Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 mercredi 18 juin 2014
14h–17h

1. Sur le corps $\mathbf{Q}$ on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le polynôme caractéristique χ_M et les valeurs propres de M. Conclure que M est trigonalisable sur $\mathbf{Q}$.

$\surd$ *Le déterminant $\chi_M = \det(XI_4 - M)$ se développe facilement par la dernière ligne et ensuite par la première ligne, pour donner $\chi_M = (X-1)^2(X^2+2X+1) = (X-1)^2(X+1)^2$. Ce polynôme est scindé sur $\mathbf{Q}$, donc la matrice M est trigonalisable sur $\mathbf{Q}$.*

b. Pourquoi M n'est pas diagonalisable ?

$\surd$ *Si M était diagonalisable, alors le polynôme minimal μ_M de M serait scindé à racines simples (et avec les même racines $1, -1$ que χ_M) ce qui force $\mu_M = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$. Or un simple calcul montre $M^2 \neq I_4$, donc $X^2 - 1$ n'est pas annulateur de M ; par conséquent M ne peut pas être diagonalisable. Un autre argument possible est de calculer l'espace propre pour $\lambda = 1$ ou pour $\lambda = -1$; en fait ni l'un ni l'autre n'a la dimension 2 requise (à savoir la multiplicité de λ comme racine de χ_M) pour que M soit diagonalisable.*

c. Déterminer les sous-espaces caractéristiques, et une matrice triangulaire supérieure T semblable à M, en précisant une relation de similitude entre M et T à l'aide d'une matrice (inversible) P. Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

$\surd$ *Les espaces propres pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = -1$ sont respectivement engendrés par les vecteurs propres $b_1 = (1,1,0,0)$ et $b_3 = (0,1,1,0)$. Les sous-espaces caractéristiques contiennent chacun strictement l'espace propre correspondant, et les vecteurs suivants complètent une base des espaces caractéristiques $b_2 = (0,1,0,1)$ respectivement $b_4 = (0,1,0,0)$. Comme on vérifie que $(M - I_4) \cdot b_2 = b_1$ et que $(M + I_4) \cdot b_4 = b_3$, le changement de base vers la base $\mathcal{B} = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ rendra M triangulaire supérieur, plus précisément*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On aura alors la relation de similitude $T = P^{-1}MP$, où P est la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$, dont les colonnes sont formées par les coordonnées des vecteurs b_j dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Inversibilité de polynômes de matrice.*
Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$, $\chi_A \in \mathbf{C}[X]$ son polynôme caractéristique, et enfin $P \in \mathbf{C}[X]$. On rappelle que (comme tous les polynômes *complexes* se décomposent en facteurs de degré ≤ 1) deux polynômes sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}[X]$ si et seulement si ils n'ont aucune racine commune.

a. Soit $P[A]$ la matrice obtenue en substituant A pour X dans P.

i. Montrer que si P et χ_A ne sont pas premiers entre eux, alors $P[A]$ n'est pas inversible.

$\surd$ *Comme P et χ_A ne sont pas premiers entre eux, ils ont une racine commune, c'est-à-dire l'une des valeurs propres λ de A est racine de P. Si v est un vecteur propre correspondant à lambda, la matrice $P[A]$ appliquée à v le multiplie par le scalaire $P[\lambda] = 0$. Cela montre que $P[A]$ ne peut être inversible.*

ii. Montrer que si P et χ_A sont premiers entre eux, alors $P[A]$ est inversible.

$\surd$ *Il existe des coefficients de Bezout $S, T \in \mathbf{C}[X]$ tels que $SP + T\chi_A = 1$. Dans cette situation on a $I = 1[A] = S[A] \cdot P[A] + T[A] \cdot \chi_A[A] = S[A] \cdot P[A]$ par le théorème de Cayley-Hamilton, ce qui montre que $S[A]$ est l'inverse de $P[A]$.*

b. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{C})$$

i. Déterminer le polynôme caractéristique de A (une forme factorisée n'est pas demandée).

$\surd$ *Par calcul direct on trouve* $\chi_A = (X-1)((X+1)X+1) = (X-1)(X^2+X+1) = X^3-1$.

ii. En déduire l'écriture sous forme de polynôme en A des inverses de A et de $A+A^2$.

$\surd$ *Comme A vérifie $A^3 - I = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(A^2)A = I$ (ce qui en fait provient d'une relation de Bezout pour X, χ_A avec $S = X^2$ et $T = -1$), donc $A^{-1} = A^2$. Pour l'inverse de A^2+A, une relation de Bezout pour X^2+X, χ_A est donnée par $S = \frac{1}{2}(X^2+X-1)$ et $T = -\frac{1}{2}(X+2)$ (donc $\frac{1}{2}(A^2+A-I)(A^2+A) - \frac{1}{2}(A+2)(A^3-I) = I$) et $(A^2+A)^{-1} = \frac{1}{2}(A^2+A-I)$.*

iii. Quelles sont les valeurs de $p \in \mathbf{N}$ telles que $A^p + A$ soit inversible?

$\surd$ *$\chi_A = X^3 - 1$ a pour racines les trois racines (complexes) cubiques de l'unité: 1, $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}^2 = \bar{\mathbf{j}}$ où $\mathbf{j} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$. Pour que $X^p + X$ soit premier avec χ_A il faut et il suffit que $X^p + X$ ne partage aucune de ces racines, c'est-à-dire que : $1^p + 1 \neq 0$, $\mathbf{j}^p + \mathbf{j} \neq 0$, et $\bar{\mathbf{j}}^p + \bar{\mathbf{j}} \neq 0$. Comme -1, $-\mathbf{j}$, $-\bar{\mathbf{j}}$ ne sont pas parmi les puissances de ces racines de l'unité (qui sont elles-mêmes de telles racines), c'est le cas pour tout $p \in \mathbf{N}$.*

On pourra aussi raisonner que puisque $A^3 = I$, la question ne dépend que de la classe modulo 3 de p, et pour $p = 0, 1, 2$ on trouve des matrices inversibles $A+I$ (car -1 n'est pas valeur propre de A), $2A$ (car 0 n'est pas valeur propre de A), et $A^2 + A$ (vue dans la question précédente).

3. Le but de cette partie est (entre autres) de donner un exemple où dans les applications de mathématiques les problèmes de valeurs propres peuvent apparaître. Dans ce qui suit les conséquences mathématiques de la modélisation seront clairement identifiées (on n'a donc pas à craindre des conditions qui seraient cachées dans les détails la description).

On considère une situation où un ensemble d'entités similaires qu'on appellera « agents » peuvent être chacun dans l'un d'un nombre fini d'« états ». On peut penser à des internautes dont l'état est la page Web qu'ils sont en train de visiter ; c'est cette application qu'on utilisera pour nos explications. On associe à chaque état (page Web) un entier, variant de 1 à n. Pour simplifier on suppose que pour l'ensemble des agents, l'état peut changer seulement à certains moments précis (donc l'évolution n'est pas continue mais discrète), par exemple une fois par minute certains internautes peuvent changer de page. La transition est d'une nature aléatoire, mais dépend de l'état actuel de l'agent (la page actuelle, qui contient certain liens). On suppose que les probabilités des transitions ne dépendent ni des états antérieurs de l'agent (absence de mémoire), ni de l'état des autres agents ; on dit que le système est une « chaîne de Markov ». L'état du système entier à un instant donné est donc décrit en donnant le nombre d'agents dans l'état i (nombre de visiteurs de la page i) pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bien que l'évolution du système soit aléatoire, les *lois de probabilités* pour cette évolution peuvent être calculées de façon précise. Une telle loi à un instant donné est décrite en donnant, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, la probabilité x_i qu'un agent donné se trouve alors dans l'état i (s'il y a beaucoup d'agents, la fraction des agents se trouvant effectivement dans l'état i sera donc approximativement égale à x_i). Les n valeurs positives x_i forment un vecteur dans $\mathbf{R}^n$ qu'on représentera par une colonne. On aura $x_1 + \cdots + x_n = 1$, car un agent se trouve dans un et un seul état. On définit les nombres $a_{i,j}$ comme la probabilité pour un agent se trouvant dans l'état j d'évoluer, à la première occasion, vers l'état i (avec évidemment $0 \leq a_{i,j} \leq 1$). Dans notre exemple $a_{i,j}$ décrit la probabilité pour un internaute visitant la page j de passer à la page i (probabilité qui dépend sans doute du contenu de la page j), ou pour le cas particulier $i = j$, la probabilité de rester sur la page j. Alors si x est la loi de probabilités à un instant donné, la loi x' à l'instant suivant est donnée par l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ou de façon plus compacte} \quad x' = A \cdot x.$$

On appelle A la *matrice de transition* du système.

a. Expliquer que pour j fixé, la colonne j de A donne la loi à l'instant 1 si l'on suppose qu'au début (l'instant 0) les agents sont avec certitude (probabilité 1) dans l'état j. En déduire que la somme $a_{1,j} + \cdots + a_{n,j}$ des coefficients de cette colonne vaut 1.

b. En déduire qu'on a toujours $L \cdot A = L$, où L est la matrice $1 \times n$ (une ligne) dont tous les coefficients sont égaux à 1 ; et que $\lambda = 1$ est donc une valeur propre de la transposée ${}^tA$ de A.

c. Prouver que $\lambda = 1$ est aussi une valeur propre de la matrice A elle-même.

Une loi x (vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont la somme des coefficients est 1) qui vérifie $A \cdot x = x$ est appelée une *loi d'équilibre* pour le système.

d. On admet qu'il existe un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1$ de A (trouvée à la question *c*) dont *tous les coefficients sont positifs*. Montrer qu'il existe toujours une loi d'équilibre.

e. Trouver concrètement la loi d'équilibre (elle est unique) pour le système à trois états avec matrice

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Surtout, n'allez pas chercher toutes les valeurs propres ici, c'est inutile.]

$\checkmark\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

f. Ici on considère un autre système à trois états, dont la matrice de transition est

$$A = \begin{pmatrix} 1-2p & p & p \\ p & 1-2p & p \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix} \quad \text{avec } p = 1/6, \text{ donc} \quad A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable ; trouver une base formée de vecteurs propres.

g. Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$ et pour chaque vecteur v de cette base de vecteurs propres, le vecteur $A^n \cdot v$.

h. En déduire que dans cet exemple, quelle que soit la loi x de probabilité initiale, la loi $A^n \cdot x$ tendra pour $n \to \infty$ vers une loi d'équilibre, qu'on décrira.