École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD8

Exercice 1. Pour $n \geq 1$, on note r_n le premier chiffre de 2^n en base 10. Les premiers termes de la suite (r_n) sont donc $2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \ldots$ Pour $k \in \{1, \ldots, 9\}$ on s'intéresse à la fréquence

$$F_n(k) = \frac{\#\{i \leq n \colon r_i = k\}}{n}$$

du chiffre k dans la suite (r_n). Montrer que pour tout chiffre k

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(k) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Note : Cette loi est appelée loi de Benford, qui a observé empiriquement que pour beaucoup de données naturelles le premier chiffre se comportait de cette manière.

Exercice 2 (Fractions continues)**.** On note

$$[a_0] = \frac{1}{a_0}, \quad [a_0, a_1] = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1}}, \quad [a_0, a_1, a_2] = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}}, \quad \text{etc.}\ldots$$

Un raisonnement par récurrence montre qu'on peut écrire la fraction rationnelle $[a_0, \ldots, a_n]$ sous forme réduite

$$[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n(a_0, \ldots, a_n)}{q_n(a_0, \ldots, a_n)}.$$

où p_n et q_n sont définis récursivement par

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

et les conditions initiales appropriées. De cette relation on tire facilement l'égalité

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

qu'on utilisera par la suite.
Dans cet exercice, on s'intéresse à l'aspect *théorie ergodique* des fractions continues. On note T l'application de Gauss, c'est-à-dire l'application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui envoie 0 sur 0 et x non nul sur la partie fractionnaire de $1/x$.

1. Montrer que la mesure de probabilité sur $[0, 1]$ donnée par

$$\mu(dx) = \frac{dx}{(\log 2)(1 + x)}$$

est invariante.

On veut maintenant montrer qu'elle est ergodique. Pour a entier non nul on pose

$$I(a) = \left] \frac{1}{a+1} ; \frac{1}{a} \right[.$$

Étant donnée une suite $(a_0, \ldots, a_n)$ d'entiers non nuls on pose

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = I(a_0) \cap T^{-1}(I(a_1)) \cap \cdots \cap T^{-n}(I(a_n)).$$

2. Montrer que $I(a_0, \ldots, a_n)$ est un intervalle, que T^{n+1} réalise une bijection entre $I(a_0, \ldots, a_n)$ et $]0, 1[$ d'inverse donnée par

$$\phi_{a_0,\ldots,a_n}(x) = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + x]$$

3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$

$$\frac{1}{4q_n^2(a_0, \ldots, a_n)} \leq |(\phi_{a_0,\ldots,a_n})'(x)| \leq \frac{1}{q_n^2(a_0, \ldots, a_n)}$$

4. En déduire que pour tout Borélien B de $[0, 1]$ on a

$$\mathcal{L}(T^{-(n+1)}(B) \cap I(a_0, \ldots, a_n)) \geq \frac{1}{4} \mathcal{L}(B)\, \mathcal{L}(I(a_0, \ldots, a_n)),$$

   en notant $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue.
5. Montrer que si $T^{-1}(B) = B$ alors $\mathcal{L}(B) \in \{0, 1\}$ et conclure.
   Indication : On pourra commencer par faire comme si l'égalité précédente était vraie pour tous les intervalles, et pas seulement ceux de la forme $I(a_0, \ldots, a_n)$.

Soit $x \in [0, 1]$ irrationnel. On note $[a_0, a_1, \ldots]$ son développement en fraction continue et on s'intéresse à la fréquence

$$F_{n,x}(k) = \frac{\#\{i \leq n \colon a_i = k\}}{n}$$

de l'entier k dans ce développement.

6. Montrer que pour presque tout x de $[0, 1]$ on a

$$\lim_{n\to\infty} F_{n,x}(k) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Note : Cette distribution sur les entiers est appelée loi de Gauss-Kuzmin.