Contrôle continu 3L05 : Algèbre Multilinéaire jeudi 3 novembre 2011
8h15–11h15

Les documents ne sont pas autorisés. Les parties sont indépendantes. Les faits énoncés dans une question peuvent être utilisés dans les questions suivantes, que vous les ayez démontrés ou non.

Quand une question nécessite la résolution d'un système d'équations linéaires, il suffira de donner la solution, sans sa dérivation complète.

1. Soir $E = C^\infty(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et F son sous-espace engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto e^x$, $f_1 : x \mapsto xe^x$, et $f_2 : x \mapsto x^2e^x$.

a. Montrer que f_0, f_1, f_2 forment une famille libre. Quelle est $\dim(F)$?

b. Soit $\delta : E \to E$ l'application qui à f associe la fonction $x \mapsto (x+1)(f'(x) - f(x))$. Vérifier que δ est une application linéaire.

c. Calculer $\delta(f_0)$, $\delta(f_1)$ et $\delta(f_2)$, et conclure que le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ est δ-stable.

On note ϕ l'endomorphisme de l'espace vectoriel F obtenu par restriction de δ.

d. Trouver la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base $\mathcal{B} = [f_0, f_1, f_2]$ de F.

e. Montrer que 0, 1 et 2 sont des valeurs propres de ϕ, et trouver des vecteurs propres correspondants. Y a-t il d'autres valeurs propres ?

f. Spécifier une base de diagonalisation de ϕ, et la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ et cette base de diagonalisation.

g. Trouver la matrice inverse P^{-1} (il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure, ce qui rend son calcul plus facile). Vérifier qu'on ait $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale convenable.

h. Exprimer la puissance M^n pour $n \in \mathbf{N}^*$ explicitement en fonction de n (c'est-à-dire donner des expressions en n pour tous ses coefficients).

2. Soit E l'ensemble des suites infinies $a = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ avec $a_i \in \mathbf{R}$ et $a_{i+2} = a_{i+1} - 2a_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. On considère E comme sous-ensemble du $\mathbf{R}$-espace vectoriel F des suites infinies à termes dans $\mathbf{R}$, avec l'addition et la multiplication scalaire définies de la façon habituelle (terme par terme). Il est clair qu'une suite $a \in E$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes a_0, a_1, en utilisant la relation de récurrence pour déterminer successivement les autres termes.

a. Montrer que si $a, b \in E$ et $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ alors $\mu a + \nu b \in E$, et en déduire que E est un sous-espace vectoriel de F.

Une conséquence de cette propriété est que, pour vérifier qu'une suite s de E s'écrit comme combinaison linéaire $\mu a+\nu b$ de $a, b \in E$, il suffit de vérifier que les deux premiers termes de s et de $\mu a+\nu b$ sont les mêmes, car $\mu a + \nu b$ est déterminé, en tant que élément de E, par ces deux termes.

b. Montrer que les suites $\mathbf{b}_0 \in E$ aux termes initiaux $1, 0$, et $\mathbf{b}_1 \in E$ aux termes initiaux $0, 1$, forment une base de E.

c. Calculer les 10 premiers termes de la suite $\mathbf{b}_0$, ainsi que ceux de la suite $\mathbf{b}_1$.

d. Soit D l'opération de décalage $(a_i)_{i\in\mathbf{N}} \mapsto (a_{i+1})_{i\in\mathbf{N}}$, définie sur E (elle consiste à supprimer le premier terme de la suite, et chaque terme restant prend la place du terme précédent). Montrer que D est un endomorphisme de E.

e. Montrer que vecteurs propres éventuels v de D avec valeur propre λ sont nécessairement des suites géométriques de raison λ, c'est-à-dire de terme général $v_n = c\lambda^n$ avec $c \neq 0$ constant.

f. Formuler une équation en $\lambda \in \mathbf{R}$ que doivent vérifier les valeurs propres λ de D, et en déduire que de telles valeurs propres n'existent pas. Montrer que pour le $\mathbf{C}$-espace vectoriel E' des suites à termes *complexes* qui vérifient la même relation de récurrence, l'endomorphisme avec la même définition que D possède deux valeurs propres complexes, qu'on spécifiera.

g. Trouver des vecteurs propres (dans E') pour les valeurs propres trouvées dans la question précédente.

h. Soit $a \in E$ la suite de termes initiaux $a_0 = 1$, $a_1 = 1$. Trouver à l'aide de la question précédente une expression pour le terme général de a.

Fin.