Corrigé Contrôle continu 3L05 : Algèbre Multilinéaire 5 novembre 2010
13h00–16h00

1. Soit E l'ensemble des suites infinies $a = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ avec $a_i \in \mathbf{Q}$ et $a_{i+2} = 3a_i + 2a_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

a. Montrer que si $a, b \in E$ et $\mu, \nu \in \mathbf{Q}$ alors $\mu a + \nu b \in E$ (il s'agit de la suite de terme générale $\mu a_i + \nu b_i$), et en déduire que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{Q}$ (abrégé : un $\mathbf{Q}$-espace).

$\surd$ *On admet que l'ensemble S de toutes les suites infinies à termes dans $\mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Q}$-espace (en fait, l'ensemble de toutes les fonctions $X \to K$ est un K-espace vectoriel, quel que soit l'ensemble X; on l'applique ici avec $X = \mathbf{N}$ et $K = \mathbf{Q}$). On a $(\mu a + \nu b)_{i+2} = \mu a_{i+2} + \nu b_{i+2} = 3\mu a_i + 2\mu a_{i+1} + 3\nu b_i + 2\nu b_{i+1} = 3(\mu a + \nu b)_i + 2(\mu a + \nu b)_{i+1}$, donc toute combinaison $\mathbf{Q}$-linéaire d'éléments de E est encore dans E, qui est ainsi un $\mathbf{Q}$-sous-espace de S, et donc un $\mathbf{Q}$-espace.*

b. Quelle est la dimension du $\mathbf{Q}$-espace E ? Justifier votre réponse.

$\surd$ *L'application $\phi : ((a_i)_{i\in\mathbf{N}}) \mapsto (a_0, a_1)$ est clairement une application linéaire $E \to \mathbf{Q}^2$, et pour tout $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$ il existe une suite unique $a \in E$ avec $\phi(a) = (x, y)$ (on a $a_0 = x$ et $a_1 = y$, et les relations $a_{i+2} = 3a_i + 2a_{i+1}$ permettent d'en déduire successivement tous les autres termes), donc ϕ est bijectif ; par conséquent ϕ est un isomorphisme linéaire, de $\dim(E) = \dim(\mathbf{Q}^2) = 2$.*

c. Soit D l'opération de décalage $(a_i)_{i\in\mathbf{N}} \mapsto (a_{i+1})_{i\in\mathbf{N}}$, définie sur E. Montrer que D est un endomorphisme de E.

$\surd$ *Le fait que $D(\mu a + \nu b) = \mu D(a) + \nu D(b)$ relève d'une simple vérification. Pour voir que $a \in E$ entraîne $D(a) \in E$ il suffit de calculer $D(a)_{i+2} = a_{i+3} = 3a_{i+1} + 2a_{i+2} = 3D(a)_i + 2D(a)_{i+1}$.*

d. Quelle est la nature des vecteurs propres éventuels de D ?

$\surd$ *Si $D(a) = \lambda a$ pour $\lambda \in \mathbf{Q}$, alors $a_{i+1} = \lambda a_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, ce qui veut dire que a est une suite géométrique de raison λ.*

e. Formuler une équation en $\lambda \in \mathbf{Q}$ qui caractérise les valeurs propres de D.

$\surd$ *Pour que la suite géométrique $(d\lambda^i)_{i\in\mathbf{N}}$ avec $d \in \mathbf{Q}^*$ appartienne à E il faut que $d\lambda^2 = 3c + 2c\lambda$ (relation pour le terme à indice 2), et cela entraîne $d\lambda^{i+2} = 3d\lambda^i + 2d\lambda^{i+1}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$; donc pour qu'un vecteur propre avec valeur propre λ existe, il faut et il suffit que $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.*

f. Trouver ces valeurs propres, ainsi qu'une base de E formée de vecteurs propres de D.

$\surd$ *Comme $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$, les valeurs propres sont $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$. Une base de vecteurs propres est (v_{-1}, v_3) où $v_\lambda = (\lambda^i)_{i\in\mathbf{N}}$ pour $\lambda \in \{-1, 3\}$ (leur nombre est $2 = \dim(E)$; pour l'indépendance linéaire on peut remarquer qu'un multiple d'une suite géométrique en est une de la même raison, ou plus généralement qu'un ensemble de vecteurs propres aux valeurs propres distincts est toujours une famille libre, ou de façon basique la prouver par un petit calcul).*

g. Soit $c \in E$ la suite de termes initiaux $c_0 = 1$, $c_1 = 2$. Trouver une expression pour le terme général de c.

$\surd$ *On cherche à écrire $c = \mu v_{-1} + \nu v_3$ ce qui donne les équations $\mu + \nu = 1$ et $-\mu + 3\nu = 2$, qui ont pour solution $\mu = \frac{1}{4}$ et $\nu = \frac{3}{4}$. Ainsi $c_i = \frac{1}{4}((-1)^i + 3 \times 3^i) = \frac{3^{i+1}+(-1)^i}{4}$. (Il est clair (par récurrence immédiate) que chaque c_i est un entier, ce qui se confirme en calculant les deux termes du numérateur modulo 4: $3^{i+1} \equiv -(-1)^i \pmod 4$ donc $3^{i+1} + (-1)^i$ est divisible par 4.)*

2. Dans cet exercice on se place dans l'espace $\mathbf{R}_3[X]$ des polynômes en X à coefficients réels, et de degré au plus 3; c'est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, dont on connaît la base $\mathcal{E}$ (dite canonique) formée des monômes $X^0 = 1$, X, X^2, et X^3. Soit $p \in \mathrm{End}(\mathbf{R}_3[X])$ la projection sur $\mathrm{Vect}(X^2, X^3)$ parallèle à $\mathrm{Vect}(1, X)$, c'est-à-dire $p(c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3) = c_2X^2 + c_3X^3$, et $d \in \mathrm{End}(\mathbf{R}_3[X])$ l'opération de différentiation par rapport à X. On s'intéresse ici à leur somme $f = p + d \in \mathrm{End}(\mathbf{R}_3[X])$.

a. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$ des monômes.

$\surd$ *On a $f(1) = 0$, $f(X) = 1$, $f(X^2) = X^2 + 2X$ et $f(X^3) = X^3 + 3X^2$, d'où la matrice cherchée est*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Calculer les matrices, dans la même base, des puissances f^i de f pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$. [Prenez le temps de vérifier vos calculs; ils ne sont pas difficiles, mais une erreur éventuelle rendrait la suite de cet exercice plus compliquée voire impossible.]

$\surd$ *Clairement* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^0)$ *est la matrice identité* 4×4, *et* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^1) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$*; pour les autres on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Donner un argument qui montre que f^0, f^1, f^2 et f^3 forment une famille libre. [Indication: pour chacun on trouvera facilement un coefficient non nul de sa matrice à un endroit où les matrices précédentes ont toutes un coefficient nul.] Montrer ensuite qu'en joignant f^4 à cette famille elle devient liée, et en déduire le polynôme minimal de f.

$\surd$ *L'indication est vérifiée, avec par exemple le coefficient à l'index* $(1, i+1)$ *dans* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^i)$ *pour* $i = 0, 1, 2, 3$. *Cela suffit pour que* (f^0, f^1, f^2, f^3) *soit une famille libre, car si* $c_0 f^0 + c_1 f^1 + c_2 f^2 + c_3 f^3 = 0$ *était une relation non triviale, alors pour le plus grand* i *avec* $c_i \neq 0$, *le coefficient à l'index* $(1, i+1)$ *de la matrice de la combinaison linéaire serait non-nulle, une contradiction. Si on joint* f^4 *à cette famille elle devient liée, par la relation* $f^4 - 2f^3 + f^2 = 0$. *Le polynôme minimal de* f *est* $X^4 - 2X^3 + X^2$.

d. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Trouver les valeurs propres de f, et pour chaque valeur propre λ une base du sous-espace propre associé à λ.

$\surd$ *Le polynôme minimal se factorise* $X^2(X-1)^2$ *et n'est donc pas à racines simples;* f *n'est pas diagonalisable. Ses valeurs propres sont* 0 *et* 1, *et les sous-espaces propres associés sont respectivement* $\mathrm{Ker}(f)$, *dont* $\{X^0\}$ *est une base, et* $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, *dont* $\{2X^0 + 2X^1 + X^2\}$ *est une base.*

e. Étendre pour chaque λ cette base à une base de l'espace propre généralisé de f pour λ (c'est-à-dire de $\mathrm{Ker}((f - \lambda\,\mathrm{Id})^m)$, où et m la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal).

$\surd$ *Pour* $\lambda = 0$ *comme pour* $\lambda = 1$ *on a* $m = 2$. *Pour* $\lambda = 0$ *on connaît la matrice de* $(f - 0\,\mathrm{Id})^2 = f^2$, *qui est clairement de rang* 2, *donc l'espace propre généralisé est de dimension* $4 - 2 = 2$, *et on cherche outre le vecteur propre* X^0 *un second vecteur dans le noyau, pour lequel* X^1 *convient visiblement. Pour* $\lambda = 1$, *on calcule d'abord*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}((f - \mathrm{Id})^2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^2 - 2f + \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est aussi de rang 2, *et dont le noyau contient outre le vecteur propre* $2X^0 + 2X^1 + X^2$ *aussi par exemple* $6X^1 + 6X^2 + X^3$, *qui complète donc la base de cet espace propre généralisé.*

f. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, pour la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}_3[X]$ obtenue comme la réunion des bases trouvées dans la question précédente (on les prendra dans l'ordre croissant des valeurs propres).

$\surd$ *On sait que les espaces propres généralisés de* f *sont* f*-stables, donc l'image par* f *de chaque vecteur de* $\mathcal{B}$ *s'exprimera uniquement en termes des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *associés à la même valeur propre. En fait on trouve* $f(X^0) = 0$, $f(X^1) = X^0$, $f(2X^0 + 2X^1 + X^2) = 2X^0 + 2X^1 + X^2$, *et* $f(6X^1 + 6X^2 + X^3) = 6X^0 + 12X^1 + 9X^2 + X^3 = 3(2X^0 + 2X^1 + X^2) + (6X^1 + 6X^2 + X^3)$, *donc*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

g. Est-ce que $\operatorname{Ker}(f^i)$ et $\operatorname{Im}(f^i)$ sont en somme directe pour $i = 1$? pour $i = 2$? et pour $i > 2$?

$\surd$ *Les puissances de f se calculent le plus facilement dans la base $\mathcal{B}$, à l'aide de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ci-dessus. Pour $i = 1$ on voit que le premier vecteur X^0 de $\mathcal{B}$ est à la fois dans $\operatorname{Ker}(f)$ et dans $\operatorname{Im}(f)$, donc la somme n'est pas directe. Pour $i = 2$, $\operatorname{Ker}(f^2)$ est engendré par le deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ (c'est l'espace propre généralisé pour $\lambda = 0$), et $\operatorname{Im}(f^2)$ est engendré par les images des deux derniers vecteurs de $\mathcal{B}$, quelle images ont coordonnées $(0,0,1,0)_{\mathcal{B}}$ respectivement $(0,0,6,1)_{\mathcal{B}}$ et engendrent donc le même espace que ces derniers vecteurs eux-mêmes; la somme est directe. En appliquant f encore à l'espace $\operatorname{Im}(f^2)$ (l'espace propre généralisé pour $\lambda = 1$) l'image ne change plus, car la restriction de f à cet espace est inversible (sa matrice est le bloc $\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ en bas à droite de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, donc $\operatorname{Im}(f^i) = \operatorname{Im}(f^2)$ pour $i \geq 2$; par conséquent la dimension de $\operatorname{Ker}(f^i)$ ne s'accroît pas non plus pour $i \geq 2$ et $\operatorname{Ker}(f^i) = \operatorname{Ker}(f^2)$ et la somme reste directe.*
Plus généralement, pour que $\operatorname{Ker}(f^i) \cap \operatorname{Im}(f^i) = \{0\}$, il est nécessaire que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f^i) = \{0\}$ (car $\operatorname{Ker}(f^i) \supseteq \operatorname{Ker}(f)$), ce qui veut dire que la restriction de f au sous-espace (clairement f-stable) $\operatorname{Im}(f^i)$ est injective, d'où cette condition est aussi suffisante pour $\operatorname{Ker}(f^i) \cap \operatorname{Im}(f^i) = \{0\}$ (car la la restriction de f^i à $\operatorname{Im}(f^i)$ sera aussi injective). Cette condition $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f^i) = \{0\}$ est à son tour équivalente à $\operatorname{Ker}(f^{i+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(f^i)$ (car $f^i(x) \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f^i)$ équivaut à $x \in \operatorname{Ker}(f^{i+1})$). On aura donc $\operatorname{Ker}(f^i)$ et $\operatorname{Im}(f^i)$ en somme directe si et seulement si $\operatorname{Ker}(f^{i+1}) = \operatorname{Ker}(f^i)$ (ou si $i = 0$, mais c'était exclu dans la question), c'est-à-dire si $i \geq m$ avec m la multiplicité de la valeur propre 0 comme racine du polynôme minimal (si 0 n'est pas une valeur propre, c'est pour tout i).

3. Soit $d \in \mathbf{N}$ et $E = \mathbf{C}_d[X]$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes en X de degré au plus d. Pour $a \in \mathbf{C}$ soit $t_a : E \to E$ l'application qui consiste à substituer $X + a$ pour X dans les polynômes $P \in \mathbf{C}_d[X]$. On admettra que t_a est une application linéaire, et que $t_{-a}(t_a(P)) = P$ pour tout $P \in E$ (car cela revient à substituer $(X - a) + a = X$ pour X) ; donc t_a est un endomorphisme inversible de E.

a. Pour $a \in \mathbf{C}$ fixé, montrer que les polynômes $\left((X + a)^k\right)_{k=0,1,\ldots,d}$ forment une base de E.

$\surd$ *Ils sont les images de la base canonique $\left(X^k\right)_{i=0,1,\ldots,d}$ de E par un endomorphisme inversible.*

b. Soit $M = (M_{i,j})_{0 \leq i,j \leq d}$ la matrice de passage de la base $\left(X^k\right)_{k=0,1,\ldots,d}$ de E à $\left((X+a)^k\right)_{k=0,1,\ldots,d}$.
À l'aide de la formule du binôme, trouver une expression pour les coefficients $M_{i,j}$ de M.

$\surd$ *Il faudra pour cela exprimer la nouvelle base $\left((X + a)^i\right)_{i=0,1,\ldots,d}$ dans l'ancienne base, c'est-à-dire la base canonique. C'est ce que fait la formule du binôme : $(X + a)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i a^{k-i}$. Cela donne la colonne k de la matrice de passage, donc on a $M_{i,j} = \binom{j}{i} a^{j-i}$.*

c. Donner de façon similaire une expression pour les coefficients de M^{-1}.

$\surd$ *M est au même temps la matrice de t_a dans la base canonique (car ses colonnes expriment les images $t_a(X^j) = (X+a)^j$ dans la base canonique). La matrice inverse est donc celle de l'inverse t_{-a} de t_a dans la base canonique; il suffit donc de remplacer a par $-a$, donnant $(M^{-1})_{i,j} = \binom{j}{i}(-a)^{j-i}$.*

d. Déduire des résultats précédents que les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ vérifient la relation suivante:

$$\sum_{j=i}^{k} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \binom{k}{j} = \delta_{i,k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } 0 \leq i, k \leq d.$$

$\surd$ *Si $i > k$ la sommation est vide et la relation satisfaite ; on supposera donc $i \leq k$. Alors on a $\delta_{i,k} = \operatorname{Mat}(\operatorname{Id}_E)_{i,k} = \left(\operatorname{Mat}(M^{-1}) \cdot \operatorname{Mat}(M)\right)_{i,k}$, ce qui donne d'après les formules des questions b,c:*

$$\delta_{i,k} = \sum_{j=0}^{d} \left(\binom{j}{i} (-a)^{j-i} \right) \left(\binom{k}{j} a^{k-j} \right) = a^{k-i} \left(\sum_{j=0}^{d} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \binom{k}{j} \right).$$

On prend $a \neq 0$, et on conclut que l'expression en parenthèses à droite est égal à $\delta_{i,k}$ (le facteur a^{k-i} ne joue un rôle que si $\delta_{i,k} \neq 0$, c'est-à-dire si $i = k$, et dans ce cas il est 1). Or comme $\binom{n}{k} = 0$ quand $k > n$, on pourra restreindre la sommation à $i \leq j \leq k$, ce qui donne le résultat cherché.

Fin.