Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2

mercredi 4 novembre 2015
8h15–10h15

La consultation du cours écrit, ainsi que de vos notes personnelles, est autorisée. L'utilisation d'une calculatrice, ou tout autre appareil électronique, n'est pas autorisée. Les trois exercices sont indépendants.

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -8 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Décrire le sous-espace $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathbf{R}^3$ par un système d'équations linéaires.

b. Résoudre ce système, et donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

c. Trouver une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.

d. Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ associé de façon canonique à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 31 & -18 & 4 \\ 54 & -32 & 8 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que les vecteurs $b_1 = (2, 3, 0)$, $b_2 = (1, 2, 1)$ et $b_3 = (2, 4, 1)$ sont des vecteurs propres de ϕ, et déterminer les valeurs propres correspondantes.

b. Montrer que ϕ est diagonalisable.

c. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

d. Argumenter que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ pour $n \in \mathbf{N}$, et donner une expression explicite pour D^n.

e. Calculer explicitement, en fonction de n, les 9 coefficients de A^n.

3. Soit $E = \mathbf{C}^3$ et ϕ l'endomorphisme de E de matrice (par rapport à la base canonique)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -6 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer $\det(B)$, et en déduire que 0 est une valeur propre de ϕ.

b. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B.

c. Trouver toutes les valeurs propres de ϕ.

d. Argumenter sans calcul supplémentaire que ϕ est diagonalisable.

e. Trouver une base de E formée de vecteurs propres pour ϕ.

Fin.