouvées dans la question précédente. La matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ est triangulaire supérieure (pourquoi ?) ; déterminer T.

sujet continué au verso

4. Soit E le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^4$, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ donné par sa matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$:

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & -27 & -17 & -1 \\ 1 & -9 & -4 & 3 \\ -1 & 9 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Soit $b_0 = (1,0,0,0) \in E$, et $b_i = \phi^i(b_0)$ pour $i = 1,2,3$. Calculer ces vecteurs, et montrer que $\mathcal{B} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ est une base de E. [Les coefficients c de ces vecteurs vérifient tous $|c| < 5$; si vos calculs ne confirment pas ceci, c'est une indication qu'ils sont erronés.]

b. Calculer le vecteur $\phi(b_3)$, et donner ensuite ses coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$.

c. Déterminer la matrice $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

d. Calculer le polynôme minimal μ_ϕ de ϕ, ainsi que son polynôme caractéristique χ_ϕ. [Ce calcul est plus facile si on utilise la matrice M' plutôt que la matrice M.]

e. Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable.

f. Donner pour chaque valeur propre λ de ϕ les dimensions du sous-espaces propre E_λ et du sous-espace caractéristique $\tilde{E}_\lambda$.

g. Donner une base de chacun des sous-espaces de la question précédente.

Fin.