Contrôle continu Algèbre Linéaire jeudi 26 novembre 2020
10h45–12h15

Consultation du cours écrit, et de son résumé, est autorisée. Les espaces vectoriels sont sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Let trois parties sont indépendantes. Barème indicatif : $6+8+6=20$.

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 10 \\ -3 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que ϕ est diagonalisable.

b. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

2. On considère, pour les suites de nombre réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la relation de récurrence $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$.

a. Calculer les termes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_9$ d'une suite vérifiant cette récurrence avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrive :

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}.$$

c. Trouver toutes les valeurs réelles λ telles que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la récurrence.

d. Déduire une expression explicite pour le terme général de la suite de la question *a*.

3. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace des polynômes en X de degré < 4, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\phi(c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3) = -c_0 + (c_0 - c_1 + 2c_3)X + (c_1 - c_2 - 5c_3)X^2 + (c_2 + 3c_3)X^3$.

a. Donner la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base (dite canonique) $\mathcal{E} = [1, X, X^2, X^3]$ de E.

b. On ne demande pas ici de calculer le polynôme caractéristique de M, on admet que c'est $\chi_M = X^4 - X^2$. Après avoir factorisé χ_M, montrer que ϕ *n'est pas diagonalisable.*

c. Pour un sous-espace quelconque V de E, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme de ψ de V qui soit la restriction de ϕ (c'est-à-dire telle que $\psi(v) = \phi(v)$ pour tout $v \in V$). (On désignera alors ce ψ par $\phi|_V$.)

d. Soit maintenant $V = \{\, P \in E \mid P[1] = 0 \,\}$, le sous-espace des polynômes de E qui ont 1 comme racine. Donner $\dim(V)$ et montrer que V vérifie la condition de la question précédente.

e. Pour $\mathcal{B} = [1 - X, X - X^2, X^2 - X^3]$ qui est une base de V (on l'admet), déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi|_V)$.

f. Montrer que $\phi|_V$ est diagonalisable, et donner une base de V formée de vecteurs propres de $\phi|_V$.

Fin.