Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire jeudi 26 novembre 2020
10h45–12h15

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 10 \\ -3 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -10 & -10 \\ 3 & X+5 & 4 \\ -3 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$$

donne $\chi_A = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$. *On pourrait aussi soustraire la dernière colonne à la seconde, et ensuite additionner la seconde ligne de la dernière, pour trouver*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -10 \\ 3 & X+1 & 4 \\ 0 & 0 & X+3 \end{vmatrix} = (X+3)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 3 & X+1 \end{vmatrix} = (X+3)(X-2)(X+1)$$

Si l'on n'a pas ainsi trouvé χ_A déjà sous forme factorisée, on peut observer que les racines éventuelles dans $\mathbf{Z}$ de X^3+2X^2-5X-6 sont des diviseurs du terme constant -6, et parmi les 8 candidats ainsi déterminés, -3, -1 et 2 sont effectivement des racines, ce qui permet de factoriser ce polynôme comme $X^3 + 2X^2 - 5X - 6 = (X+3)(X+1)(X-2)$.
Le polynôme caractéristique a donc trois racines distinctes, -3, -1 et 2, qui sont les valeurs propres. Associée à chacune est un espace propre qui a dimension au moins 1, leur somme, qui est directe, a dimension au moins 3, et est donc égale à $E = \mathbf{Q}^3$. Cela veut dire que ϕ est diagonalisable.

b. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Pour $\lambda = -3$ un vecteur propre est $(2, 1, -2)$, pour $\lambda = -1$ on a un vecteur propre $(0, 1, -1)$, et pour $\lambda = 2$ on a un vecteur propre $(1, -1, 1)$.*

2. On considère, pour les suites de nombre réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la relation de récurrence $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$.

a. Calculer les termes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_9$ d'une suite vérifiant cette récurrence avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

$\surd$ $0, 1, 1, 4, 7, 19, 40, 97, 217, 508.$

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrive :

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}.$$

$\surd$ *Comme indiqué dans le cours, les lignes sauf la dernières sont celles de la matrices identité un cran plus bas, et la dernière ligne représente la relation de récurrence:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Trouver toutes les valeurs réelles λ telles que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la récurrence.

$\surd$ *Pour une telle suite, la relation de récurrence dit $\lambda^{n+2} = 3\lambda^n + \lambda^{n+1}$. Pour que la suite vérifie la récurrence, il est donc nécessaire que $\lambda^2 = 3 + \lambda$, qui est la relation de récurrence pour $n = 0$; c'est aussi suffisant, car la relation à la place n en est déduite en multipliant par λ^n. Cette équation quadratique, qui s'écrit sous forme standardisée $\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$, admet deux solutions réelles : $\lambda = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, valeur qu'on appellera λ_+, et $\lambda = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ qu'on appellera λ_-.*

d. Déduire une expression explicite pour le terme général de la suite de la question *a.*

$\surd$ *L'approche la plus facile est de chercher à écrire la suite* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *comme combinaison linéaire des suite géométriques* $(\lambda_+^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(\lambda_-^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *dont on sait qu'elle sont des solutions des la relation de récurrence. Si l'on pose l'équation* $a_n = \lambda_+^n x + \lambda_-^n y$ *avec comme inconnues* $x, y \in \mathbf{R}$*, alors les valeurs* $a_0 = 0$ *et* $a_1 = 1$ *donnent les équations* $x + y = 0$ *et* $\lambda_+ x + \lambda_- y = 1$*, dont la solution* $x = \frac{1}{\sqrt{13}}$ *et* $y = -\frac{1}{\sqrt{13}}$ *est facile à trouver. Ainsi on trouve la formule*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}(\lambda_+^n - \lambda_-^n). = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right).$$

Une approche un peu plus longue est de faire une changement de base explicite vers une base de vecteurs propres $\binom{1}{\lambda}$*. La matrice de passage est* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{pmatrix}$ *et on a donc* $A^n = PD^nP^{-1}$ *où* D^n *est diagonale avec coefficients diagonaux* λ_+^n *et* λ_-^n*. Il n'est pas nécessaire de calculer* A^n *entièrement, il suffit de connaître* $\binom{a_n}{a_{n-1}} = A^n \cdot \binom{a_0}{a_1}$*, et de cela juste la première composante* a_n*, qui est donc l'unique coefficient de la matrice* 1×1 *:* $(1\ 0) \cdot A^n \cdot \binom{0}{1} = (1\ 0) \cdot P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot \binom{0}{1} = \frac{1}{\sqrt{13}}(1\ 1) \cdot D^n \cdot \binom{1}{-1}$*, ce qui donne la formule ci-dessus.*

3. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace des polynômes en X de degré < 4, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\phi(c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3) = -c_0 + (c_0 - c_1 + 2c_3)X + (c_1 - c_2 - 5c_3)X^2 + (c_2 + 3c_3)X^3$.

a. Donner la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base (dite canonique) $\mathcal{E} = [1, X, X^2, X^3]$ de E.

$\surd$ *La définition donne* $\phi(1) = -1 + X$, $\phi(X) = (-X + X^2)$, $\phi(X^2) = -X^2 + X^3$, *et* $\phi(X^3) = 2X - 5X^2 + 3X^3$*, d'où*

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b. On ne demande pas ici de calculer le polynôme caractéristique de M, on admet que c'est $\chi_M = X^4 - X^2$. Après avoir factorisé χ_M, montrer que ϕ *n'est pas diagonalisable.*

$\surd$ *Comme* $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$*, le polynôme caractéristique est scindé avec une seule racine double, à savoir* $\lambda = 0$*. Alors pour que* ϕ *soit diagonalisable, il faut que* $\dim(E_0) = 2$ *; or* $E_0 = \ker(\phi) = \mathrm{Vect}(2X - 3X^2 + X^3)$ *comme on calcule facilement (car* $\ker(M) = \mathrm{Vect}((0, 2, -3, 1))$*), donc* $\dim(E_0) = 1$ *et* ϕ *n'est pas diagonalisable.*

c. Pour un sous-espace quelconque V de E, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme de ψ de V qui soit la restriction de ϕ (c'est-à-dire telle que $\psi(v) = \phi(v)$ pour tout $v \in V$). (On désignera alors ce ψ par $\phi|_V$.)

$\surd$ *Il faut et il suffit que* $\phi(v) \in V$ *pour tout* $v \in V$*, autrement dit que* V *soit* ϕ*-stable.*

d. Soit maintenant $V = \{\, P \in E \mid P[1] = 0 \,\}$, le sous-espace des polynômes de E qui ont 1 comme racine. Donner $\dim(V)$ et montrer que V vérifie la condition de la question précédente.

$\surd$ *Puisque* $f : P \mapsto P[1]$ *est une application linéaire* $E \to K$ *de rang 1 (car non nulle) et dont* V *est le noyau (par définition), on a* $\dim(V) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 3$ *d'après le théorème du rang. Pour vérifier que* V *est* ϕ*-stable, on pourra vérifier que* $\phi(b) \in V$ *où* b *parcourt une base de* V*, par exemple celui de la question suivante ; en effet* $\phi(1-X) = -1 + 2X - X^2$, $\phi(X - X^2) = -X + 2X^2 - X^3$*, et* $\phi(X^2 - X^3) = -2X + 4X^2 - 2X^3$*, et ces trois polynômes ont tous 1 comme racine, et appartiennent donc à* V*. Un argument alternatif, qui n'a même pas besoin d'une base de* V*, et de constater que* $f \circ \phi = 0$ *(il suffit de substituer* $X := 1$ *dans l'expression ci-dessus qui définit* ϕ*), donc* V *contient l'image* $\phi(E)$ *de* ϕ*, et* $\phi(v) \in V$ *est assuré même sans utiliser l'hypothèse* $v \in V$*.*

e. Pour $\mathcal{B} = [1 - X, X - X^2, X^2 - X^3]$ qui est une base de V (on l'admet), déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi|_V)$.

$\surd$ *D'après les valeurs calculées dans le point précédent et en les exprimant sur la base* $\mathcal{B}$ *comme* $\phi(1 - X) = -(1 - X) + (X - X^2)$, $\phi(X - X^2) = -(X - X^2) + (X^2 - X^3)$ *et* $\phi(X^2 - X^3) = -2(X - X^2) + 2(X^2 - X^3)$ *on trouve la matrice*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi|_V) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

f. Montrer que $\phi|_V$ est diagonalisable, et donner une base de V formée de vecteurs propres de $\phi|_V$.

$\surd$ *La matrice trouvée a polynôme caractéristique* $X^3 - X = (X+1)X(X-1)$ *qui a trois racines simples* $-1, 0, 1$ *; on en déduit que* $\phi|_V$ *est diagonalisable avec ces trois valeurs propres. Les coordonnées sur la base* $\mathcal{B}$ *de vecteurs propres sont respectivement :* $(2, -3, 1)$ *pour* $\lambda = -1$*, donnant le vecteur propre* $2(1-X) - 3(X - X^2) + (X^2 - X^3) = 2 - 5X + 4X^2 - X^3$*, ensuite* $(0, 2, -1)$ *pour* $\lambda = 0$*, donnant le vecteur propre* $2(X - X^2) - (X^2 - X^3) = 2X - 3X^2 + X^3$*, et* $(0, 1, -1)$ *pour* $\lambda = 1$*, donnant le vecteur propre* $(X - X^2) - (X^2 - X^3) = X - 2X^2 + X^3$.

Fin.