Université Paris-Dauphine Année 2020/2021
M1

Analyse convexe approfondie
Feuille d'exercices 1
`[version 2]`

Exercice 1. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $x, y \in K \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in K$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer par un exemple que K n'est pas forcément convexe.
2. Montrer que si de plus K est fermé, alors K est convexe.

Exercice 2. Soit K un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel E. On dit que $x \in K$ est un *point extrémal* de K si $\frac{y+z}{2} = x \Rightarrow y = z = x$ pour tous $y, z \in K$.

1. Montrer que x est un point extrémal de K si et seulement si $K \backslash \{x\}$ est convexe.
2. Soit $A \subset E$ et soit x un point extrémal de $\mathrm{conv}(A)$, montrer que $x \in A$.

Exercice 3. On dit que qu'une norme sur un espace vectoriel E est strictement convexe si pour tous $x \neq y$ de norme 1 on a $\|x + y\| < 2$.

1. Montrer que c'est équivalent à dire que tous les vecteurs de norme 1 sont des points extrémaux de la boule unité.
2. Montrer qu'une norme euclidienne (i.e. provenant d'un produit scalaire) est strictement convexe.
3. Sur $\mathbb{R}^n$ on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\}$ et $\|x\|_1 = \sum |x_i|$. Montrer que ces deux normes ne sont pas strictement convexes et déterminer les points extrémaux pour chacune des deux boules.

Exercice 4 (Cône radial)**.** Soit E un espace vectoriel et K un sous-ensemble convexe de E. Étant donné $x \in K$ on note $R(x)$ l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tel qu'il exsite $t > 0$ tel que $x + tv \in K$.

1. Montrer que $R(x)$ est un cône convexe, puis que $R(x) = \mathrm{pos}(K - x)$.
2. Si K est un carré dans $\mathbb{R}^2$ déterminer le cône radial en un point intérieur, en un point d'une face et en un sommet.

Exercice 5. Soit P un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les racines du polynôme dérivé P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 6 (Projection sur un convexe)**.** Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H.

1. Montrer que pour tout $x \in H$ il existe un unique $x_* \in C$ qui minimise la distance à x sur C. Ce point est appelé projeté de x sur C.
   Indication : Montrer qu'une suite de points de C minimisante pour la distance à x est automatiquement de Cauchy. Noter que ceci ne marche que pour les Hilbert donc il faut utiliser le fait que la norme provient d'un produit scalaire d'une manière ou d'une autre.
2. Montrer de plus que le projeté x_* de x sur C est caractérisé par la propriété suivante :

$$\langle x - x_*, y - x_* \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

Exercice 7. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $A = \{0\} \times [0, 1] \cup [0, +\infty[\times \{0\}$. Montrer que A est fermé, mais que $\mathrm{conv}(A)$ n'est pas fermé.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe.

1. Soit K un convexe de E. Montrer que l'adhérence de K est convexe. Montrer que son intérieur aussi est convexe.
2. Montrer de plus que si x appartient à l'intérieur de K et que y appartient au
3. Soit $A \subset E$. Montrer que l'adhérence de $\mathrm{conv}(A)$ bord de K alors $[x, y[$ est inclus dans l'intérieur de K. En déduire que l'adhérence de l'intérieur de K contient K.

Exercice 9 (Jauge d'un convexe)**.** Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et K un sous-ensemble convexe de E contenant 0 dans son intérieur. On rappelle la définition de la jauge de K : $p(x) = \inf\{t > 0 \colon x \in tK\}$.

1. Montrer que p est 1-homogène et sous-additive.
2. Soit $x \neq 0$, à quelle condition a-t-on $p(x) = 0$? Montrer que si K est symétrique (i.e. $K = -K$) et ne contient pas de demi-droite alors p est une norme.
3. Montrer que p est continue sur E.
4. Montrer que $\{p < 1\}$ est égal à l'intérieur de K et que $\{p \leq 1\}$ est l'adhérence de K.