Contrôle continu 6L19 : Géométrie vendredi 16 mars 2012
10h00–12h00

Le polycopié du cours est le seul document admis. Tous les résultats du cours peuvent être utilisés à condition d'être clairement cités.

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. La droite passant par deux points distincts X, Y est notée (XY) (c'est $\mathcal{D}_{X,Y}$ dans le polycopié).

1. On considère dans le plan affine un triangle non aplati (ABC).

a. Soient (a_1, a_2), (b_1, b_2) et (c_1, c_2) trois couples de nombre réels de sommes non nulles : $a_1+a_2 \neq 0$, $b_1 + b_2 \neq 0$ et $c_1 + c_2 \neq 0$. On désigne par A' le barycentre de $((B, a_1), (C, a_2))$, par B' le barycentre de $((C, b_1), (A, b_2))$ et par C' le barycentre de $((A, c_1), (B, c_2))$. Montrer que les trois points A', B' et C' sont alignés si et seulement si $a_1b_1c_1 = -a_2b_2c_2$.

b. Expliquer comment on peut adapter les six nombres $a_1, a_2, \ldots, c_2$, sans changer les positions des points A', B', C', pour obtenir les relations $a_1 + a_2 = 1$, $b_1 + b_2 = 1$ et $c_1 + c_2 = 1$.

c. En supposant maintenant ces relations vérifiées, donner une condition nécessaire et suffisante sur ces nombres pour que les isobarycentres des triangles (ABC) et $(A'B'C')$ soient confondus. [On pourra exprimer A', B', C' en coordonnées barycentriques par rapport a repère $\mathcal{S} = (A, B, C)$.]

d. Si ces deux isobarycentres sont confondus, A', B', C' peuvent ils être alignés comme dans la question *a* ?

2. Soit A, B deux points du plan, et p, q des entiers positifs. Décrire une méthode pour construire le barycentre (pondéré) de (A, p) et (B, q) à la règle et au compas. On a le droit de choisir des points ou des droites "libres", par exemple un point qui ne soit pas sur la droite (AB) ; bien évidemment la construction doit être correcte quel que soit ce choix. Indication: on pourra mettre en œuvre le théorème de Thalès.

3. On se place dans le plan affine noté $\mathcal{A}$. On se donne trois points A, B et C formant un triangle non aplati. On note :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \quad \text{le symétrique de } B \text{ par rapport à } C,\\
B_1 &= \quad \text{le symétrique de } C \text{ par rapport à } A,\\
C_1 &= \quad \text{le symétrique de } A \text{ par rapport à } B,\\
A_2 &= \quad \text{le point d'intersection de la droite } (BC) \text{ avec la droite } (B_1C_1),\\
B_2 &= \quad \text{le point d'intersection de la droite } (CA) \text{ avec la droite } (C_1A_1),\\
C_2 &= \quad \text{le point d'intersection de la droite } (AB) \text{ avec la droite } (A_1B_1).
\end{aligned}$$

a. Donner les coordonnées barycentriques de A_1, B_1 et C_1 dans le repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$.

b. Soit $\mathcal{E} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ la base de l'espace vectoriel $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$ qu'on peut associer au repère $\mathcal{S}$. Calculer le déterminant par rapport à cette base des vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}$: $\det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1})$.

c. Donner les coordonnées barycentriques de A_2, B_2 et C_2 dans le repère affine $\mathcal{S}$, et dans le repère affine $\mathcal{S}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ (on commencera par montrer que ces trois points sont non-alignés).

d. En déduire que les trois triangles (ABC), $(A_1B_1C_1)$ et $(A_2B_2C_2)$ ont même centre de gravité.

e. Donner un algorithme explicite de reconstruction du triangle (ABC) à partir du seul triangle $(A_1B_1C_1)$. On pourra se servir de la construction de la question **2**.

Fin.