Université Paris-Dauphine Année 2020/2021
M1

Analyse convexe approfondie
Feuille d'exercices 5

Exercice 1 (Théorème de Fenchel-Rockafellar)**.** Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : Soient φ et ψ deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(\varphi)) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(\psi)) \neq \emptyset$. Alors

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{\varphi(x) + \psi(x)\} = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \{-\varphi^*(-y) - \psi^*(y)\}\,.$$

De plus si cette quantité est finie alors le sup est atteint dans le membre de droite. Noter que le membre de gauche ne peut pas prendre la valeur $+\infty$ par hypothèse mais que rien ne l'empêche de valoir $-\infty$.

1. Montrer que le membre de droite est toujours plus petit que le membre de gauche.

Ceci montre en particulier l'égalité dans le cas où le membre de gauche vaut $-\infty$. On suppose désormais que la valeur du membre de gauche n'est pas $-\infty$. On note cette valeur α.

2. Montrer que l'intérieur relatif de $\mathrm{epi}(\varphi)$ n'intersecte pas l'ensemble

$$\left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon \psi(x) \leq -t + \alpha\right\}.$$

3. En déduire qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$-\langle y, x\rangle - \varphi(x) + \langle y, x'\rangle - \psi(x') \leq -\alpha, \quad \forall (x,x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

   et conclure.

Exercice 2. Soit K un ensemble convexe.

1. Montrer que la fonction i_K donnée par $i_K(x) = 0$ si $x \in K$ et $i_K(x) = \infty$ sinon est convexe.
2. Montrer que pour tout $x \in K$ le sous-différentiel de i_K en x coïncide avec le cône normal à K en x.
3. Utiliser ce fait et un des exercices de la feuille précédente pour redémontrer le théorème sur la condition d'optimalité pour l'optimisation convexe vu en cours.

Exercice 3. Résoudre le problème suivant

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ \text{sous contraintes} & y \leq x \\ & x + 4y \leq 3. \end{array}$$

Exercice 4. On considère le problème

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & -\sum_{i=1}^n \log(\alpha_i + x_i) \\ \text{sous contraintes} & x_i \geq 0,\, i \leq n \\ & \sum_{i\leq n} x_i = 1, \end{array}$$

les α_i étant des paramètres positifs. Écrire les conditions KKT pour ce problème et montrer qu'elle permettent de le résoudre explicitement.
Indication : La solution s'exprime en fonction de l'unique réel t vérifiant $\sum_{i=1}^n \max(0, t - \alpha_i) = 1$.

Exercice 5 (Cône PSD)**.** On note $S^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels qui soient symétriques. On munit cet espace du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$. On note $A \geq 0$ si $A \in S^n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive et $A > 0$ si A est définie positive. Les ensembles des matrices $A \in S^n(\mathbb{R})$ vérifiant respectivement $A \geq 0$ et $A > 0$ sont notés $S^n_+(\mathbb{R})$ et $S^n_{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S^n_+(\mathbb{R})$ est un cône convexe fermé.
2. Montrer de plus qu'il est son propre dual.
3. Montrer que $S^n_{++}(\mathbb{R})$ est l'intérieur de $S^n_+(\mathbb{R})$. En particulier $S^n_+(\mathbb{R})$ est d'intérieur non vide.
4. Si on identifie les matrices appartenant à $S^2(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^3$, tracer $S^2_+(\mathbb{R})$.
5. Étant donné un cône C de $\mathbb{R}^k$ et un vecteur u non nul de C, on dit que $x \in C\backslash\{0\}$ est une direction extrémale de C si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ on a
$$x + u \in C \text{ et } x - u \in C \quad \Rightarrow \quad u \in \mathrm{vect}(x).$$
Montrer qu'une matrice X est une direction extrémale de $S^n_+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe un vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $X = xx^T$.
Indication : Pour le sens difficile on pourra utiliser le fait que pour $A \in S^n_+(\mathbb{R})$ on a $\langle Ax, x\rangle = 0 \Rightarrow Ax = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. On considère la fonction $f\colon S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ donnée par
$$f(A) = \begin{cases} -\log\det A & \text{si } A > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est convexe.
Indication : Commencer par montrer l'inégalité de convexité dans le cas où l'une des deux matrices est l'identité, et montrer ensuite qu'on peut se ramener à ce cas là.
2. Montrer de plus que f est strictement convexe, au sens où $f(\frac{A+B}{2}) < \frac{f(A)+f(B)}{2}$ pour toutes matrices A et B distinctes appartenant au domaine de f.
3. Montrer que pour toute matrice H, pas forcément symétrique, on a
$$\det(I_n + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(H) + o(\varepsilon).$$
En déduire que f est différentiable sur l'intérieur de son domaine et que $\nabla f(A) = -A^{-1}$ pour toute $A > 0$.

Exercice 7 (Une version discrète du Théorème de John)**.** On fixe $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ et on suppose que les x_i engendrent $\mathbb{R}^n$. On considère le problème suivant
$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & -\log\det A \\ \text{sous contraintes} & \langle Ax_i, x_i\rangle \leq 1,\ i \leq m. \end{array}$$
avec la contrainte implicite supplémentaire que A doit être une matrice symétrique définie positive. Ce problème revient à minimiser la mesure de Lebesgue d'un ellispoïde contenant les points $x_1 \dots x_m$.

1. En utilisant les propriétés du $\log\det$ vues à l'exercice précédent montrer que le problème admet une solution et que celle-ci est unique.
2. Écrire les conditions KKT pour ce problème.
3. En déduire que la matrice identité I_n est solution du problème si et seulement si $\|x_i\| \leq 1$ pour tout $i \leq m$ et si en notant J l'ensemble des indices j tels que $\|x_j\| = 1$, on a existence de réels positifs $(\lambda_j)_{j\in J}$ tels que
$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j x_j^T = I_n,$$
ce qui implique en particulier que J est de cardinal au moins n.