Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire mercredi 6 novembre 2019
8h15–10h15

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 \\ -5 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A \in K[X]$ de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+6 & -6 & -6 \\ 5 & X-7 & -6 \\ -1 & 3 & X+2 \end{vmatrix}$$

donne $\chi_A = X^3 + X^2 - 2X$. *On pourrait aussi soustraire la dernière colonne à la seconde, et ensuite additionner la seconde ligne de la dernière, pour trouver*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+6 & 0 & -6 \\ 5 & X-1 & -6 \\ 4 & 0 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X+6 & -6 \\ 4 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2+2X)$$

b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ $X^3 + X^2 - 2X = X(X-1)(X+2)$

c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique a trois racines distinctes,* $0, 1, -2$, *qui sont donc des valeurs propres. Associée à chacune est un espace propre qui a dimension au moins* 1, *leur somme qui est directe a dimension au moins* 3, *ce qui est donc l'espace* $E = \mathbf{Q}^3$ *tout entier. Cela veut dire que* ϕ *est diagonalisable.*

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 0$ *un vecteur propre est* $(1, -1, 2)$, *pour* $\lambda = 1$ *on a un vecteur propre* $(0, 1, -1)$, *et pour* $\lambda = -2$ *on a un vecteur propre* $(3, 1, 1)$.

2. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = a_n + 3a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

a. Calculer les 7 premiers termes de cette suite.

$\surd$ $0, 1, 3, 10, 33, 109, 360$

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

$\surd$ *Comme indiqué dans le cours, les lignes sauf la dernières sont celles de la matrices identité un cran plus bas, et la dernière ligne représente la relation de récurrence:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.

$\surd$ *On voit que* $\binom{a_0}{a_1}$ *est vecteur propre de A (avec valeur propre* λ*) si et seulement si la suite avec ces valeurs initiales et vérifiant la relation de récurrence est une suite géométrique (de raison* λ*). Or une suite géométrique* $(c\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *(avec* $c, \lambda \in \mathbf{C}$ *et* $c \neq 0$*) vérifie la relation de récurrence dès que celle-ci est vérifiée pour* $n = 0$, *c'est-à-dire que* $c\lambda^2 = c\lambda^0 + 3c\lambda^1$ *(car le cas général de la relation de récurrence en résulte après multiplication par* λ^n*). Cette équation se simplifie* $\lambda^2 = 1 + 3\lambda$, *et* λ *est donc racine de* $X^2 - (3X+1) = X^2 - 3X - 1$. *Alternativement on peut prendre le polynôme caractéristique* χ_A *qui est aussi* $X^2 - 3X - 1$.

d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.

$\surd$ *En utilisant la formule pour les racines d'un polynôme de degré 2 on trouve $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ pour ces racines, ce qui donne $\lambda_+ = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $\lambda_- = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ comme valeurs propres. D'après la question précédente, pour chaque valeur propre λ, le vecteur $\binom{1}{\lambda}$ est un vecteur propre, et $[\binom{1}{\lambda_+}, \binom{1}{\lambda_-}]$ est une base.*

e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

$\surd$ *L'approche la plus facile est de chercher à écrire la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme combinaison linéaire des suite géométriques $(\lambda_+^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_-^n)_{n\in\mathbf{N}}$ dont on sait qu'elle sont des solutions des la relation de récurrence. Si l'on pose $a_n = x\lambda_+^n + y(\lambda_-^n)$ avec des inconnues $x, y \in \mathbf{R}$, alors les valeurs $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donnent les équations $x + y = 0$ et $\lambda_+ x + \lambda_- y = 1$, dont la solution $x = \frac{1}{\sqrt{13}}$ et $y = -\frac{1}{\sqrt{13}}$ est facile à trouver. Ainsi on trouve la formule*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}(\lambda_+^n - \lambda_-^n). = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right).$$

Une approche un peu plus longue est de faire une changement de base explicite vers une base de vecteurs propres $\binom{1}{\lambda}$. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{pmatrix}$ et on a donc $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est diagonale avec coefficients diagonaux λ_+^n et λ_-^n. Il n'est pas nécessaire de calculer A^n entièrement, il suffit de connaître $\binom{a_n}{a_{n-1}} = A^n \cdot \binom{a_0}{a_1}$, et de cela juste la première composante a_n, qui est donc l'unique coefficient de la matrice 1×1 : $(1\ 0) \cdot A^n \cdot \binom{0}{1} = (1\ 0) \cdot P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot \binom{0}{1} = \frac{1}{\sqrt{13}}(1\ 1) \cdot D^n \cdot \binom{1}{-1}$, ce qui donne la formule ci-dessus.

3. Soit $E = K^4$, $f : E \to K$ l'application linéaire $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, et $V = \ker(f)$.

a. Justifier que V est un sous-espace vectoriel de E, et donner sa dimension.

$\surd$ *Le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel. Puisque f est de rang 1 (car $\operatorname{Im}(f) \subseteq K$ et $f \neq 0$) on a $\dim(V) = \dim(E) - 1 = 3$ d'après le théorème du rang.*

b. Soit $\phi \in \operatorname{End}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice (par rapport à la base canonique) est

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que $f \circ \phi$ est une application linéaire $K^4 \to K$, et déterminer sa matrice (par rapport aux bases canoniques de K^4 et de $K = K^1$).

$\surd$ *La composée de deux applications linéaires est linéaire. La matrice de la composée (par rapport aux bases choisies, ici toutes canoniques) est le produit des matrices des facteurs. Ici*

$$\operatorname{Mat}(f \circ \phi) = \operatorname{Mat}(f) \cdot \operatorname{Mat}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c. En déduire que $\ker(f \circ \phi) = V$, et conclure que le sous-espace V est ϕ-stable.

$\surd$ *Le calcul matriciel montre que $f \circ \phi = 2f$, donc $\ker(f \circ \phi) = \ker(2f) = \ker(f) = V$. Pour $v \in V$ on a $f(\phi(v)) = 0$ car $v \in \ker(f \circ \phi)$, et cela montre que $\phi(v) \in \ker(f) = V$, donc V est ϕ-stable.*

d. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de V.

$\surd$ *Parmi une infinité de possibilités, la base $\mathcal{B}_0 = [(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)]$ est un choix très naturel, et $\mathcal{B}_1 = [(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)]$ en est un autre.*

e. D'après la question *c*, la restriction $\phi|_V$ de ϕ à V est un endomorphisme du sous-espace V. Déterminer sa matrice $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi|_V)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ trouvée dans la question *c*.

$\surd$ *Il s'agit de calculer $f(v)$ pour v parcourant la base $\mathcal{B}$, et d'exprimer le résultat en coordonnées sur la base $\mathcal{B}$ pour trouver les colonnes de la matrice. Pour $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ on trouve respectivement*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi|_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\phi|_V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f. Vérifier que $(\phi|_V)^2 = \phi|_V$.

$\surd$ *Dans tous les cas on vérifie par un calcul que* $M^2 = M$.

g. Trouver les valeurs propres de $\phi|_V$, et décrire les sous-espaces propres de $\phi|_V$ en donnant une base de chacun, exprimée en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$.

$\surd$ *Il découle de la question précédente que toute valeur propre est racine du polynôme* $X^2 - X$, *donc* $\mathrm{Spec}(\phi|_V) \subseteq \{0, 1\}$. *En calculant* $\ker(M)$ *et* $\ker(M - 1)$ *on voit que les deux candidats sont effectivement des valeurs propres. Par exemple pour* $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi|_V)$ *on trouve* $\ker(M) = \mathrm{Vect}((0, 1, 0))$ *et* $\ker(M - 1) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1))$, *et pour* $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\phi|_V)$ *on trouve* $\ker(M) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0))$ *et* $\ker(M - 1) = \mathrm{Vect}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$. *Ces expressions donnent des coordonnées par rapport à la base* $\mathcal{B}$ *des vecteurs formant des bases* E_0 *et* E_1. *Si l'on note* $\mathcal{B} = [b_1, b_2, b_3]$, *cela donne concrètement* $E_0 = \mathrm{Vect}(b_2)$ *et* $E_1 = \mathrm{Vect}(b_1 - b_2, b_2 - b_3)$ *(pour* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$*) respectivement* $E_0 = \mathrm{Vect}(b_1 - b_2)$ *et* $E_1 = \mathrm{Vect}(b_2, b_3)$ *(pour* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$*).*

h. Décrire ces vecteurs comme éléments de K^4, c'est-à-dire par rapport à sa base canonique. [Sans erreur de calcul, vous devez trouver des vecteurs propres de ϕ, pour les mêmes valeurs propres.]

$\surd$ *On trouve dans les deux cas* $E_0 = \mathrm{Vect}((1, 0, -1, 0))$ *et* $E_1 = \mathrm{Vect}((0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1))$. *Ces deux sous-espaces ne dépendent pas du choix fait pour la base* $\mathcal{B}$ *(mais pour chacun on pourrait trouver une autre base que celle-ci).*

Fin.