Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mercredi 7 novembre 2012
9h30–11h30

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Donner les valeurs propres de f.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique de A est $(X-3)(X-1) - 2 \times 4 = X^2 - 4X - 5 = (X-5)(X+1)$ donc les valeurs propres de A sont 5 et -1.*

b. Donner une base $\mathcal{B} = [v_1, v_2]$ de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de f.

$\surd$ *On cherche des vecteurs annulés par les matrices $A - 5\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement par $A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, par exemple $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

c. Donner une matrice P telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

$\surd$ *Si on choisit pour les colonnes de P une base formée de vecteurs propres de f, la matrice $P^{-1}AP$ sera diagonale avec comme coefficients diagonaux les valeurs propres. D'après la question b, on peut donc prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et on aura $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (On aura aussi $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.)*

d. Donner une expression de A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *On a $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, et il en découle que $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donc*

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \times 5^n + (-1)^n & 2 \times 5^n - 2 \times (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

2. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des suites infinies $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $x_n \in \mathbf{C}$ pour tout n, qui vérifient

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Une telle suite est déterminée par le couple (x_0, x_1) de ces deux premiers termes, et l'application $E \to \mathbf{C}^2$ qui associe à la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ le vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

a. Quelle est la dimension de E ?

$\surd$ *Comme E est isomorphe à $\mathbf{C}^2$, la dimension est 2.*

b. Soit $S = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$ une telle suite ; calculer un nombre suffisant de termes de la suite S (exprimés en écrivant $x = x_0$ et $y = x_1$) pour conclure qu'elle est *périodique*, c'est-à-dire : il existe un entier $p > 0$ tel que $x_{n+p} = x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (on spécifiera la valeur de p).

$\surd$ *On a $x_0 = x$, $x_1 = y$, $x_2 = y - x$, $x_3 = -x$, $x_4 = -y$, $x_5 = x - y$, $x_6 = x = x_0$, $x_7 = y = x_1$. Il est clair à partir de ce point que $x_{n+6} = x_n$ pour tout n (donc on a la période $p = 6$).*

c. Donner une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$\surd$ *Chaque ligne de la matrice exprime une composante du résultat comme combinaison linéaire des composantes de l'argument; il est donc clair que la première ligne est $(0\ \ 1)$ car $x_{n+1} = 0x_n + 1x_{n+1}$, et la seconde, qui reflète la relation $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ est $(-1\ \ 1)$; au total on obtient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.*

d. Si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$ est si $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, exprimer le terme général x_n par une expression dans laquelle figurent seulement x_0, λ, et n.

$\surd$ *Comme $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre propre λ, on a $A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, mais on a aussi $A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ d'après la définition de A. Par inspection de la première coordonnée, $x_n = \lambda^n x_0$.*

e. Vérifier que cette matrice vérifie $A^3 = -\operatorname{Id} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. En déduire:

i. que A est inversible, et donner sa matrice inverse ;

ii. la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$ (on pourra distinguer plusieurs cas).

$\surd$ *Par calcul direct* $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. *On en déduit* $A \cdot -A^2 = \operatorname{Id}$, *et donc* $A^{-1} = -A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *On a pour* $n \geq 3$ *que a* $A^{n+3} = A^3 A^{n-3} = -A^{n-3}$, *ce qu'on peut itérer jusqu'au reste de* n *modulo* 3, *pour obtenir :*

$$\begin{aligned} A^{3k} &= (-1)^k \operatorname{Id}, \\ A^{3k+1} &= (-1)^k A = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^{3k+2} &= (-1)^k A^2 = (-1)^k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$, *ce qui couvre tous les cas. On pourrait aussi donner* 6 *cas (avec des matrices fixes), selon le reste de* n *modulo* 6.

f. Trouver les valeurs propres de A, et les vecteurs propres pour chacune de ces valeurs propres.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique de* A *est* $X^2 - X + 1$, *et ses racines sont* $\lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$ *et* $\lambda_- = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$. *Un vecteur propre pour* λ_+ *est* $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{smallmatrix}\right)$, *et un vecteur propre pour* λ_- *est* $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{smallmatrix}\right)$.

g. En utilisant les résultats des questions *d* et *f*, donner une expression pour le terme général b_n de la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ pour laquelle $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$ (on évitera ici une distinction de cas).

$\surd$ *On a* $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{smallmatrix}\right) = \sqrt{3}\mathbf{i}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, *et d'après la question d, les suites* $S_+, S_- \in E$ *avec* $g(S_+) = (1, \lambda_+)$ *et* $g(S_-) = (1, \lambda_-)$ *sont de terme général* λ_+^n *respectivement* λ_-^n. *On a alors* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{3}\mathbf{i}}(S_+ - S_-)$ *et donc* $b_n = \frac{1}{\sqrt{3}\mathbf{i}}(\lambda_+^n - \lambda_-^n) = \frac{1}{\sqrt{3}\mathbf{i}}((\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i})^n - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i})^n)$.

h. Expliquer que cette expression est périodique en n (on le sait d'après la question *b*).

$\surd$ *On a* $\lambda_+^6 = \lambda_-^6 = 1$ *(calcul direct), donc la formule donnée implique que* $b_{n+6} = b_n$ *pour tout* n. *En fait il découle de* $A^3 = -\operatorname{Id}$ *que les valeurs propres de* A *doivent obligatoirement vérifier* $\lambda^3 = -1$ *et donc* $\lambda^6 = 1$, *par le même type d'argument qu'on a utilisé dans la réponse à la question* **2***a*.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, muni d'un endomorphisme ϕ vérifiant $\phi^2 = \operatorname{Id}_E$.

a. Montrer que les seules valeurs propres λ que ϕ peut avoir sont $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

$\surd$ *Si* v *est vecteur propre pour* λ *on a* $v = \phi^2(v) = \lambda^2 v$, *et comme par définition* $v \neq \vec{0}$, *on doit avoir* $\lambda^2 = 1$ *et donc* $\lambda \in \{-1, 1\}$.

b. On suppose que $v \in E$ est un vecteur non nul qui *n'est pas* un vecteur propre. Trouver, dans le sous-espace $\operatorname{Vect}(v, \phi(v))$, des vecteurs propres de ϕ aussi bien pour $\lambda = 1$ que pour $\lambda = -1$. [Écrire et résoudre une équation pour que $av + b\phi(v)$ avec $a, b \in \mathbf{Q}$ soit un tel vecteur propre.]

$\surd$ *On a* $\phi(av + b\phi(v)) = bv + a\phi(v)$ *donc on trouve avec* $a = b = 1$ *le vecteur propre* $v_1 = v + \phi(v)$ *pour* $\lambda = 1$, *et avec* $a = -b = 1$ *le vecteur propre* $v_{-1} = v - \phi(v)$ *pour* $\lambda = -1$. *(Ces deux vecteurs sont non nuls, car* v *et* $\phi(v)$ *sont linéairement indépendants ; sinon* v *serait un vecteur propre.)*

c. Conclure qu'un tel v est toujours une somme de deux vecteurs propres. Qu'est-ce qu'on peut alors dire de la somme $E_1 + E_{-1}$ des *espaces propres* E_λ de ϕ pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = -1$?

$\surd$ *On a* $v = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_{-1}$ *dont les deux termes sont des vecteurs propres (le multiple scalaire non nul d'un vecteur propre est un vecteur propre). Ceci montre que* $E_1 + E_{-1} = E$.

d. Conclure que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *D'après la question précédente la somme des espaces propres pour* $\lambda = 1$ *et pour* $\lambda = -1$ *est égal à l'espace* E *tout entier. Un somme d'espace propres est toujours direct, donc on trouve une base de vecteurs propres en choisissant séparément des bases dans chacun des espaces propres. Et l'existence d'une base formée de vecteurs propres est équivalent à la diagonalisabilité.*

On spécialise maintenant $E = \mathbf{Q}[X]_{\leq 3}$, l'espace vectoriel des polynômes en X à coefficients rationnels et de degré au plus 3. On définit $f : E \to E$ en stipulant que $f(P)$ est obtenu à partir du polynôme P en remplaçant partout X par $(2-X)$ (une substitution qu'on peut décrire par $f : P(X) \mapsto P(2-X)$; on a par exemple $f(X^3 + 5X - 3) = (2 - X)^3 + 5.(2 - X) - 3 = -X^3 + 6X^2 - 17X + 15$).

e. Montrer que f est un endomorphisme de E, et qu'il vérifie $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

$\surd$ *Il découle de la définition que $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ et $f(cP) = cf(P)$ pour $c \in \mathbf{Q}$, donc f est $\mathbf{Q}$-linéaire. En plus la substitution de $(2-X)$ pour X dans un monôme X^i donne un polynôme de degré i, donc $\deg(f(P)) \leq \deg P$. La valeur de $f(f(P))$ est obtenue en remplaçant partout X par $(2-(2-X))$ et comme $(2-(2-X)) = X$ on a $f(f(P)) = P$ pour tout P, donc $f^2 = \mathrm{Id}_E$.*

f. Donner la matrice de f par rapport à la base $[1, X, X^2, X^3]$ de E.

$\surd$ *Les images des éléments de la base par f sont respectivement 1, $2-X$, $(2-X)^2 = 4-4X+X^2$ et $(2-X)^3 = 8-12X+6X^2-X^3$, et ces images, exprimées dans la base $[1, X, X^2, X^3]$, forment les colonnes de la matrice cherchée, qui est donc*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

g. Trouver les dimensions des espaces propres pour f, ainsi que la matrice de f par rapport à une base formée de vecteurs propres.

$\surd$ *Les espaces propres sont les noyaux des applications linéaires dont les matrices sont*

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est assez facile de voir que chacun de ces noyaux est de dimension 2 : comme la somme des espaces propres est directe et égale à E, on sait que la somme des dimensions des noyaux est $\dim E = 4$; il suffit donc soit de trouver deux vecteurs indépendants dans chacun des noyaux, soit de montrer (ce qui semble un peu plus facile) que chacune de ces matrices est de rang au moins 2 de sorte que les noyaux correspondants sont de dimension au plus *$4-2=2$ par le théorème du rang. On peut aussi utiliser le fait $f(1-X) = 1-(2-X) = -(1-X)$ qui entraîne $f((1-X)^i) = (-1)^i(1-X)^i$, et en tirer une base astucieuse de E formée de vecteur propres, dont 1 et $(1-X)^2$ comme vecteurs propres pour $\lambda = 1$, et $1-X$ et $(1-X)^3$ comme vecteurs propres pour $\lambda = -1$. Par rapport à une base de deux vecteurs propres pour $\lambda = 1$ suivis de deux vecteurs propres pour $\lambda = -1$, la matrice de f sera toujours*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fin.