École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD9

Exercice 1. On pose $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$ et soit $f\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ donnée par $f(x) = x + \alpha$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est invariante.
2. Montrer qu'elle est ergodique si et seulement si la famille $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ est libre sur $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que f est alors uniquement ergodique.

Exercice 2. Soit M une matrice $d \times d$ à coefficients entiers. On suppose que $\det(M) \neq 0$. On définit $f_M\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ par $f_M(\pi(x)) = \pi(Mx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, où $\pi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ est la projection canonique.

1. Montrer que f_M est bien définie puis que f_M et surjective.
2. Montrer que f_M préserve la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ sur $\mathbb{T}^d$.

On suppose désormais que M ne possède pas de valeur propre qui soit racine de l'unité.

3. Monter que pour toutes ϕ et ψ appartenant à $L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{L}^d)$ on a
$$\lim_n \int_{\mathbb{T}^d} \phi\left(f_M^n(x)\right)\, \psi(x)\, dx = \left(\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{T}^d} \psi(x)\, dx\right)$$
Indication : Utiliser la base de Fourier.
4. En déduire que pour tous Boréliens A et B de $\mathbb{T}^d$ on a
$$\lim_n \mathcal{L}^d(f_M^{-n}(A) \cap B) = \mathcal{L}^d(A)\mathcal{L}^d(B).$$
On dit que f_M est *mélangeante.*
5. En déduire que f_M est ergodique.
6. Réciproquement montrer que si f_M est ergodique alors M n'admet pas de valeur propre qui soit racine de l'unité.

Exercice 3. Soit α irrationnel. On considère $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ donnée par $f(x,y) = (x+\alpha, x+y)$.

1. Montrer que f préserve la mesure de Lebesgue.
2. Montrer que la mesure de Lebesgue est ergodique.
3. Montrer que f est uniquement ergodique.
4. Application : Montrer que pour tout polynôme P de degré 2 et de coefficient dominant irrationnel la suite $(P(n))$ est équirépartie modulo 1.

Question subsidiaire : Reprendre les questions précédentes avec $f\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ donnée par

$$f(x_1, \ldots, x_d) = (x_1 + \alpha, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_{d-1} + x_d),$$

et montrer que pour tout polynôme P non constant et de coefficient dominant irrationnel la suite $(P(n))$ est équirépartie modulo 1.