Université Paris-Dauphine | Année 2017/18
M1MMD

Processus discrets
TD8. Chaines de Markov IV
Mesures stationnaires

Exercice 1. Montrer qu'une probabilité stationnaire ne charge pas les états transients. Qu'en est-il des mesures stationnaires infinies ?

Exercice 2 (Château de cartes)**.** On fixe $p \in]0,1[$ et on considère une suite de variables aléatoires définie de la manière suivante : $X_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout entier n, conditionnellement à $X_0, \ldots, X_{n-1}$ on a

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ 0 & \text{avec probabilité } 1-p. \end{cases}$$

1. Vérifier que (X_n) est une chaine de Markov, et déterminer sa matrice de transition.
2. La chaine est-elle irréductible ?
3. Montrer qu'il existe une unique mesure invariante π et la déterminer.
4. Soit T_0 le temps de retour en 0. Quel est la loi de T_0 sous $\mathbb{P}_0$?
5. Vérifier qu'on a bien $\mathbb{E}_0[T_0] = 1/\pi(0)$.

Exercice 3 (Modèle de Bernoulli-Laplace)**.** Soient i, j, k, l des entiers vérifiant $i + j = k + l$. On dispose de i boules blanches et j noires réparties dans deux urnes, de telle sorte que la première urne contienne k boules et la deuxième l. À chaque instant on choisit une boule dans chaque urne au hasard et on les échange. On note X_n le nombre de boules blanches dans la première urne au temps n.

1. Montrer que (X_n) est une chaine de Markov, déterminer son espace d'état et sa matrice de transition.
2. Montrer que la chaine admet une unique probabilité invariante et que la chaine est réversible à l'équilibre.

Exercice 4. Soient $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. uniformes sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, \ldots, Z\}$. Soit l un entier non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$X_n = (Y_{n+1}, \ldots, Y_{n+l}) \in \mathcal{A}^l$$

1. Montrer que (X_n) est une chaine de Markov irréductible sur $\mathcal{A}^l$.
2. Quelle est la loi de X_0 ? Montrer que la chaine (X_n) est à l'équilibre.

3. Soit $x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{A}^l$ et soit $T_x = \inf\{n \geq 0;\ X_n = x\}$. Montrer que la mesure μ définie par

$$\mu(z) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T_x+l-1} \mathbb{1}_{\{X_n = z\}}\right]$$

pour tout $z \in \mathcal{A}^l$ de longueur l est stationnaire.

4. En déduire que

$$\mathbb{E}[T_x] + l = 26^l \sum_{k=0}^{l-1} \mathbb{P}((x_{k+1}, \dots, x_l, Y_1, \dots, Y_k) = x).$$

5. Déterminer le temps moyen d'attente du mot $ABRACADABRA$.

Exercice 5. Un roi se promène aléatoirement sur un échiquier vide, de telle sorte qu'à chaque instant il effectue un de ses mouvements autorisés de manière équiprobable. S'il part d'un coin combien de temps met-il à y revenir en moyenne ? Même question pour une tour, une reine, etc...