Contrôle continu 3L05 : Algèbre Multilinéaire 5 novembre 2010
13h00–16h00

Les documents ne sont pas autorisés. Les parties sont indépendantes. Les faits énoncés dans une question peuvent être utilisés dans les questions suivantes, que vous les ayez démontrés ou non.

Quand une question nécessite la résolution d'un système d'équations linéaires, il suffira de donner la solution, sans sa dérivation complète.

1. Soit E l'ensemble des suites infinies $a = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ avec $a_i \in \mathbf{Q}$ et $a_{i+2} = 3a_i + 2a_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

a. Montrer que si $a, b \in E$ et $\mu, \nu \in \mathbf{Q}$ alors $\mu a + \nu b \in E$ (il s'agit de la suite de terme générale $\mu a_i + \nu b_i$), et en déduire que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{Q}$ (abrégé : un $\mathbf{Q}$-espace).

b. Quelle est la dimension du $\mathbf{Q}$-espace E ? Justifier votre réponse.

c. Soit D l'opération de décalage $(a_i)_{i\in\mathbf{N}} \mapsto (a_{i+1})_{i\in\mathbf{N}}$, définie sur E. Montrer que D est un endomorphisme de E.

d. Quelle est la nature des vecteurs propres éventuels de D ?

e. Formuler une équation en $\lambda \in \mathbf{Q}$ qui caractérise les valeurs propres de D.

f. Trouver ces valeurs propres, ainsi qu'une base de E formée de vecteurs propres de D.

g. Soit $c \in E$ la suite de termes initiaux $c_0 = 1$, $c_1 = 2$. Trouver une expression pour le terme général de c.

2. Dans cet exercice on se place dans l'espace $\mathbf{R}_3[X]$ des polynômes en X à coefficients réels, et de degré au plus 3; c'est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, dont on connaît la base $\mathcal{E}$ (dite canonique) formée des monômes $X^0 = 1$, X, X^2, et X^3. Soit $p \in \mathrm{End}(\mathbf{R}_3[X])$ la projection sur $\mathrm{Vect}(X^2, X^3)$ parallèle à $\mathrm{Vect}(1, X)$, c'est-à-dire $p(c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3) = c_2X^2 + c_3X^3$, et $d \in \mathrm{End}(\mathbf{R}_3[X])$ l'opération de différentiation par rapport à X. On s'intéresse ici à leur somme $f = p + d \in \mathrm{End}(\mathbf{R}_3[X])$.

a. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$ des monômes.

b. Calculer les matrices, dans la même base, des puissances f^i de f pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$. [Prenez le temps de vérifier vos calculs; ils ne sont pas difficiles, mais une erreur éventuelle rendrait la suite de cet exercice plus compliquée voire impossible.]

c. Donner un argument qui montre que f^0, f^1, f^2 et f^3 forment une famille libre. [Indication: pour chacun on trouvera facilement un coefficient non nul de sa matrice à un endroit où les matrices précédentes ont toutes un coefficient nul.] Montrer ensuite qu'en joignant f^4 à cette famille elle devient liée, et en déduire le polynôme minimal de f.

d. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Trouver les valeurs propres de f, et pour chaque valeur propre λ une base du sous-espace propre associé à λ.

e. Étendre pour chaque λ cette base à une base de l'espace propre généralisé de f pour λ (c'est-à-dire de $\mathrm{Ker}((f - \lambda\,\mathrm{Id})^m)$, où et m la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal).

f. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, pour la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}_3[X]$ obtenue comme la réunion des bases trouvées dans la question précédente (on les prendra dans l'ordre croissant des valeurs propres).

g. Est-ce que $\mathrm{Ker}(f^i)$ et $\mathrm{Im}(f^i)$ sont en somme directe pour $i = 1$? pour $i = 2$? et pour $i > 2$?

3. Soit $d \in \mathbf{N}$ et $E = \mathbf{C}_d[X]$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes en X de degré au plus d. Pour $a \in \mathbf{C}$ soit $t_a : E \to E$ l'application qui consiste à substituer $X + a$ pour X dans les polynômes $P \in \mathbf{C}_d[X]$. On admettra que t_a est une application linéaire, et que $t_{-a}(t_a(P)) = P$ pour tout $P \in E$ (car cela revient à substituer $(X - a) + a = X$ pour X) ; donc t_a est un endomorphisme inversible de E.

a. Pour $a \in \mathbf{C}$ fixé, montrer que les polynômes $\big((X + a)^k\big)_{k=0,1,\ldots,d}$ forment une base de E.

b. Soit $M = (M_{i,j})_{0\le i,j\le d}$ la matrice de passage de la base $\big(X^k\big)_{k=0,1,\ldots,d}$ de E à $\big((X+a)^k\big)_{k=0,1,\ldots,d}$. À l'aide de la formule du binôme, trouver une expression pour les coefficients $M_{i,j}$ de M.

c. Donner de façon similaire une expression pour les coefficients de M^{-1}.

continué au verso

$d.$ Déduire des résultats précédents que les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ vérifient la relation suivante:

$$\sum_{j=i}^{k}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\binom{k}{j} = \delta_{i,k} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } 0 \leq i, k \leq d.$$

Fin.