Corrigé Examen, seconde session 6L19 : Géométrie 10 juin 2009
9h–12h

1. Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés. Dans cette question on donnera une preuve de ce résultat bien connu de la géométrie affine, sans utiliser un calcul en coordonnées. (Vous avez déjà pu voir différentes preuves du résultat, entre autres à l'examen de la première session, mais elles dépendaient, à un point ou un autre, de la caractérisation de l'alignement en termes de coordonnées des points.) On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ sur un corps K (qui contiendra les nombres rationnels $\mathbf{Q}$). Soit donc A, B, C trois points non alignés, qui déterminent trois droites $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{C,A}$, $\mathcal{D}_{A,B}$, et soit $\mathcal{D}$ une quatrième droite qui coupe chacune de ces trois droites, sans pourtant passer par l'un des points A, B, C ; on appelle P, Q, R les trois points d'intersection de telle façon que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{B,C} = \{P\}$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{C,A} = \{Q\}$, et $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{A,B} = \{R\}$. Les quatre droites forment ce qu'on appelle un quadrilatère complet ; on appelle diagonale du quadrilatère toute droite qui passe par précisément deux points parmi A, B, C, P, Q, R.

a. Argumenter (rapidement) que les points A, B, C, P, Q, R sont tous distincts, et conclure que le quadrilatère possède précisément trois diagonales.

$\surd$ *Les points A, B, C sont non alignés, donc distincts, et les points P, Q, R sont chacun distinct de A, B, C car il est donné que $\mathcal{D}$ ne passe pas par ces points. Finalement si deux points parmi P, Q, R étaient confondus, ce point serait sur deux des droites $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{C,A}$, $\mathcal{D}_{A,B}$ à la fois, donc parmi A, B, C, ce qu'on a déjà exclu. Comme chacune des droites $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{C,A}$, $\mathcal{D}_{A,B}$, $\mathcal{D}$ contient trois points parmi A, B, C, P, Q, R, elles ne sont pas des diagonales du quadrilatère ; les seules paires parmi ces points qui définissent une droite autre que les quatre mentionnées sont $\{A, P\}$, $\{B, Q\}$ et $\{C, R\}$, et les diagonales sont donc $\mathcal{D}_{A,P}$, $\mathcal{D}_{B,Q}$, et $\mathcal{D}_{C,R}$ (elles sont clairement distinctes).*

b. Les "milieux des diagonales", dont on veut prouver l'alignement, sont les points $K = \mathrm{bar}(A, P)$, $L = \mathrm{bar}(B, Q)$ et $M = \mathrm{bar}(C, R)$. On se servira des points auxiliaires K', L', M' obtenus respectivement de K, L, M en appliquant l'homothétie $h_{A,2}$ de centre A et de facteur 2. Donner des expressions pour les points K', L', M', et en déduire que $\mathcal{D}_{B,L'}$ et $\mathcal{D}_{R,M'}$ sont parallèles à $\mathcal{D}_{A,C}$, et que $\mathcal{D}_{Q,L'}$ et $\mathcal{D}_{C,M'}$ sont parallèles à $\mathcal{D}_{A,B}$.

c. On utilise ensuite des homothéties de centre P. Pourquoi existe-t-il de telles homothéties $h_{P,\lambda}$ et $h_{P,\mu}$, avec $\lambda, \mu \in K \setminus \{0, 1\}$, telles que $h_{P,\lambda}(B) = C$ et $h_{P,\mu}(Q) = R$?

d. On définit h comme la composée $h = h_{P,\mu} \circ h_{P,\lambda}$. Argumenter qu'on a également $h = h_{P,\lambda} \circ h_{P,\mu}$, c'est-à-dire que les homothéties $h_{P,\lambda}$ et $h_{P,\mu}$ commutent entre elles.

e. Montrer que $h(\mathcal{D}_{B,L'}) = \mathcal{D}_{R,M'}$ et que $h(\mathcal{D}_{Q,L'}) = \mathcal{D}_{C,M'}$. [Indication : utiliser le point *b*.]

f. En déduire que $h(L') = M'$. Conclure que K', L', M' sont alignés, et que K, L, M sont alignés.

2. Les "hauteurs" issues des projections des sommets d'un triangle sont concourantes. En géométrie euclidienne, on sait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Dans cette question on montrera, par un calcul en coordonnées, que cette propriété reste vraie quand les hauteurs sont remplacées par des droites qui leur sont parallèles, et passent non pas par les sommets du triangle, mais par leurs projections orthogonales sur une droite. Soit donc A, B, C trois point distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de direction $E = \overrightarrow{\mathcal{P}}$, et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ une droite quelconque. On note les projections orthogonales $A' = p_{\mathcal{D}}(A)$, $B' = p_{\mathcal{D}}(B)$ et $C' = h_{\mathcal{D}}(C)$, et on désignera par h'_A, h'_B et h'_C les "fausses hauteurs" : ce sont les droites caractérisées par $h'_A \perp \mathcal{D}_{B,C}$ et $A' \in h'_A$ respectivement par $h'_B \perp \mathcal{D}_{C,A}$ et $B' \in h'_B$ et par $h'_C \perp \mathcal{D}_{A,B}$ et $C' \in h'_C$.

a. Pour deux points P, Q du plan, donner une équation (en termes de vecteurs et du produit scalaire, et donc sans utiliser des coordonnées) qui exprime la condition que Q se trouve sur la droite orthogonal à $\mathcal{D}_{B,C}$ et passant par le point P.

$\surd$ *L'équation est simplement $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$.*

b. Montrer qu'on peut choisir un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \mathcal{E})$ (c'est-à-dire un repère cartésien avec la base $\mathcal{E}$ de E orthonormée) tel que la projection $p_\mathcal{D}$ s'exprime sous la forme $(y,z)_\mathcal{R} \mapsto (y,0)_\mathcal{R}$.

c. Avec un tel repère $\mathcal{R}$, soit $A = (y_1,z_1)_\mathcal{R}$, $B = (y_2,z_2)_\mathcal{R}$ et $C = (y_3,z_3)$. Trouver une équation de la forme $h'_A = \{\,(y,z)_\mathcal{R} \mid py + qz = r\,\}$, avec $p,q,r \in \mathbf{R}$ exprimés en fonction de y_1,z_1,y_2,z_2,y_3,z_3 [indication : traduire en coordonnées l'équation du point *a* pour $P = A'$.] Faire le même pour h'_B et h'_C (le raisonnement est pareil ; il suffira de donner le résultat).

$\surd$ *D'après la description en coordonnées de $p_\mathcal{D}$ on a $A' = (y_1,0)$, $B' = (y_2,0)$ et $C' = (y_3,0)$. Avec $P = A'$ et $Q = (y,z)_R$, l'équation $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$ devient $\langle (y-y_1,z)_\mathcal{E}, (y_3-y_2,z_3-z_2)_E \rangle$, et comme sur la base orthonormée $\mathcal{E}$ le produite scalaire prend sa forme habituelle, cela devient $(y-y_1)(y_3-y_2) + z(z_3-z_2) = 0$, soit $(y_3-y_2)y + (z_3-z_2)z = y_1(y_3-y_2)$, ce qui donne une équation de la forme cherchée avec $p = y_3-y_2$, $q = z_3-z_2$ et $r = y_1(y_3-y_2)$. Les deux autres équations demandées sont $h'_B = \{\,(y,z)_\mathcal{R} \mid (y_1-y_3)y + (z_1-z_3)z = y_2(y_1-y_3)\,\}$, ainsi que $h'_C = \{\,(y,z)_\mathcal{R} \mid (y_2-y_1)y + (z_2-z_1)z = y_3(y_2-y_1)\,\}$.*

d. Soit $\mathcal{S}$ le repère affine associé à $\mathcal{R}$, donc tel que les coordonnées barycentriques par rapport à $\mathcal{S}$ soient données par $(y,z)_\mathcal{R} = (1-y-z,y,z)_\mathcal{S}$. Traduire les équations du point précédent en équations *homogènes* en termes des coordonnées barycentriques, c'est-à-dire (pour le première) sous la forme $h'_A = \{\,(x,y,z)_\mathcal{S} \mid ax + by + cz = 0\,\}$ (avec sous-entendu $x+y+z = 1$). [Indication: cette dernière identité permet de remplacer les termes constants par des expressions homogènes.]

e. Montrer que h'_A, h'_B et h'_C sont concourantes ou parallèles.

f. Caractériser en termes des points A,B,C les cas où h'_A, h'_B et h'_C sont parallèles.

3. Une propriété du triangle orthique d'un triangle non rectangle. Soit Γ un cercle du plan affine euclidien $\mathcal{P}$, et A, B, C des points distincts de Γ, ne contenant pas une paire de points diamétralement opposés dans Γ. Soit A', B', C' les pieds des hauteurs du triangle A,B,C, c'est-à-dire les projections orthogonales des sommets respectifs A, B, C sur leur côté opposé du triangle.

a. Montrer que A', B', et C' sont distincts. Il forment alors ce qui est appelé le triangle orthique du triangle A,B,C (on verra par la suite que ce triangle ne peut pas être aplati).

b. Montrer que les points B, C', B', et C sont cocycliques (situés sur un même cercle de $\mathcal{P}$).

c. Soit $\mathcal{T}_A$ la droite tangente à Γ en A. Montrer l'égalité $(\widehat{\mathcal{T}_A, \mathcal{D}_{A,B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{A,C}, \mathcal{D}_{B,C}})$ d'angles de droites.

d. Montrer $(\widehat{\mathcal{D}_{A,C}, \mathcal{D}_{B,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{B',C'}, \mathcal{D}_{A,B}})$ (aussi une égalité d'angles de droites).

e. Conclure que $\mathcal{D}_{B',C'}$ est parallèle à $\mathcal{T}_A$. On admettra que de façon similaire $\mathcal{D}_{C',A'}$ et $\mathcal{D}_{A',B'}$ sont parallèles respectivement aux tangentes $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$ à Γ en B et en C.

f. Montrer que $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$ forment les côtés d'un triangle ; en déduire que A', B', et C' ne sont pas alignés (c'est-à-dire le triangle orthique n'est pas aplati).

g. [bonus] Montrer que le triangle de côtés $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$ est homothétique au triangle orthique A',B',C' (c'est-à-dire qu'il existe une homothétie qui transforme l'un en l'autre).

Fin.