Corrigé Examen 6L19 : Géométrie 16 mai 2008
9h00–12h00

1. Dans cette partie on étudie les différents cas qui peuvent se produire pour l'intersection de deux cercles distincts dans le plan. Soit $A, B \in \mathcal{P}$ deux points, et $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$; on considère les cercles $\Gamma = \mathcal{S}(A, r)$ et $\Gamma' = \mathcal{S}(B, s)$.

a. Supposons ici $A = B$ mais $r \neq s$. Pourquoi a-t-on $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$ dans ce cas ?

$\surd$ *Pour $P \in \Gamma \cap \Gamma'$ on aurait $r = d(A, P) = d(B, P) = s \neq r$, une contradiction.*

On suppose désormais $A \neq B$. Il est toujours possible que $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$, mais dans ce cas on n'a rien d'autre à ajouter. On suppose donc qu'on a un point $P \in \Gamma \cap \Gamma'$.

b. Si on a un autre point $Q \in \Gamma \cap \Gamma'$ (avec donc $Q \neq P$), montrer que $\mathcal{D}_{A,B}$ est la droite médiatrice de P et Q.

$\surd$ *On a $d(Q, A) = r = d(P, A)$ et $d(Q, B) = s = d(P, B)$, donc A et B sont bien sur la droite médiatrice de P et Q ; comme $A \neq B$ cette droite ne peut être autre chose que $\mathcal{D}_{A,B}$.*

c. Conclure que $\Gamma \cap \Gamma'$ ne contient pas plus que deux points, et que $\Gamma \cap \Gamma' = \{P\}$ si et seulement si les points A, B et P sont alignés. Dans ce dernier cas les cercles Γ, Γ' sont dits *tangents* en P.

$\surd$ *Avec P fixé, il existe au plus qu'un seul point Q tel que $\mathcal{D}_{A,B}$ soit la droite médiatrice de P et Q, et c'est l'image de P par la réflexion orthogonale en $\mathcal{D}_{A,B}$, si elle est distincte de P. Elle est distinct de P si et seulement si $P \notin \mathcal{D}_{A,B}$, et dans ce cas on a effectivement $Q \in \Gamma \cap \Gamma'$, car la réflexion considérée est une isométrie qui fixe A et B, donc $d(Q, A) = d(P, A) = r$ et $d(Q, B) = d(P, B) = s$. Dans le cas contraire A, B et P sont alignés, et on a montré que $\Gamma \cap \Gamma'$ ne peut pas contenir un point $Q \neq P$ (P ne peut appartenir à sa propre médiatrice avec un autre point), donc $\Gamma \cap \Gamma' = \{P\}$. [Beaucoup ont eu du mal à exprimer clairement pourquoi il ne peut pas y avoir plus que deux points. Dans un tel cas, pensez à formuler clairement le fait dont vous voudriez vous servir ; ici c'est "si $\mathcal{D}$ est à la fois médiatrice de P, Q et de P, R, alors $Q = R$" (il faut d'ailleurs que $P \neq Q$ et $P \neq R$ pour qu'une telle médiatrice existe). Si vous essayez de voir pourquoi c'est vrai, vous verrez qu'on veut dire que P et $\mathcal{D}$ déterminent Q, et en effet Q est l'image de P par réflexion dans $\mathcal{D}$. Cela est évident dans un dessin, mais aussi évoqué dans le cours et les TD, et facile à prouver en cas de doute (l'image est le seul autre point sur $P + (\overrightarrow{\mathcal{D}})^{\perp}$ à la même distance de $\mathcal{D}$ que P). De grâce, ne dites pas que si $\Gamma \cap \Gamma' = \{P\}$ alors $Q = P$ dans le point b : il est* **clairement** *indiqué dans ce point que $Q \neq P$. Si $P = Q$, ils n'ont pas de médiatrice. On n'est plus dans le point b.]*

2. Dans cette partie on étudie les possibilités pour les longueurs des trois côtés d'un triangle dans le plan. On entendra ici (exceptionnellement) par « triangle » toute donnée de trois points dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$; dans le cas où ces points sont alignés, on dira que le triangle est « aplati ».

a. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}$; on pose $p = d(A, B)$, $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$. Montrer que $p \leq q + r$.

$\surd$ *On a $p = \|\overrightarrow{AB}\|$, $q = \|\overrightarrow{AC}\|$ et $r = \|\overrightarrow{BC}\|$. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ d'après Chasles, et dans un espace vectoriel euclidien on a l'inégalité $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, soit $p \leq q + r$ pour $x = \overrightarrow{AC}$ et $y = \overrightarrow{CB}$.*

b. Montrer qu'on a même $|q - r| \leq p \leq q + r$, qu'on appelle les « inégalités triangulaires ».

$\surd$ *On obtient de façon similaire $q \leq p + r$ soit $q - r \leq p$, et $r \leq p + q$ soit $r - q \leq p$, donc $|q - r| \leq p$. Déduites d'un ensemble symétrique d'inégalités, ces inégalités sont symétriques par rapport à p, q, r.*

Ces inégalités sont équivalentes à $|r-p| \leq q \leq r+p$ ou encore à $|p-q| \leq r \leq p+q$ (on ne demande pas une démonstration), donc malgré les apparences elles sont symétriques par rapport à p, q, r.

c. On suppose $B \neq A \neq C$, et on fixe une orientation du plan $\mathcal{P}$. Soit $\phi \in \mathbf{R}$ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Montrer que

$$\cos \phi = \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}.$$

[Indication : on pourra choisir une base de E convenable et calculer en coordonnées.]

√ *Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormale directe de E dans laquelle $\vec{u}$ est le vecteur unitaire $\overrightarrow{AB}/p$. Alors $\overrightarrow{AB} = (p, 0)_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{AC} = (q\cos\phi, q\sin\phi)_{\mathcal{B}}$ (le point à distance q sur la demi-droite engendrée par l'image de $\vec{u}$ par la rotation par ϕ), et on a*

$$r^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \langle \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \rangle = p^2 + q^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = p^2 + q^2 - 2pq\cos\phi,$$

dont il découle directement $\cos\phi = \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}$ (on peut noter que $B \neq A \neq C$ implique $pq \neq 0$).

[On pourrait également déduire l'équation de la relation $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ vue en cours. Pour $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ cela ramène à montrer que $2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = p^2+q^2-r^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$, ce qui relève d'un calcul vectoriel élémentaire.]

On fixe maintenant $p, q, r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ vérifiant les inégalités triangulaires ; on cherche à montrer que réciproquement il existe un triangle A, B, C tel que $p = d(A,B)$, $q = d(A,C)$ et $r = d(B,C)$. On choisit $A \in \mathcal{P}$ quelconque, et $B \in \mathcal{S}(A,p)$. Ainsi $d(A,B) = p$ est déjà vérifié.

d. On suppose $p, q > 0$. Déduire des inégalités triangulaires que

$$-1 \leq \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq} \leq +1,$$

et montrer que ces dernières inégalités seront strictes $-1 < \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq} < 1$ si et seulement si on a les inégalités triangulaires strictes : $|q-r| < p < q+r$.

√ *Les inégalités demandés sont équivalentes à $-2pq \leq p^2+q^2-r^2 \leq 2pq$ car p et q sont strictement positifs, ou encore à $r^2 \leq (p+q)^2$ et $(p-q)^2 \leq r^2$. Elles sont alors une conséquence de la version équivalente $|p-q| \leq r \leq p+q$ des inégalités triangulaires. Le même argument peut être appliqué avec '$\leq$' remplacé par '$<$'. Finalement il est aussi clair que les inégalités triangulaires strictes sont nécessaires pour avoir $r^2 < (p+q)^2$ et $(p-q)^2 < r^2$: si on avait $p = r-q$ on aurait $r^2 = (p+q)^2$ et si on avait $p = q-r$ ou $p = q+r$ alors on aurait $(p-q)^2 = r^2$.*

[Malgré la ressemblance à la formule du point précédent, toute réponse mentionnant $\cos\phi$ est certainement fausse : ϕ avait été introduit comme un angle concernant les points A, B, C, et ici on cherche à trouver de tels points (notamment C), donc ϕ n'est plus défini (en revanche, si les inégalités demandées sont vérifiées, il y aura un candidat pour l'angle ϕ, qui permettra de trouver C, comme il est fait dans le point suivant). La mention de "réciproquement" et "Déduire des inégalités triangulaires" vous signalaient l'inversion de la direction de l'argument.]

e. Montrer que si $|q-r| < p < q+r$, alors il existe précisément deux choix différents pour $C \in \mathcal{P}$ tels que A, B, C forme un triangle non aplati avec $q = d(A,C)$ et $r = d(B,C)$.

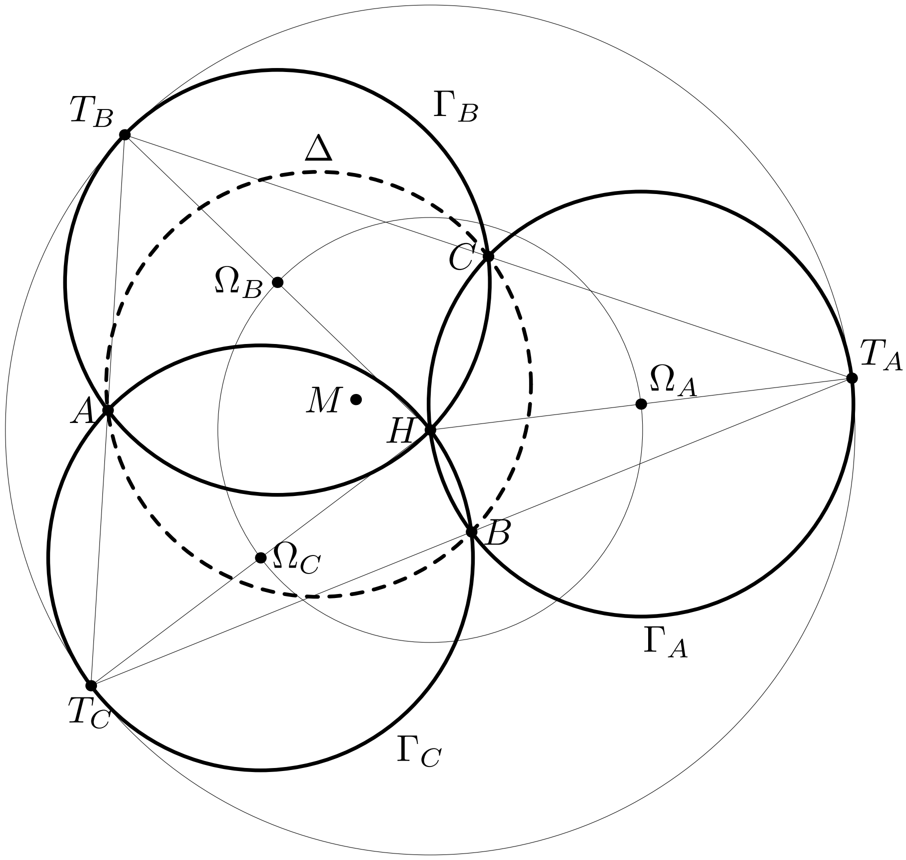
√ *D'après la question précédente on peut définir $\phi = \arccos\left(\frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}\right)$, qui sera dans l'intervalle ouvert $(0, \pi)$. D'après la question c, pour tout C vérifiant $q = d(A,C)$ et $r = d(B,C)$ la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sera alors congruent à $+\phi$ ou à $-\phi$ modulo 2π, donc un tel triangle A, B, C n'est jamais aplati. En prenant $C = A + q\rho_\phi(\vec{u})$, où ρ_ϕ est la rotation par ϕ dans le plan vectoriel euclidien orienté E, on aura*

$$\frac{p^2+q^2-d(B,C)^2}{2pq} = \cos\phi = \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}$$

dont on déduit facilement $d(B,C) = r$, prouvant l'existence d'un triangle A, B, C convenable. Ce point C est un point de l'intersection $\mathcal{S}(A,q) \cap \mathcal{S}(B,r)$, et comme A, B, et C ne sont pas alignés, cette intersection contient exactement un autre point d'après la question **1***c, et ce point fournit l'autre possibilité pour C. (On voit facilement que c'est le point $C' = A + q\rho_\phi^{-1}(\vec{u})$.)*

3. Dans cet exercice on démontre le «théorème de Johnson» (ou «théorème de Clifford» dans le monde francophone), dont une formulation informelle est: si trois cercles du même rayon r passent par un point commun, alors il existe un quatrième cercle du même rayon r qui passe par leurs trois autres points d'intersection.

On fixe un point $H \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $r > 0$, et trois points distincts $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ du cercle $\mathcal{S}(H, r)$. On considère les trois autres cercles suivants, qui sont du même rayon : $\Gamma_A = \mathcal{S}(\Omega_A, r)$, $\Gamma_B = \mathcal{S}(\Omega_B, r)$, et $\Gamma_C = \mathcal{S}(\Omega_C, r)$. Comme les rôles des trois cercles sont parfaitement symétriques, tout ce qui sera montré pour un cercle, ou pour une paire de cercles, sera aussi vrai pour les autres cercles/paires de cercles ; dans ces cas *ne répétez pas* la démonstration (trois fois).



a. Montrer que H est situé sur chacun des cercles Γ_A, Γ_B, et Γ_C.

$\surd$ *Par définition de $\mathcal{S}(H, r)$, on a $d(\Omega_A, H) = d(\Omega_B, H) = d(\Omega_C, H) = r$ ce qui donne directement $H \in \Gamma_A$, $H \in \Gamma_B$, et $H \in \Gamma_C$. [Ce qui n'a pas empêché certains de remplir une demie page ; bravo.]*

b. Soit $A = H + \overrightarrow{H\Omega_B} + \overrightarrow{H\Omega_C}$. Montrer que $\Gamma_B \cap \Gamma_C = \{H, A\}$ (où il est possible que $A = H$).

$\surd$ *On a $d(A, \Omega_B) = \|\overrightarrow{H\Omega_C}\| = d(H, \Omega_C) = r$ et également $d(A, \Omega_C) = d(H, \Omega_B) = r$, et donc $A \in \Gamma_B \cap \Gamma_C$. Comme deux cercles distincts ne peuvent avoir plus que deux points communs (démontré dans la partie **1**), il est clair que $\Gamma_B \cap \Gamma_C = \{H, A\}$ si $A \neq H$. Dans le cas restant $A = H$ on a $\overrightarrow{H\Omega_B} + \overrightarrow{H\Omega_C} = 0$, donc $H \in \Gamma_B \cap \Gamma_C$ est aligné avec Ω_B et Ω_C, et dans ce cas $\Gamma_B \cap \Gamma_C$ est réduit à un seul point (**1**c), donc $\Gamma_B \cap \Gamma_C = \{H\} = \{H, A\}$.*
[La partie $A = H$ est vraiment nécessaire, car l'argument "au plus deux points dans l'intersection" ne marche pas dans ce cas. Beaucoup l'ont oubliée.]

On pose également $B = \Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_C} = \Omega_C + \overrightarrow{H\Omega_A}$ et $C = \Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_B} = \Omega_B + \overrightarrow{H\Omega_A}$, de sorte que, de façon similaire, on ait $\Gamma_A \cap \Gamma_C = \{H, B\}$ et $\Gamma_A \cap \Gamma_B = \{H, C\}$.

c. Soit $h_{H,2} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'homothétie de centre H et de rapport 2. Montrer que le cercle $\mathcal{S}(H, 2r)$ est tangent à chacun des cercles Γ_A, Γ_B, et Γ_C (voir **1**c), en leurs points diamétralement opposés à H, c'est-à-dire en $T_A = h_{H,2}(\Omega_A)$ respectivement en $T_B = h_{H,2}(\Omega_B)$, et en $T_C = h_{H,2}(\Omega_C)$.

$\surd$ *Comme $\Omega_A = \mathrm{bar}(H, T_A)$, le point T_A est effectivement sur Γ_A, diamétralement opposé à H. Comme $d(H, h_{H,2}(\Omega_A)) = 2d(H, \Omega_A) = 2r$, il est aussi sur $\mathcal{S}(H, 2r)$, et il est aligné avec les centres Ω_A, H des deux cercles. L'énoncé du point précédent s'applique et les deux cercles sont tangents en T_A. Les arguments pour T_B et T_C sont similaires.*

d. Montrer que $C = \mathrm{bar}(T_A, T_B)$ (et on aura donc aussi $A = \mathrm{bar}(T_B, T_C)$ et $B = \mathrm{bar}(T_A, T_C)$).

$\surd$ *On a* $C = H + \overrightarrow{H\Omega_A} + \overrightarrow{H\Omega_A} = H + \frac{1}{2}(\overrightarrow{HT_A} + \overrightarrow{HT_B}) = \mathrm{bar}((T_A, 1), (T_B, 1)) = \mathrm{bar}(T_A, T_B)$, *car dans le cours il est montré qu'un barycentre peut être déterminé par la formule* $\mathrm{bar}((X, \lambda), (Y, \mu)) = P + \frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda\overrightarrow{PX} + \mu\overrightarrow{PY})$ *pour P quelconque (ici avec $P = H$, $X = T_A$, $Y = T_B$ et $\lambda = \mu = 1$).*

[Il est assez remarquable que presque tout le monde a calculé le barycentre de la question suivante par un simple calcul vectoriel, mais très peu ont essayé un calcul vectoriel pour cette question ci, qui est plus simple. On peut retenir : pour une question concernant de barycentres, on n'a en général pas besoin des notions euclidiennes.]

e. Soit $M = \mathrm{bar}(T_A, T_B, T_C)$. Montrer que $h_{M,-\frac{1}{2}}(T_A) = A$, $h_{M,-\frac{1}{2}}(T_B) = B$, et $h_{M,-\frac{1}{2}}(T_C) = C$.

$\surd$ *On a, par associativité du barycentre,* $M = \mathrm{bar}((T_A, 1), (\mathrm{bar}(T_B, T_C), 2)) = \mathrm{bar}((T_A, 1), (A, 2))$, *donc* $\overrightarrow{MT_A} + 2\overrightarrow{MA} = 0$ *et* $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MT_A}$, *ce qui implique* $h_{M,-\frac{1}{2}}(T_A) = A$.

f. Montrer qu'il existe une homothétie de rapport -1 qui envoie le triangle $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ vers le triangle A, B, C (il n'est pas demandé de déterminer le centre de cette homothétie).

$\surd$ *La composée* $h_{M,-\frac{1}{2}} \circ h_{H,2}$ *envoie* $\Omega_A \mapsto h_{M,-\frac{1}{2}}(T_A) = A$ *et de façon similaire* $\Omega_B \mapsto B$ *et* $\Omega_C \mapsto C$. *Or l'application linéaire associée est égal à* $-\frac{1}{2}I. \cdot 2I = -I$, *donc il s'agit d'une homothétie de rapport -1 (résultat établi en TD : toute homothétie-translation dont l'application linéaire associée est λI avec $\lambda \neq 1$ est une homothétie de rapport λ).*

g. Conclure que les points A, B, C sont situés sur un cercle Δ du même rayon r que les cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C. C'est le théorème de Johnson.

$\surd$ *Une homothétie de rapport -1 est une isométrie, et l'image sous cette isométrie du cercle $\mathcal{S}(H, r)$ passant par $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ est une cercle du même rayon passant par les images A, B, C.*

h. Montrer que H est l'orthocentre du triangle A, B, C.

$\surd$ *La droite médiatrice de T_B et T_C (des points distincts, car les images par $h_{H,2}$ des points distincts Ω_B, Ω_C) passe par les points H (à distance $2r$ de chacun) et A (leur milieu), et elle est orthogonal à $\mathcal{D}_{T_B,T_C}$, et donc à son image par homothétie $\mathcal{D}_{B,C}$. Cette droite est donc la hauteur du triangle A, B, C passant par A. De façon similaire les deux autres médiatrice des côtés de T_A, T_B, T_C sont des hauteurs du triangle A, B, C, et elles passent tous par H, qui est donc l'orthocentre de ce triangle.*

[Au lieu de considérer la médiatrice de T_B et T_C beaucoup ont considéré la médiatrice de H et A (se souvenant de **1***c). Cela est possible, mais nécessite considération séparée dus cas $H = A$ où cette médiatrice n'existe pas, cas très simple mais qui est le plus souvent oublié.]*

i. Montrer que le cercle Δ (c'est-à-dire le cercle circonscrit du triangle A, B, C) est l'image de Γ_A par la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}_{B,C}$ (il est aussi l'image de Γ_B par la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}_{A,C}$, et l'image de Γ_C par la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}_{A,B}$).

$\surd$ *Le cercle est Δ de rayon r et passe par B et C, donc c'est soit le cercle Γ_A, soit son image par la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}_{B,C}$. Or $A \in \Delta$, donc si $A \notin \Gamma_A$, cela prouve déjà que Δ est l'image de Γ_A par cette réflexion. Mais A est sur les cercles Γ_B et Γ_C, et leurs intersections avec Γ_A sont respectivement $\{H, B\}$ et $\{H, C\}$, et A, B, C sont distincts (car le triangle A, B, C est congruent avec $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$) donc le seul cas où $A \in \Gamma_A$ est quand $H = A$. Mais dans ce cas $\overrightarrow{H\Omega_B} = -\overrightarrow{H\Omega_C}$, et Ω_A est alors aligné avec $B = \Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_C}$ et $C = \Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_B}$; par conséquent Γ_A est dans ce cas égal à son image par la réflexion mentionnée, et donc à Δ. [Une preuve plus simple peut être donnée en remarquant que $\Gamma_A = \mathcal{S}(\Omega_A, r)$ et $\Delta = \mathcal{S}(\Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_B} + \overrightarrow{H\Omega_C}, r)$. Le fait que le point $\Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_B} + \overrightarrow{H\Omega_C} = H + \overrightarrow{H\Omega_A} + \overrightarrow{H\Omega_B} + \overrightarrow{H\Omega_C}$ est à distance r de A, B, C est un calcul aussi simple que dans la question b, et donne une preuve du théorème de Johnson évitant les autres considérations ci-dessus. . . , encore une victoire pour le calcul vectoriel.]*

Fin.