École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD6

Exercice 1. Soit X un espace métrique compact et m une mesure de probabilité sur X muni de la tribu borélienne. On dit que $f\colon X \to R$ est Riemann intégrable si f est bornée et si

$$\sup_{g\in\mathcal{C}_-}\left\{\int g\,dm\right\} = \inf_{h\in\mathcal{C}_+}\left\{\int h\,dm\right\}$$

où $\mathcal{C}_-$ et $\mathcal{C}_+$ désignent respectivement l'ensemble des fonctions continues inférieures à f, et supérieures à f.

1. On pose $f_- = \sup_{\mathcal{C}_-}\{g\}$. Montrer que f_- est mesurable et que
$$\int f_-\,dm = \sup_{g\in\mathcal{C}_-}\left\{\int g\,dm\right\}.$$
Indication : on pourra utiliser le fait que l'espace des fonctions continues sur un compact est séparable.
2. Montrer que f est semi-continue inférieurement en x si et seulement si $f(x) = f_-(x)$.
3. Monter que f est Riemann intégrable si et seulement si f est continue presque partout.
4. Application : Soit $\phi\colon X \to X$ une application uniquement ergodique de mesure invariante m et soit A mesurable. Montrer que si $m(\partial A) = 0$ alors pour tout $x \in X$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{k \le n-1\colon \phi^k(x)\in A\}}{n} = m(A).$$

Exercice 2. Soit X un espace métrique complet. Soit $\gamma\colon \mathbb{R}\to X$ une courbe continue. On dit que γ est presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que tout intervalle de longueur T contienne un réel t vérifiant $d(f(s+t), f(s)) \le \varepsilon$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ (on dit que t est une ε-période).

1. Montrer que si $\gamma\colon \mathbb{R}\to X$ est presque périodique, l'image de γ est relativement compacte dans X. Montrer aussi que γ est uniformément continue.
2. Soit Y l'espace des courbes bornées uniformément continues à valeurs dans X, muni de la distance uniforme. Montrer qu'on définit un flot isométrique sur Y en posant $\tau^t\gamma\colon s \mapsto \gamma(s+t)$. Montrer que la courbe γ est presque périodique si et seulement si son orbite par τ^t est relativement compacte. Montrer de plus que la restriction du flot à l'adhérence de l'orbite de γ est alors minimale.
3. Soit γ une courbe presque périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle admet une valeur moyenne : il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_s^{s+t} f(u)\,du = m.$$