Examen 3L05 : Algèbre Multilinéaire mardi 10 janvier 2012
14h–17h

Les documents ne sont pas autorisés.

La partie 1 prépare quelques calculs qui seront utilisés dans la partie 2.
La partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

Barème indicatif: 12 points pour les parties 1 et 2 ensemble, 8 points pour la partie 3.

On rappelle que pour une matrice A de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps K, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme unitaire $\det(XI_n - A)$.

1. *a.* Soit $P \in \mathcal{M}(3, \mathbf{R})$ la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est inversible, et calculer son inverse.

b. On considère les deux polynômes $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, et $X - 2$, dans $\mathbf{R}[X]$. Trouver des polynômes S et T dans $\mathbf{R}[X]$ tels que l'égalité $S(X-1)^2 + T(X-2) = 1$ soit vérifiée.

2. Soit $A \in \mathcal{M}(3, \mathbf{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbf{R}^3$.

a. Montrer que le polynôme caractéristique χ de u est de la forme $\chi(X) = (X-a)^2(X-b)$, expliciter a et b.

b. Déterminer le polynôme minimal de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

On note $C_a = \mathrm{Ker}((u - aI_3)^2)$, $V_a = \mathrm{Ker}(u - aI_3)$, et $V_b = \mathrm{Ker}(u - bI_3)$.

c. Expliquer pourquoi on a $\mathbf{R}^3 = C_a \oplus V_b$, et $V_a \subseteq C_a$. Donner la dimension de C_a, V_a et V_b.

d. D'après la question précédente il existe des vecteurs dans $C_a - V_a$. Montrer que si $\varepsilon_2 \in C_a - V_a$ et $\varepsilon_3 \in V_b - \{0\}$, et si l'on pose $\varepsilon_1 = u(\varepsilon_2) - a\varepsilon_2$, alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

e. Soit P la matrice de passage $M_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Que vaut $P^{-1}AP$ (sans calcul explicite)?

f. Les descriptions ci-dessus permettent de choisir

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Que vaut P avec ces choix? Retrouver $P^{-1}AP$ avec un calcul explicite.

g. Soient $S, T \in \mathbf{R}[X]$ comme dans la question b de l'exercice **1**, montrer que $\pi_2 = S(u) \circ (u - aI_3)^2$ est la projection de $\mathbf{R}^3 = C_a \oplus V_b$ sur le second facteur V_b, et que $\pi_1 = T(u) \circ (u - bI_3)$ est la projection de $\mathbf{R}^3 = C_a \oplus V_b$ sur le premier facteur C_a. Cela veut dire que si $x \in \mathbf{R}^3$ est écrit $x = c_a + v_b$ avec $c_a \in C_a$ et $v_b \in V_b$ (ce qui est possible de façon unique), alors on aura $\pi_2(x) = v_b$ et $\pi_1(x) = c_a$. Il suffit pour π_2 de montrer séparément que $\pi_2(c_a) = \vec{0}$ pour tout $c_a \in C_a$ et que $\pi_2(v_b) = v_b$ pour tout $v_b \in V_b$; une remarque similaire s'applique à π_1.

continué au verso

3. Soit $c \in \mathbf{C}$ une constante, et ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

a. Soit

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3$$

le premier vecteur de la base canonique. Montrer que les trois vecteurs v, $\phi(v)$, $\phi^2(v)$ forment une famille libre (quel que soit c).

b. En déduire que si $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme non nul tel que l'évaluation $P(\phi)$ de P en ϕ est (l'endomorphisme) nul, alors $\deg(P) \geq 3$.

c. Trouver un polynôme unitaire P de degré 3 tel que $P(\phi)(v) = 0 \in \mathbf{C}^3$, et montrer que P est le polynôme minimal de ϕ.

d. Montrer que -1 est une valeur propre de ϕ, quel que soit c, et trouver (c'est-à-dire l'exprimer en fonction de la constante c) un vecteur propre pour cette valeur propre $\lambda = -1$.

e. Dans cette question on fixe $c = 3$. Montrer que ϕ est alors diagonalisable, et trouver une base de $\mathbf{C}^3$ constituée de vecteurs propres.

f. Déterminer l'ensemble de valeurs de la constante c pour lesquelles ϕ *n'est pas* diagonalisable.

g. Pour toutes les valeurs particulières de c trouvées dans la question précédente (où donc ϕ n'est pas diagonalisable), déterminer les valeurs propres λ de ϕ, ainsi que les sous-espaces caractéristiques associés (on rappelle que le sous-espace caractéristique pour λ est $\mathrm{Ker}((\lambda\,\mathrm{id} - \phi)^m)$, où l'entier m est suffisamment grand ; la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal, celle de λ comme racine du polynôme caractéristique, ou encore la dimension de l'espace vectoriel (ici $m = 3$) sont tous les trois garantis d'être suffisamment grand.)

Fin.