École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD13

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ un espace de probabilité muni d'une transformation invariante. On dit que le système est faiblement mélangeant si pour toute $f, g \in L^2(\mu)$ la quantité

$$\left| \int_X (f \circ \phi^n) g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu \right|$$

tend vers 0 au sens de Cesàro quand n tend vers l'infini.

1. Montrer que le système est alors ergodique.
2. Montrer qu'une translation irrationnelle sur le tore est ergodique mais n'est pas faiblement mélangeante.

Exercice 2. Soit (a_n) une suite de réels positifs. On suppose que (a_n) est bornée. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $a_n \to 0$ au sens de Cesàro.

(ii) $\mathbb{1}_{\{a_n \geq \epsilon\}} \to 0$ au sens de Cesàro, pour tout $\epsilon > 0$.

En déduire qu'au sens de Cesàro $a_n \to 0$ si et seulement si $a_n^2 \to 0$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ un espace de probabilité muni d'une transformation invariante. On dit maintenant qu'une fonction $f \in L^2(\mu)$ est faiblement mélangeante si $|\langle f \circ \phi^n, f \rangle| \to 0$ au sens de Cesàro.

1. Montrer que si f est à la fois faiblement mélangeante et presque périodique alors f est nulle.
2. Montrer que si f est faiblement mélangeante, alors $|\langle f \circ \phi^n, g \rangle| \to 0$ au sens de Cesàro pour toute fonction $g \in L^2(\mu)$.
   Indication : Utiliser l'exercice précédent.

On pose pour f et g dans $L^2(\mu)$ on note $f \otimes g \colon x, y \mapsto f(x)g(y)$. C'est un élément de $L^2(\mu \otimes \mu)$.

3. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f \circ \phi^k) \otimes (f \circ \phi^k)$$

   converge dans $L^2(\mu \otimes \mu)$. On appelle S_f sa limite.

4. Pour $g \in L^2(\mu)$ on pose $S_f(g)(x) = \int_X S_f(x,y)g(y)\,\mu(dy)$. Montrer qu'on définit ainsi un opérateur compact de $L^2(\mu)$. C'est-à-dire que l'image d'un ensemble borné est relativement compacte.
   Indication : Les opérateurs de rang fini sont compacts et l'ensemble des opérateurs compacts est fermé (pour la norme d'opérateur).
5. En déduire que $S_f(f)$ est presque périodique.
6. Montrer que l'ensemble des fonctions mélangeantes est exactement l'orthogonal des fonctions presque périodiques.

Corrigé et bien plus :

— Policott et Yuri, Dynamical Systems and ergodic theory, Chapitre 7 ;

— le blog de Terry Tao
`https://terrytao.wordpress.com/2008/02/21/254a-lecture-12-weakly-mixing-systems/`