École Normale Supérieure | Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD2

Exercice 1 (Stabilité des orbites périodiques pour un flot)**.** Soit $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champs de vecteur $\mathcal{C}^1$ supposé complet. On note ϕ le flot associé. Soit x un point périodique, de période $t > 0$. Soit M une section de Poincaré contenant x et soient τ et ψ le temps et l'application de premier retour dans M, qui sont bien définis et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x.

1. Montrer que dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\, V(x) \oplus T_x(M)$ on a
$$d\phi_t(x) = \begin{pmatrix} 1 & -d\tau(x) \\ 0 & d\psi(x) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que si 1 est valeur propre simple de $d\phi_t(x)$ alors x est un point fixe non dégénéré de ψ.

On se donne maintenant une famille de champs de vecteurs (V_μ) indexés par un paramètre réel μ et on suppose que $(\mu, x) \mapsto V_\mu(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit M une section de Poincaré pour V_0 et soit x_0 possédant un retour régulier.

3. Montrer que pour $\mu \in \mathbb{R}$ proche de 0 et $x \in M$ proche de x_0 le temps $\tau_\mu(x)$ de retour en M pour le flot associé à V_μ est bien défini et dépend de manière $\mathcal{C}^1$ de (μ, x). Montrer qu'il en est de même de l'application de retour $\psi_\mu(x)$.
Indication : Considérer le champs $V(\mu, x) = (0, V_\mu(x))$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
4. Soit x_0 un point périodique non dégénéré pour le flot de V_0 et soit t_0 sa période. Montrer qu'il existe un voisinage $I \times J \times U$ de $(0, t_0, x_0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ et une application $\mu \mapsto (t_\mu, x_\mu)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que x_μ soit périodique de période t_μ pour le flot de V_μ.

Exercice 2. Il a été vu en cours que si un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ possède un point fixe linéairement stable alors il est localement conjugué à son linéarisé au voisinage de ce point fixe. Dans cet exercice on s'intéresse à la régularité de cette conjugaison. C'est une question subtile, comme le montrent les exemples suivants.

1. Considérons l'application $\varphi(x,y) = (x/2, y/5 + x^2)$. On appelle L sa différentielle en 0. Montrer qu'il existe une conjugaison entre φ et L de la forme $h(x,y) = (x, y + ax^2)$. Remarquer en particulier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. On considère maintenant $\varphi(x,y) = (x/2, y/4+x^2)$. Montrer qu'il existe une conjugaison entre φ et L de la forme $h(x,y) = (x, y + ax^2 \ln x)$. Quelle est la régularité de h ? Montrer qu'il n'existe pas de conjugaison $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0.

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ fixant 0. On pose $L = d\varphi_0$ et on suppose que les modules des valeurs propres de L sont contenus dans un intervalle $[r, R]$ avec $R^2 < r < R < 1$. On parle d'hypothèse de pincement.

3. Soient $a < r$ et $b > R$. On pose $h_n = L^{-n} \circ \varphi^n$. Montrer qu'au voisinage de 0 on a
$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = O\left(\left(\frac{b^2}{a}\right)^n |x|^2\right).$$
4. En déduire qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel la suite h_n converge uniformément vers une fonction h qui de plus vérifie $(dh)_0 = \mathrm{Id}$.
5. On suppose maintenant que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ et on pose
$$\widetilde{\varphi}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^{2d} \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(y)) \in \mathbb{R}^{2d}$$
Montrer que la différentielle de $\widetilde{\varphi}$ en 0 vérifie aussi l'hypothèse de pincement et en déduire que h est de classe $\mathcal{C}^1$.
6. En déduire que φ et L sont localement conjuguées par un difféomorphisme.
7. Montrer que si φ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour un certain $k \geq 3$ alors h est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.