Université Paris-Dauphine Année 2020/2021
M1

Analyse convexe approfondie
Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Soit $f\colon E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Montrer que si f est convexe alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ son ensemble de niveau $\{f \leq a\}$ est convexe. Montrer que la réciproque est fausse. Une fonction dont tous les ensembles de niveau sont convexes est dite *quasi-convexe*.

Exercice 2. À quelle condition sur A l'indicatrice de A est-elle semi-continue inférieurement ? Montrer qu'une fonction f est semi-continue inférieurement si et seulement si ses ensembles de niveaux $\{f \leq a\}$ sont tous fermés.

Exercice 3. Soit $p \in [1;\infty[$. Déterminer la transformée de Legendre de la fonction φ_p donnée par $\phi_p(t) = |t|^p/p$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Attention au cas $p = 1$ qui est un peu à part. Montrer que ça marche aussi pour $p = +\infty$.

Exercice 4. Déterminer la transformée de Legendre de la fonction exponentielle.

Exercice 5. Montrer que la seule fonction propre $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ vérifiant $f = f^*$ est la fonction $f(x) = \|x\|^2/2$ (norme euclidienne).

Exercice 6. Soit K un sous-ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$ et tel que K contienne 0 dans son intérieur. On note p_K sa jauge et $h_K(y) = \sup_{x\in K}\langle x, y\rangle$ la fonction d'appui de K.

1. Montrer que la transformée de Legendre de $\frac{1}{2}p_K^2$ est la fonction $\frac{1}{2}h_K^2$.
2. Plus généralement, montrer que pour toute fonction $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ qui soit propre et paire on a $(\phi \circ p_K)^* = \phi^* \circ h_K$.

Exercice 7 (Quelques propriétés du sous-gradient)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction convexe propre et soit x un point du domaine de f.

1. Montrer que $\partial f(x)$ est toujours convexe et fermé.
2. Montrer aussi que si x appartient à l'intérieur du domaine de f alors $\partial f(x)$ est borné.

Exercice 8 (Sous-gradient d'une somme)**.** Soient $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions convexes et propres. On suppose que leurs domaines s'intersectent, de sorte que $f + g$ est aussi convexe et propre.

1. Soit x appartenant au domaine de $f + g$, montrer que $\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f + g)(x)$.

On veut maintenant montrer que l'inclusion réciproque est aussi vraie à condition que les intérieurs des domaines de f et g s'intersectent. On suppose donc que cette condition est vérifiée, et on se donne $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $y \in \partial(f + g)(x)$. L'objectif est alors de montrer qu'il existe $y_0 \in \partial f(x)$ et $y_1 \in \partial g(x)$ tels que $y_0 + y_1 = y$.

2. Montrer qu'on peut se ramener au cas $y = 0$ et $(f + g)(x) = 0$.
3. Montrer qu'on peut alors séparer l'épigraphe de f de l'hypographe de $-g$ par un hyperplan H qui de plus n'est pas "vertical" et conclure.

Exercice 9 (Inf-convolution)**.** Soient $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ des fonctions propres. On définit *l'inf-convolée* de f_1 et f_2, notée $f_1\Box f_2$ par

$$f_1\Box f_2(x) = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \colon x_1 + x_2 = x\}.$$

1. Montrer que si f_1 et f_2 sont convexes alors $f_1 \Box f_2$ aussi.
2. Montrer que $(f_1 \Box f_2)^* = f_1^* + f_2^*$.
3. Montrer qu'on a toujours $(f_1 + f_2)^* \leq f_1^* \Box f_2^*$.
4. En utilisant l'exercice précédent montrer que si f_1 et f_2 sont convexes et que les intérieurs de leurs domaines respectifs s'intersectent alors $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \Box f_2^*$ et montrer de plus que si $(f_1^* \Box f_2^*)(y)$ est fini alors l'infimum est atteint dans la définition de $(f_1^* \Box f_2^*)(y)$.

Exercice 10. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et soit x dans l'intérieur de son domaine. Étant donné $v \in \mathbb{R}^n$ on rappelle qu'on définit la dérivée directionnelle de f dans la direction v par

$$f'(x; v) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

1. Montrer que l'application $v \mapsto f'(x; v)$ est bien définie, 1-homogène et sous-additive.
2. Montrer que f est dérivable en x si et seulement si $f(x; v)$ est linéaire en v.