Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire mercredi 2 octobre 2019
9h–10h

1. Déterminer la matrice inverse (si elle existe) de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Montrer les étapes de la méthode que vous utilisez pour la calculer, et n'oubliez pas de vérifier votre résultat (au moins sur votre brouillon) en le multipliant par A.

$\surd$ *Voici une transformation de $(A \mid I_3)$ en $(I_3 \mid A^{-1})$ par opérations sur les lignes, où l'on fait attention à privilégier des valeurs ± 1 comme pivot, et à annuler, une fois obtenus les pivots, tous les autres entrées dans la colonne ; ainsi les divisions nécessaires ne sont fait qu'au dernier moment. (Tout cela n'est pas obligatoire, mais dans la pratique le calcul avec les nombres rationnels est beaucoup plus propice à commettre des erreurs que celui avec les entiers.)*

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 7 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 9 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace vectoriel des polynômes en X de degré plus petit que 4. Dans E on considère la famille de vecteurs (c'est-à-dire de polynômes) $\mathcal{F} = [Q, R, S]$, où

$$\begin{aligned} Q &= 2 - X + 4X^2 + X^3 \\ R &= 1 + 3X - 2X^3 \\ S &= -1 + X - 3X^2 + X^3 \end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ la base canonique de K^3.

a. Argumenter qu'il existe une application linéaire unique $f : K^3 \to E$ telle que $f(\mathbf{e}_1) = Q$, $f(\mathbf{e}_2) = R$, et $f(\mathbf{e}_3) = S$, et décrire $f((x, y, z))$ pour un élément $(x, y, z) \in K^3$ quelconque.

$\surd$ *En général, étant donné une base dans l'espace de départ et une famille du même nombre de vecteurs dans l'espace d'arrivée, il existe une application linéaire unique qui envoie les membres de la base vers ceux de la famille, dans le même ordre. On applique cela ici pour la base canonique $\mathcal{E}$ de K^3 et la famille $\mathcal{F}$. Cette application linéaire f forme des combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$: $f((x, y, z)) = xQ + yR + zS$.*

b. Montrer que f est une application injective.

$\surd$ *L'application linéaire f est injective si et seulement si* $\dim(\ker(f)) = 0$, *c'est-à-dire si* $xQ+yR+zS = 0$ *en inconnues* $x, y, z \in K$ *a* $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ *comme unique solution. En mettant les coefficients de* $1, X, X^2, X^3$ *de* $xQ + yR + zS$ *égal à* 0, *on obtient le système linéaire homogène de* 4 *équations en* 3 *inconnues de matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

que méthode de Gauss transforme facilement en une matrice échelonnée avec des pivots dans chacune des trois colonnes, ce qui montre que effectivement $\dim(\ker(f)) = 0$, *d'où f est injective.*

c. On pose $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(Q, R, S)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de V.

$\surd$ *Par définition $\mathcal{F}$ est famille génératrice de* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = V$, *et il suffi donc de montrer que c'est aussi une famille libre. Mais c'est précisément ce qu'on a fait dans la question précédente, car $\mathcal{F}$ est l'image par f de la base canonique de K^3, et une telle image est une famille libre si et seulement si cette application est injective.*

d. On pose $W = \{\, P \in V \mid P[X := 1] = 0 \text{ et } P[X := -1] = 0 \,\}$ (ici $P[X := a] \in K$ désigne la valeur obtenue si l'on substitue a pour X dans le polynôme P). On admet que W est une sous-espace vectoriel de V et donc aussi de E. En écrivant $P = xQ + yR + zS$ pour $x, y, z \in K$, donner un système d'équations en x, y, z qui exprime la condition $P \in W$.

$\surd$ *Puisque* $Q[X := 1] = 6$, $R[X := 1] = 2$, $S[X := 1] = -2$, $Q[X := -1] = 6$, $R[X := -1] = 0$, *et* $S[X := 1] = -6$ *on obtient le système*

$$\begin{aligned} 6x + 2y - 2z &= 0 \\ 6x \qquad - 6z &= 0 \end{aligned}$$

e. Donner une base de W.

$\surd$ *Le système homogène trouvé a une solution paramétré par z, à savoir* $(x, y, z) = (z, -2z, z)$. *Pour avoir une base de W on fixe une valeur non nulle du paramètre z, disons $z = 1$ donc $x = 1$ et $y = -2$, pour trouver le vecteur* $Q-2R+S = -1-X+X^2+6X^3$*; la base est* $[-1 - X + X^2 + 6X^3]$.

Fin.