École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD7

Exercice 1. On considère $\varphi\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ donnée par $\varphi(x,y) = (x+\alpha, r(x)+y)$ avec α irrationnel et $r\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ une fonction continue. On a vu que φ est minimale si et seulement s'il n'existe pas d'entier l et d'application continue g vérifiant $g(x+\alpha) - g(x) = lr(x)$ pour tout x.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^2$ est invariante par φ.
2. On suppose qu'il existe une fonction mesurable g vérifiant $g(x+\alpha)-g(x) = r(x)$ presque partout. Montrer que φ n'est pas uniquement ergodique.

On veut maintenant montrer qu'on peut choisir r de sorte que φ soit minimale et pas uniquement ergodique.

3. Montrer qu'il existe une suite (q_n) d'entiers qui soit strictement croissante et telle que $|\mathrm{e}^{2i\pi q_n \alpha} - 1| \leq 2^{-n}$ pour tout n.
4. Pour $x \in \mathbb{T}$ on pose
$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos(2\pi q_n x).$$
Montrer qu'on définit ainsi une fonction appartenant à $L^2(\mathbb{T};\mathbb{R})$.
5. Montrer que G n'est pas continue.
Indication : La série de Fourier d'une fonction continue ne converge pas forcément en tout point, en revanche la suite des sommes de Fourier partielles converge au sens de Cesàro…
6. On pose $R(x) = G(x+\alpha) - G(x)$. Montrer que R est continue.
7. En s'inspirant de ce qui précède montrer qu'il existe une fonction continue $r\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ telle que φ soit minimale mais ne soit pas uniquement ergodique.

Exercice 2. On pose $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ et $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et on définit $h\colon X \to \mathbb{T}$ par
$$h(x) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} x_n \mod 1.$$
Soit X_0 l'ensemble des suites $x \in X$ telles que $x_n = 1$ pour n assez grand.

1. Montrer que h restreinte à $X \backslash X_0$ est bijective. On note h^{-1} son inverse.
2. Montrer que h^{-1} n'est pas continue mais que h^{-1} est mesurable.
3. Montrer que l'ergodicité du décalage sur l'ensemble de Cantor et l'ergodicité de la multiplication par 2 sur le tore se déduisent l'une de l'autre.