Examen Algèbre Linéaire 2 mercredi 9 janvier 2013
14h–17h

Les documents ne sont pas autorisés. Les 4 parties sont indépendantes.

1. Soit f l'endomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$, dont la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -15 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique χ_A, et montrer que f est diagonalisable.

b. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation et la forme diagonale $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sur cette base.

c. Donner une expression explicite pour la puissance A^n de la matrice A, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

d. On cherche maintenant les endomorphismes g telles que $g^2 = f$. Montrer que pour un tel g, s'il existe, tout espace propre de f sera g-stable [montrer donc que si v est vecteur propre v de f pour λ, alors le vecteur $g(v)$ sera également dans cet espace propre : on aura $f(g(v)) = \lambda g(v)$].

e. En déduire que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ de g dans la base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres pour f doit être diagonale. Trouver ensuite toutes les possibilités pour cette matrice.

2. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Donner la factorisation du polynôme caractéristique χ_ϕ dans $\mathbf{R}[X]$.

b. Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable.

c. Décrire les espaces caractéristiques de ϕ. [Rappel : l'espace caractéristique pour une valeur propre λ est égal au noyau de $(\phi - \lambda\,\mathrm{Id})^m$ où m est la multiplicité de λ comme racine de χ_ϕ.]

d. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit triangulaire supérieure, et expliciter cette matrice.

3. On considère la matrice triangulaire supérieure suivante, qui dépend de paramètres a, b, c, d, e, f:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & a & b & c \\ 0 & -3 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculer la factorisation du polynôme caractéristique χ_A dans $\mathbf{C}[X]$.

b. Si l'on suppose que A est diagonalisable (sur $\mathbf{C}$), quel sera alors son polynôme minimal μ_A ?

c. Soit P le polynôme de la question précédente (candidat pour le polynôme minimal dans le cas où A serait diagonalisable). Calculer le polynôme en A correspondant, c'est-à-dire $P[X := A]$, et en déduire une condition nécessaire et suffisante en a, b, c, d, e, f pour que A soit diagonalisable.

d. Trouver par la même méthode une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

 continué au verso

4. Soient données un K-espace vectoriel E de dimension n, un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(E)$ et un vecteur non nul $v_0 \in E$. On définit le vecteurs $v_i = \phi^i(v_0)$ pour $0 < i \leq n$.

a. Pourquoi la famille $(v_0, \dots, v_n)$ est-elle certainement liée ?

Soit $d \leq n$ minimal tel que la famille $(v_0, \dots, v_d)$ soit liée (ce qui est bien défini d'après la question précédente), et soit $F = \mathrm{Vect}(v_0, \dots, v_{d-1})$.

b. Montrer qu'il existe des coefficients $a_0, \dots, a_{d-1} \in K$ tels que $a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_{d-1} v_{d-1} + v_d = 0$, et que ces coefficients sont uniques.

c. Montrer que F est un sous-espace ϕ-stable de E, et le plus petit tel sous-espace qui contient v_0 (c'est-à-dire, tout sous-espace ϕ-stable de E qui contient v_0 contient forcément F tout entier).

d. On suppose désormais que $d = n$, ce qui entraîne que $F = E$, et que $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_{d-1})$ est une base de E. Montrer sans calcul que $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ est le polynôme minimal μ_ϕ de ϕ. [Indication: P est par construction le polynôme annulateur (pour ϕ) du vecteur v_0, donc il suffit d'argumenter que P annule également les autres vecteurs de la base $\mathcal{B}$.]

e. Expliquer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} = C_P,$$

ce qui la matrice compagnon du polynôme P.

f. Montrer, par un calcul utilisant la matrice C_P, que le polynôme caractéristique χ_ϕ est égal à P.

g. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable, en termes du polynôme P.

Fin.