École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD1

Exercice 1 (Équation différentielles linéaires dans $\mathbb{R}^2$)**.** Soit A une matrice 2×2 réelle. On considère l'équation différentielle linéaire

$$X'(t) = AX(t),$$

l'inconnue X étant à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On appelle *portrait de phase* de l'équation un dessin dans $\mathbb{R}^2$ des trajectoires de ses solutions.

1. Montrer que si A et $\tilde{A}$ sont semblables les portraits de phase associés à A et $\tilde{A}$ se déduisent l'un de l'autre par une application linéaire inversible.
2. Déterminer, en fonction de la classe de similitude de A, le portrait de phase de l'équation associée.

Exercice 2 (Le pendule)**.** On considère l'équation du pendule

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0, \quad \theta \in \mathbb{S}^1$$

qu'on ramène au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \tag{1}$$

en posant $x = \theta$ et $y = \dot{\theta}$.

1. Montrer que le champs de vecteur V défini sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ par

   $$V(x, y) = (y, -\sin x)$$

   est complet.
2. Montrer que la fonctionnelle d'énergie

   $$E(x, y) = -\cos(x) + \frac{1}{2}y^2$$

   est constante le long des trajectoires.
3. En déduire un portrait de phase de l'équation (1).
4. Quels sont les points fixes du système ? Sont-ils stables ?
5. Les trajectoires sont-elles toutes périodiques ?