Université Paris-Dauphine
M1

Année 2020/2021

Analyse convexe approfondie

Joseph Lehec

Table des matières

1 Ensembles convexes, sous-espaces affines, cônes convexes 2

2 Théorème de Carathéodory 4

3 Intérieur relatif d'un convexe 5

4 Théorèmes de séparation des convexes 8

5 Points extrémaux et théorème de Krein-Milman 11

6 Polarité 13

7 Optimisation linéaire 14

8 Fonctions convexes. Propriétés de continuité 18

9 Sous-gradient. Transformée de Legendre-Fenchel 20

10 Convexité et différentiabilité 23

11 Optimisation convexe 26

12 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker 28

13 Le théorème de John 30

14 Espaces vectoriels topologiques localement convexes 34

15 Le théorème de Hahn-Banach 36

16 Théorème de Krein-Milman en dimension infinie 40

17 Dualité et polarité en dimension infinie 41

Avant-propos

Ces notes sont inspirées des documents suivants :

- Barvinok, A course in Convexity,
- Boyd, Vandenberghe, Convex optimization.
- Rockafellar, Convex Analysis.
- Notes de cours Quentin Mérigot.
- Notes de cours de Stanislaw Szarek.
- Notes de cours de Nicolas Forcadel.

1 Ensembles convexes, sous-espaces affines, cônes convexes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pouvant être de dimension finie ou infinie. Lorsque que E est de dimension n on l'identifiera souvent (mais pas toujours) à $\mathbb{R}^n$.

Définition 1. Soit A un sous-ensemble de E.

1. On dit que A est *convexe* si pour tout $x, y \in A$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a $(1-t)x+ty \in A$. Autrement dit si x et y sont dans A alors le segment $[x, y]$ est inclus dans A.
2. On dit que A est un *sous-espace affine* si pour tout $x, y \in A$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $(1-t)x + ty \in A$. Autrement dit si x et y sont deux points distincts appartenant à A alors la droite passant par x et y est incluse dans A.
3. On dit que A est un *cône convexe* si pour tous $x, y \in A$ et tous $\lambda, \mu \geq 0$ on a $\lambda x + \mu y \in A$. Autrement dit le cône deux dimensionnel engendré par x et y est inclus dans A.

Lemme 2. *Un ensemble convexe est stable par combinaisons convexes. Si $x_1, \ldots, x_m \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ alors*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in A.$$

De plus la propriété analogue pour les sous-espaces affines et pour les cônes convexes est aussi vérifiée.

Démonstration. Raisonner par récurrence sur m. □

Donnons une première propriété élémentaire.

Proposition 3. *Une intersection quelconque d'ensembles convexes est convexe. De même pour les sous-espaces affines et les cônes convexes.*

Démonstration. C'est complètement évident d'après la définition. □

Exemples.
1. Si E est un espace vectoriel normé, c'est-à-dire muni d'une norme, alors les boules de E (ouvertes ou fermées) sont convexes.
2. Dans tout ce cours on notera $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Étant donné $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = t\}$ est appelé hyperplan affine. Il est facile de voir que c'est un espace affine. Il sépare l'espace en deux demi-espaces fermés : $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leq t\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \geq t\}$ qui sont tous les deux des ensembles convexes. Une intersection finies de demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^n$ sera appelée *polyèdre.* Un exemple de polyèdre est donné par l'hypercube $[-1,1]^n$, qui est aussi la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1\ldots n}\{|x_i|\}$.

La notion suivante est très importante.

Définition 4. Soit A une partie de E. On appelle *enveloppe convexe* de A, notée $\mathrm{conv}(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A. Noter que cette intersection est non vide puisque l'espace E tout entier est un ensemble convexe contenant A. L'enveloppe convexe de A est le plus petit (au sens de l'inclusion) ensemble convexe contenant A. On définit de même l'espace affine engendré par A et le cône convexe engendré par A, notés respectivement $\mathrm{aff}(A)$ et $\mathrm{pos}(A)$.

Remarque. Pour une raison qui m'échappe on trouve dans la littérature le terme d'enveloppe convexe mais pas celui d'enveloppe affine ou d'enveloppe conique. On parle donc d'espace affine engendré ou de cône engendré.

Proposition 5. *Soit A une partie de E. Alors* $\operatorname{conv}(A)$ *est égal à l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A. On a un résultat analogue pour l'espace affine engendré par A et le cône engendré par A.*

Démonstration. Soit C l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A. Alors C est convexe (facile) et contient A donc $\operatorname{conv}(A) \subset C$. Réciproquement, comme $\operatorname{conv}(A)$ est convexe et contient A il contient toutes les combinaisons convexes d'éléments de A. La démonstration est la même pour $\operatorname{aff}(A)$ et $\operatorname{pos}(A)$. □

Exemple. On appellera *polytope* l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$. Un polytope est donc un ensemble de la forme

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \colon \lambda_i \geq 0,\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

pour une certaine suite finie $x_1, \ldots, x_m$ de points de $\mathbb{R}^n$.

Un sous-espace affine n'est en fait rien d'autre que la translation d'un sous-espace vectoriel de E.

Lemme 6. *Si A est un sous-espace affine de E et $x \in A$ alors $A - x$ est un sous-espace vectoriel de E, qui de plus ne dépend pas de $x \in A$.*

Démonstration. Soit $x_0, x_1 \in A$ et $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ alors

$$x + \lambda_0(x_0 - x) + \lambda_1(x_1 - x) = (1 - \lambda_0 - \lambda_1)x + \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1$$

appartient à A comme combinaison affine d'éléments de A. Donc $\lambda_0(x_0 - x) + \lambda_1(x_1 - x) \in A - x$ ce qui montre que $A - x$ est un sous-espace vectoriel. Le fait que $A - x$ ne dépende pas de x est clair : si $a, x, y \in A$ alors $a - x + y \in A$ ce qui montre que $A - x = A - y$. □

On peut donc parler de la dimension d'un espace affine : c'est la dimension de l'espace vectoriel dont il est le translaté. On parlera aussi de dimension d'un ensemble convexe : c'est la dimension de l'espace affine engendré par ce convexe. Par exemple un segment dans le plan est de dimension 1, puisque l'espace affine engendré par ce segment est une droite. On dira aussi que $n+1$ points sont affinement indépendants si aucun de ces points n'appartient à l'espace affine engendré par les n autres, ou de manière équivalente, que l'espace affine engendré par ces $n+1$ points est de dimension n.

Exemple. On appelle simplexe de dimension n l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants. Par exemple un simplexe de dimension 1 est un segment, un simplexe de dimension 2 est un triangle et un simplexe de dimension 3 est un tétraèdre. Le simplexe

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \lambda_i \geq 0,\ \forall i \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$$

est appelé simplexe canonique de dimension n. Vu comme ça ce n'est pas totalement clair que Δ_n soit un simplexe, mais il est facile de voir que $\Delta_n = \operatorname{conv}(e_1, \ldots, e_{n+1})$ en notant (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Remarquer que Δ_n est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ mais que c'est un convexe de dimension n, puisque l'espace affine engendré par Δ_n est le sous-espace affine $\{\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$ qui est de dimension n.

Définition 7 (Somme de Minkowski)**.** Soient A, B des sous-ensembles de E, on pose

$$A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}.$$

Lemme 8. *La somme de Minkowski de deux ensembles convexes est encore convexe. De même pour les espaces affines et les cônes convexes.*

La démonstration est laissée en exercice (facile).
Il faut faire attention quand on manipule des sommes de Minkowski. Par exemple l'égalité $(a+b)A = aA + bA$ n'est pas toujours vraie. En effet l'inclusion $(a+b)A \subset aA + bA$ est évidente mais l'inclusion réciproque peut-être fausse. Par exemple si $A = [-2,-1] \cup [1,2]$, alors $A + A = [-4,-2] \cup [-1,1] \cup [2,4]$ et $2A = [-4,-2] \cup [2,4]$. En revanche ça marche si A est convexe comme le montre le lemme suivant.

Lemme 9. *Soient $a, b > 0$ et K un ensemble convexe. Alors*

$$aK + bK = (a+b)K.$$

Démonstration. Soient $x, y \in K$. Alors par convexité de K

$$\frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}y \in K,$$

et donc $ax + by \in (a+b)K$. Donc $aK + bK \subset (a+b)K$. L'inclusion réciproque est évidente. □

2 Théorème de Carathéodory

Il est assez facile de se convaincre que tout point de l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble A du plan peut s'écrire comme l'enveloppe convexe de trois points de A. Autrement dit la réunion des triangles dont les sommets sont dans A recouvre l'enveloppe convexe de A. C'est en fait un phénomène général appelé théorème de Carathéodory.

Théorème 10 (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Toute combinaison convexe d'éléments de A peut s'écrire comme combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de A.*

Commençons par montrer une version du théorème de Carathéodory pour les cônes convexes.

Lemme 11. *Soit E un espace vectoriel et $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de E. Alors x peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'une sous-famille libre des x_i. En particulier, si E est de dimension n, alors x peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'une sous-famille des x_i qui soit de taille au plus n.*

Remarque. Attention le résultat n'est pas totalement évident, on sait bien qu'on peut toujours transformer une combinaison linéaire en combinaison linéaire de vecteurs libres, mais ici on a une contrainte de positivité des coefficients.

Démonstration. Supposons que la famille $x_1, \dots, x_m$ est liée sinon il n'y a rien à faire. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$. On peut supposer qu'au moins un des α_i est strictement positif, quitte à les multiplier par -1 s'ils sont tous négatifs. On pose alors $\varepsilon = \min\{\lambda_i/\alpha_i,\ i \text{ tels que } \alpha_i > 0\}$ et on remarque que $x = \sum_{i=1}^N (\lambda_i - \varepsilon\alpha_i)x_i$, que les coefficients $\lambda_i - \varepsilon\alpha_i$ sont tous positifs, et que l'un d'entre eux au moins est nul (celui pour lequel le min est atteint). Donc on a bien écrit x comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'une sous-famille de $\{x_1, \dots, x_m\}$ de taille $m-1$ au plus. Soit cette sous-famille est libre et on a gagné, soit elle est liée mais on peut alors recommencer, jusqu'à tomber sur une sous-famille libre. □

Montrons maintenant que le théorème de Carthéodory se déduit de ce qui précède.

Démonstration du théorème de Carathéodory. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$. On "plonge" $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ en fixant la dernière coordonnée à 1 et on remarque l'équivalence suivante :

$$x \in \mathrm{conv}(A) \;\Leftrightarrow\; (x, 1) \in \mathrm{pos}(A \times \{1\}).$$

Cette équivalence est immédiate à démontrer analytiquement, mais il est recommandé de faire un dessin pour comprendre ce qui se passe. Donc si $x \in \mathrm{conv}(A)$ alors $(x, 1) \in \mathrm{pos}(A \times \{1\})$, et comme $A \times \{1\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$, le lemme précèdent montre que $(x, 1)$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'au plus $n+1$ éléments de $A \times \{1\}$. Et en ré-appliquant l'équivalence on en déduit alors que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $n + 1$ éléments de A. $\square$

Nous aurons besoin des conséquences suivantes du théorème de Carathéodory.

Corollaire 12. *L'enveloppe convexe d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est compacte.*

Remarque. En revanche l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas forcément fermée (voir TD).

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. D'après Carathéodory $\mathrm{conv}(A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons convexes de $n + 1$ éléments de A. Donc $\mathrm{conv}(A)$ est l'image de $\Delta_n \times A^{n+1}$ par l'application

$$(\lambda, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^n)^{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \mathbb{R}^n.$$

Cette application est continue, et si A est compact alors $\Delta_n \times A^{n+1}$ est compact. $\square$

Corollaire 13 (Lemme de Farkas)**.** *Le cône engendré par un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$ est fermé.*

Démonstration. On se donne $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. D'après le lemme de Carathéodory pour les cônes, le cône $\mathrm{pos}(x_1, \ldots, x_m)$ est égal à la réunion des cônes engendrés par les sous-familles libres des x_i. Comme une union finie de fermés est fermée il suffit donc de montrer que chacun de ces cônes est fermé. On peut donc supposer que la famille $x_1, \ldots, x_m$ est libre, ce qui implique en particulier $m \leq n$. Soit alors F le sous-espace vectoriel engendré par les x_i. L'application $\lambda \in \mathbb{R}^m \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in F$ est alors une application linéaire inversible entre deux espaces de dimension finie. Donc son inverse est continue, donc l'image d'un fermé par cette application est fermé. Donc $\mathrm{pos}(x_1, \ldots, x_m)$, qui est l'image de $(\mathbb{R}_+)^m$, est un fermé relatif de F. Mais comme F est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, il est fermé dans $\mathbb{R}^n$, et donc $\mathrm{pos}(x_1, \ldots, x_m)$ est aussi un fermé de $\mathbb{R}^m$. $\square$

3 Intérieur relatif d'un convexe

Un convexe de $\mathbb{R}^n$ peut très bien être d'intérieur vide, par exemple un segment dans le plan. Mais on aurait alors envie de définir l'intérieur du segment comme le segment privé de ses extrémités. La définition suivante permet de préciser cette notion.

Définition 14. Si K est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ on appelle *intérieur relatif* de K, noté $\mathrm{ri}(K)$, l'intérieur de K vu comme sous-ensemble de l'espace affine engendré par K. Autrement dit $\mathrm{ri}(K)$ est l'ensemble des x tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap F \subset K$ en notant $B(x, \varepsilon)$ la boule centrée en x et de rayon ε et F l'espace affine engendré par K.

Remarque. Si on note $B = B(0, 1)$ la boule unité et E l'espace vectoriel parallèle à F on peut reformuler cette définition de la manière suivante : $\mathrm{ri}(K)$ est l'ensemble des x tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + (\varepsilon B) \cap E \subset K$.

Exemple. Un segment $[x, y]$ inclus dans $\mathbb{R}^2$ est d'intérieur vide en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, mais en tant que sous-ensemble de la droite passant par x et y son intérieur est le segment ouvert $]x, y[$.

Bien sûr l'ensemble $\overline{K}\backslash\mathrm{ri}(K)$ est appelé bord relatif ou frontière relative de K, et on dit que K est relativement ouvert si $K = \mathrm{ri}(K)$. Il y a un petit piège à éviter avec l'intérieur relatif qui est que la propriété $K \subset L$ n'implique pas $\mathrm{ri}(K) \subset \mathrm{ri}(L)$. En effet si L est un carré et K est l'un des côtés du carré, les intérieurs relatifs de K et L sont même disjoints. Ceci est dû au fait que K et L n'engendrent pas le même espace affine. Si $K \subset L$ et que K et L engendrent le même espace affine alors $\mathrm{ri}(K) \subset \mathrm{ri}(L)$.

Théorème 15. *Soit K convexe de $\mathbb{R}^n$, l'adhérence de K et l'intérieur relatif de K sont aussi convexes. De plus pour tous $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$, $x_1 \in \overline{K}$ et $\lambda \in [0, 1[$ on a $(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in \mathrm{ri}(K)$.*

Démonstration. Le fait que l'adhérence d'un convexe est convexe se déduit facilement de la caractérisation séquentielle, les détails sont laissés en exercice. Le fait que $\mathrm{ri}(K)$ est convexe se déduit de la dernière partie du théorème, en l'appliquant à $x_1 \in \mathrm{ri}(K)$. Il suffit donc de montrer cette partie. On fixe $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$ et $x_1 \in \overline{K}$. On note F l'espace affine engendré par K et E l'espace vectoriel parallèle à F. On sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 + (\varepsilon B) \cap E \subset K$. De plus, comme $x_1 \in \overline{K}$, on a $x_1 \in K + \delta B$ pour tout $\delta > 0$, et même $x_1 \in K + (\delta B) \cap E$. En effet comme F est fermé et contient K on a $\overline{K} \subset F$. Donc $x_1 \in F$ et donc $x_1 - x \in E$ pour tout x de K. On fixe $\lambda \in [0, 1[$ et on pose $\delta = \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{1+\lambda}$. Remarquer que $\delta > 0$ puisque $\lambda < 1$. On a alors

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 + (\delta B) \cap E &\subset (1-\lambda)x_0 + \lambda(K + (\delta B) \cap E) + (\delta B) \cap E \\ &= (1-\lambda)(x_0 + (\varepsilon B) \cap E) + \lambda K \subset (1-\lambda)K + \lambda K = K.\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in \mathrm{ri}(K)$. □

Le résultat le plus important de cette section est le suivant.

Théorème 16. *Soit K un convexe inclus dans $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{K}$ et $\mathrm{ri}(K)$ sont des convexes qui engendrent tous les deux le même espace affine que K. En particulier si $K \neq \emptyset$ alors $\mathrm{ri}(K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. On a déjà vu que $\overline{K}$ et $\mathrm{ri}(K)$ étaient convexes. On note F l'espace affine engendré par K. Comme F est fermé et contient K, on a $F \supset \overline{K}$, ce qui montre que F est aussi l'espace affine engendré par $\overline{K}$. Montrons maintenant que $\mathrm{ri}(K)$ est non vide et engendre le même espace affine que K. On note m la dimension de F. Alors K contient $m+1$ points affinement indépendants $x_0, \dots, x_m$. Comme K est convexe il contient alors le simplexe engendré par ces $m+1$ points. Il suffit donc de montrer que ce simplexe est d'intérieur non vide dans F et que l'espace affine engendré par son intérieur est F. Quitte à tout translater on peut supposer que $x_0 = 0$. Alors F est un espace vectoriel de dimension m et $(x_1, \dots, x_m)$ est une famille libre d'éléments de F, donc une base de F. L'application

$$T\colon \lambda \in \mathbb{R}^m \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in F$$

est linéaire inversible, donc d'inverse continu. Donc l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par T est un ouvert de F. On note $e_1, \dots, e_m$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et Δ le simplexe $\mathrm{conv}(0, e_1, \dots, e_m)$. Alors $T\Delta = \mathrm{conv}(0, x_1, \dots, x_m)$. Il suffit donc de montrer que Δ est d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^m$ et que l'espace affine engendré par l'intérieur de

Δ est $\mathbb{R}^m$. Il est facile de voir que $\Delta = \cap_{i=1}^m \{x_i \geq 0\} \cap \{\sum_{i=1}^m x_i \leq 1\}$ et que l'intérieur de Δ est l'ensemble obtenu en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, ce qui montre déjà que Δ est d'intérieur non vide. De plus si on note u le vecteur $e_1 + \cdots + e_m$, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit l'intérieur de Δ contient les $m+1$ vecteurs $\varepsilon u, \varepsilon(u+e_1), \ldots, \varepsilon(u+e_m)$. Enfin il est facile de voir que ces $m+1$ vecteurs sont affinement indépendants, ce qui montre bien que l'espace affine engendré par ces vecteurs est $\mathbb{R}^m$ tout entier. □

Remarque. Ce théorème montre en particulier que $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)) = \mathrm{ri}(K)$, autrement dit que $\mathrm{ri}(K)$ est relativement ouvert, ce qui n'était pas complètement évident a priori. En effet si on appelle F l'espace affine engendré par K alors par définition $\mathrm{ri}(K)$ est l'intérieur de K en tant que sous-ensemble de F, en particulier $\mathrm{ri}(K)$ est un ouvert de F. Comme F est aussi l'espace affine engendré par $\mathrm{ri}(K)$, ceci montre que $\mathrm{ri}(K)$ est relativement ouvert.

Théorème 17. *Soit K un convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in K$. Alors $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$ si et seulement si pour tout $x \in K$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x_0 - \varepsilon x \in K$.*

Donc un point de $\mathrm{ri}(K)$ est un point x_0 tel que pour tout $x \in K$ on puisse prolonger un peu le segment $[x, x_0]$ au delà de x_0 sans sortir de K (faire un dessin). Cette caractérisation de l'intérieur relatif nous sera utile par la suite.

Démonstration. Par définition, si $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$ il existe $\delta > 0$ tel que $x_0 + (\delta B) \cap E \subset K$, en notant en notant E l'espace vectoriel parallèle à l'espace affine engendré par K. Si $x \in K$, alors $x_0 - x \in E$, et $\varepsilon(x_0 - x) \in \delta B$ si ε est suffisamment petit. Donc

$$(1+\varepsilon)x_0 - \varepsilon x = x_0 + \varepsilon(x_0 - x) \in x_0 + (\delta B) \cap E \subset K,$$

ce qui montre que x_0 vérifie la propriété cherchée. Montrons maintenant la réciproque. Comme $\mathrm{ri}(K) \neq \emptyset$ il existe $x_1 \in \mathrm{ri}(K)$. On applique ensuite l'hypothèse à $x = x_1$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x_0 - \varepsilon x_1 \in K$. On pose alors $z = (1+\varepsilon)x_0 - \varepsilon x_1$. On a $z \in K$, $x_1 \in \mathrm{ri}(K)$ et $x_0 = \frac{1}{1+\varepsilon} z + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x_1$. D'après le Théorème 15 ceci implique $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$. □

Il est évident que $\overline{\overline{K}} = \overline{K}$ et on a vu plus haut que $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)) = \mathrm{ri}(K)$. On peut se demander ce qui se passe quand on prend $\mathrm{ri}\left(\overline{K}\right)$ et $\overline{\mathrm{ri}(K)}$. C'est l'objet du résultat suivant.

Théorème 18. *Soit K un convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors $\overline{\mathrm{ri}(K)} = \overline{K}$ et $\mathrm{ri}\left(\overline{K}\right) = \mathrm{ri}(K)$. Autrement dit K et $\mathrm{ri}(K)$ ont la même adhérence, en particulier $\mathrm{ri}(K)$ est dense dans K, et K et $\overline{K}$ ont le même intérieur relatif.*

Démonstration. Comme $\mathrm{ri}(K) \subset K$ il est évident que $\overline{\mathrm{ri}(K)} \subset \overline{K}$. Pour la réciproque on utilise le fait qu'il existe $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$ et le Théorème 15. Pour tout x de $\overline{K}$ et pour tout entier $n \geq 1$, le point $\frac{1}{n}x_0 + (1 - \frac{1}{n})x$ appartient à $\mathrm{ri}(K)$. En faisant tendre n vers l'infini on voit que x est limite de points de $\mathrm{ri}(K)$ ce qui montre l'inclusion $\overline{K} \subset \overline{\mathrm{ri}(K)}$. Pour la deuxième égalité on commence par remarquer que comme K et $\overline{K}$ engendrent le même espace affine, l'inclusion $K \subset \overline{K}$ implique $\mathrm{ri}(K) \subset \mathrm{ri}\left(\overline{K}\right)$. Pour l'inclusion réciproque on se donne $x_0 \in \mathrm{ri}\left(\overline{K}\right)$ et $x_1 \in \mathrm{ri}(K)$. Alors $x_1 \in \overline{K}$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x_0 - \varepsilon x_1 \in \overline{K}$. On pose $z = (1+\varepsilon)x_0 - \varepsilon x_1$, on a $z \in \overline{K}$, $x_1 \in \mathrm{ri}(K)$ et $x_0 = \frac{1}{1+\varepsilon} z + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x_1$. D'après le Théorème 15, ceci implique $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$, ce qu'il fallait démontrer. □

On termine cette section par une propriété très utile.

Théorème 19. *Soit $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et K un convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathrm{ri}(AK) = A\,\mathrm{ri}(K)$. En particulier si K est relativement ouvert alors AK aussi.*

Remarque. Il faut noter que la propriété analogue serait fausse pour l'adhérence ou l'intérieur. En particulier, il n'est en général pas vrai que l'image d'un convexe fermé par une application linéaire est fermée. Par exemple la projection sur la première coordonnée de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\, y \geq 1/x\}$ est $]0, +\infty[$ (faire un dessin).

Démonstration. L'inclusion $A\,\mathrm{ri}(K) \subset \mathrm{ri}(AK)$ est une conséquence facile de la caractérisation de l'intérieur relatif donnée plus haut. En effet soit $y_0 \in A\,\mathrm{ri}(K)$ et soit $y \in AK$. Il existe $x_0 \in \mathrm{ri}(K)$ et $x \in K$ tels que $y_0 = Ax_0$ et $y = Ax$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x_0 - \varepsilon x \in K$. En appliquant A on obtient $(1+\varepsilon)y_0 - \varepsilon y \in AK$ ce qui montre que $y_0 \in \mathrm{ri}(AK)$. Pour la réciproque on peut procéder de la manière suivante. On remarque d'abord que pour tout ensemble U on a $A\overline{U} \subset \overline{AU}$. Ceci n'a rien à voir avec la convexité et se déduit simplement de la continuité de A, les détails sont laissés en exercice. En appliquant ceci à $U = \mathrm{ri}(K)$ et en utilisant le théorème qui précède on en déduit

$$AK \subset A\overline{K} = A\,\overline{\mathrm{ri}(K)} \subset \overline{A\,\mathrm{ri}(K)}.$$

Mais comme $\overline{A\,\mathrm{ri}(K)}$ est fermé ceci implique aussi $\overline{AK} \subset \overline{A\,\mathrm{ri}(K)}$ donc $\overline{AK} = \overline{A\,\mathrm{ri}(K)}$ puisque l'autre inclusion est triviale. On prend l'intérieur relatif de cette égalité et on réutilise le théorème qui précède, on obtient alors $\mathrm{ri}(AK) = \mathrm{ri}(A\,\mathrm{ri}(K))$, ce qui implique en particulier $\mathrm{ri}(AK) \subset A\,\mathrm{ri}(K)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 20. *Soient K_1 et K_2 deux convexes inclus dans $\mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{ri}(K_1 + K_2) = \mathrm{ri}(K_1) + \mathrm{ri}(K_2)$. En particulier si K_1 et K_2 sont relativement ouverts tous les deux alors $K_1 + K_2$ aussi.*

Remarque. Les ouverts vérifient une propriété plus forte : il suffit que l'un des deux ensembles soit ouvert pour que la somme le soit, et ils n'ont d'ailleurs pas besoin d'être convexes. En revanche, pour les fermés la propriété est fausse, il n'est pas vrai en général que la somme de deux convexes fermés est fermée.

Démonstration. On considère l'ensemble $K_1 \times K_2$, qui est un convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et on montre facilement que $\mathrm{ri}(K_1 \times K_2) = \mathrm{ri}(K_1) \times \mathrm{ri}(K_2)$. On combine ensuite cette propriété avec le théorème précédent appliqué au convexe $K_1 \times K_2$ et à l'application linéaire $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto x + y \in \mathbb{R}^n$. Les détails sont laissés en exercice. □

4 Théorèmes de séparation des convexes

On note $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est notée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. On va montrer dans cette section plusieurs résultats de séparation des convexes. Ils sont tous basés sur le théorème suivant.

Théorème 21 (Projection sur un convexe)**.** *Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe un unique $\overline{x_0} \in K$ qui minimise la distance à x_0. De plus le point $\overline{x_0}$ est caractérisé par la propriété suivante*

$$\langle x_0 - \overline{x_0}, x - \overline{x_0}\rangle \leq 0, \quad \forall x \in K.$$

Démonstration. On ne donne qu'un schéma de preuve, ce résultat ayant été vu au premier semestre en analyse fonctionnelle. En utilisant l'égalité du parallélogramme et la convexité de K on montre que n'importe quelle suite minimisante pour ce problème est automatiquement de Cauchy, donc convergente. Ceci permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème. Pour la condition d'optimalité, en écrivant $\|x - x_0\|^2 = \|x - \overline{x_0} + \overline{x_0} - x_0\|^2$, en développant le carré de la norme et en utilisant la condition proposée, on voit tout de suite que celle-ci est suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire il faut faire un développement limité quand ε tend vers 0 de $\|x_0 - ((1-\varepsilon)\overline{x_0} + \varepsilon x)\,\|^2$. □

Rappelons qu'on appelle hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle = \alpha\}$ pour un certain vecteur y non nul et un réel α. Il sépare l'espace en deux demi-espaces fermés :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle \geq \alpha\}.$$

Corollaire 22. *Soit K un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, différent de $\mathbb{R}^n$. Alors K est contenu dans un demi-espace fermé. Si de plus K est fermé, alors K est égal à l'intersection de tous les demi-espaces fermés le contenant.*

Démonstration. On commence par remarquer que si K est convexe différent de $\mathbb{R}^n$ alors $\overline{K}$ aussi. En effet on a vu à la section précédente que $\overline{K}$ est un convexe possédant le même intérieur relatif que K. Donc si $\overline{K} = \mathbb{R}^n$ alors $\mathrm{ri}(K) = \mathrm{ri}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ donc $K = \mathbb{R}^n$. De plus si $\overline{K}$ est contenu dans un demi-espace fermé alors K aussi. Donc il suffit de montrer la première partie du lemme dans le cas où K est fermé. On suppose donc K convexe, fermé et différent de $\mathbb{R}^n$ et on se donne soit $x_0 \notin K$. On note $\overline{x_0}$ le projeté orthogonal de x_0 sur K. Par hypothèse $x_0 - \overline{x_0} \neq 0$. La propriété caractéristique du projeté montre alors que le demi-espace

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, x_0 - \overline{x_0}\rangle \leq \langle \overline{x_0}, x_0 - \overline{x}_0\rangle\}$$

contient K et pas x_0. Soit L l'intersection des demi-espaces fermés contenant K. Alors L est bien défini, et ce qui précède montre que $x_0 \notin K \Rightarrow x_0 \notin L$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit $L \subset K$, ce qui donne le résultat cherché puisque l'inclusion $K \subset L$ est triviale. $\square$

Théorème 23. *Soit K un convexe et soit x_0 un point n'appartenant pas à K. Alors, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle y, x_0\rangle \leq \langle y, x\rangle$ pour tout x de K et tel que l'inégalité soit stricte pour au moins un élément x de K. De plus l'inégalité est alors stricte pour tous les points de l'intérieur relatif de K. En particulier si K est relativement ouvert on a $\langle y, x_0\rangle < \langle y, x\rangle$ pour tout x de K.*

Démonstration. Quitte à translater on peut supposer que $x_0 = 0$. On pose $E = \mathrm{vect}(K)$ et $C = \mathrm{pos}(K)$. On a bien sûr $C \subset E$, montrons que $C \neq E$. Comme K est convexe on a $C = \cup_{\lambda \geq 0} \lambda K$. Si x appartient à C et est non nul, alors il existe $\lambda_0 > 0$ et $x_0 \in K$ tel que $\lambda_0 x_0 = x$. Si $-x$ appartenait aussi à C on aurait $-x = \lambda_1 x_1$ avec $\lambda_1 > 0$ et $x_1 \in K$, mais on aurait alors $0 = \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1}(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1)$, donc $0 \in K$ par convexité de K ce qui contredirait l'hypothèse. Donc si x appartient à C et est non nul alors $-x \notin C$, ce qui montre en particulier que $C \neq E$. Comme C est un convexe inclus dans E distinct de E, le résultat précédent montre qu'il est contenu dans un demi-espace fermé de E. Il existe $y \in E$ non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\langle y, x\rangle \geq \alpha$ pour tout x de C. On en déduit en particulier $\langle y, \lambda x\rangle \geq \alpha$ pour tout x de K et tout $\lambda \geq 0$. En faisant tendre λ vers $+\infty$ on en déduit $\langle y, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in K$. Montrons maintenant que l'inégalité est stricte pour au moins un point de K. Si ce n'était pas le cas on aurait $\langle y, x\rangle = 0$ pour tout $x \in K$, c'est-à-dire $y \in K^\perp$ et dont $y \in E^\perp$, puisque $E = \mathrm{vect}(K)$. Comme $y \in E$ ceci impliquerait $y = 0$, ce qui donnerait une contradiction.
Montrons maintenant qu'on a $\langle y, x\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathrm{ri}(K)$. On sait qu'il existe $x_1 \in K$ tel que $\langle y, x_1\rangle > 0$. Si $x \in \mathrm{ri}(K)$, alors d'après le Théorème 17 il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x - \varepsilon x_1 \in K$. Donc $\langle y, (1+\varepsilon)x - \varepsilon x_1\rangle \geq 0$, donc $\langle y, x\rangle \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\langle y, x_1\rangle > 0$, ce qui est le résultat. $\square$

On donne maintenant une conséquence très utile de ce dernier théorème.

Corollaire 24 (Hyperplan d'appui)**.** *Soit K un convexe et x_0 un point appartenant au bord relatif de K. Il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle y, x\rangle \leq \langle y, x_0\rangle$ pour tout x de K et tel que l'inégalité soit stricte pour $x \in \mathrm{ri}(K)$. On dit que l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle = \langle y, x_0\rangle\}$ est un hyperplan d'appui de K en x_0.*

Démonstration. Comme $x_0 \notin \mathrm{ri}(K)$ et que $\mathrm{ri}(K)$ est un convexe relativement ouvert, le théorème précédent montre qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle y, x\rangle < \langle y, x_0\rangle$ pour tout $x \in ri(K)$. Mais tout point de K est limite d'une suite d'éléments de $\mathrm{ri}(K)$, donc l'inégalité précédente reste vraie au sens large pour les x de K. □

On va maintenant séparer deux convexes K_1 et K_2 et plus seulement un point et un convexe. Il y a plusieurs notions possibles de séparation. On va en considérer pour l'instant deux :

1. Il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle y, x_1\rangle \leq \langle y, x_2\rangle$ pour tout couple $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ et tel que l'inégalité soit stricte pour au moins un couple $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$.
2. Il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sup_{x\in K_1}\langle y, x\rangle < \inf_{x\in K_2}\langle y, x\rangle$.

La propriété de séparation 1 est en général appelée séparation *propre* dans la littérature. La propriété 2 sera appelée ici séparation *forte*.

Théorème 25. *Soient K_1 et K_2 deux convexes de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Si $\mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2) = \emptyset$ alors K_1 et K_2 peuvent être séparés proprement.*
2. *Si $\inf\{\|x_1 - x_2\| \colon (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2\} > 0$ alors K_1 et K_2 peuvent être séparés fortement.*

Démonstration. 1. On pose $C = \mathrm{ri}(K_1) - \mathrm{ri}(K_2)$. Alors C est convexe $0 \notin C$ par hypothèse. D'après le Théorème 23 il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle y, x\rangle \leq 0$ pour tout x de C, avec inégalité stricte pour au moins un x. Autrement dit $\langle y, x_1\rangle \leq \langle y, x_2\rangle$ pour tout couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{ri}(K_1) \times \mathrm{ri}(K_2)$, avec inégalité stricte pour au moins un couple (x_1, x_2). Encore une fois comme $\mathrm{ri}(K_1)$ est dense dans K_1 et de même pour K_2, l'inégalité précédente est aussi vraie au sens large pour tout $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ ce qui montre la propriété de séparation propre.
2. On pose cette fois $C = \overline{K_1 - K_2}$. Alors C est un convexe fermé, et l'hypothèse montre que $0 \notin C$. En effet, si avait $0 \in C$, alors il existerait deux suites $(x_{1,n})$ et $(x_{2,n})$ appartenant à K_1 et K_2 respectivement et vérifiant $x_{1,n} - x_{2,n} \to 0$, ce qui contredirait l'hypothèse. Par conséquent il existe un demi-espace fermé contenant C mais pas 0. Donc il existe $y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$ tel que $\langle y, x\rangle \geq \alpha$ pour tout $x \in C$, ce qui implique en particulier $\langle y, x_1\rangle \geq \alpha + \langle y, x_2\rangle$ pour tout $x_1 \in K_1$ et tout $x_2 \in K_2$. En prenant le sup en x_2 et l'inf en x_1 on obtient la propriété de séparation forte. □

Remarques.
1. On peut montrer que les réciproques des deux énoncés sont aussi vraies.
2. L'hypothèse du cas 2 est en particulier vérifiée si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, que l'un des convexes est compact et l'autre fermé. On l'emploie souvent dans ce cas.

On considère maintenant une autre propriété de séparation naturelle : il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle y, x_1\rangle < \langle y, x_2\rangle$ pour tout $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$. Celle-ci ne semble pas avoir de nom bien établi. Dans la suite on l'appellera séparation *stricte*. Remarquer que cette séparation se situe entre les séparations propre et forte. Par exemple, dans le Théorème 23 ci-dessus, on a vu que la propriété de séparation stricte est vraie si K_1 est relativement ouvert et K_2 est un singleton hors de K_1. Une condition nécessaire pour avoir cette séparation est bien évidemment que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ mais elle n'est pas suffisante, même si l'un des deux convexes est un singleton. Un contre-exemple est de prendre pour K_1 un demi-espace ouvert auquel on ajoute un point du bord et K_2 le singleton constitué d'un autre point du bord de K_1.

Théorème 26. *Soient K_1 et K_2 deux convexes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. On peut séparer K_1 et K_2 strictement dans chacun des deux cas suivants :*

1. *L'un des deux convexes est ouvert ;*

2. *Les deux convexes sont relativement ouverts.*

Démonstration. On sait que $K_1 - K_2$ est un convexe ne contenant pas 0. De plus $K_1 - K_2$ est relativement ouvert dans les cas 1 et 2. En effet dans le cas 1 il est ouvert (donc relativement ouvert) puisque K_1 ou K_2 est ouvert. Dans le cas 2, il est relativement ouvert puisque K_1 et K_2 le sont tous les deux (Corollaire 20). D'après le Théorème 23, il existe alors $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle y, x \rangle > 0$ pour tout $x \in K_1 - K_1$ ce qui montre la propriété de séparation stricte pour K_1 et K_2. □

Le corollaire suivant est un résultat très classique.

Corollaire 27. *Soit K un convexe relativement ouvert et F un sous-espace affine ne rencontrant pas K. Alors il existe un hyperplan affine contenant F et ne rencontrant pas K.*

Démonstration. Quitte à translater K et F, on peut supposer $0 \in F$, donc que F est un sous-espace vectoriel. Comme K et F sont des convexes relativement ouverts ne s'intersectant pas, la partie 2 du théorème précédent montre qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle y, x \rangle < \langle y, x' \rangle$ pour tout $(x, x') \in F \times K$. Ceci implique en particulier que la forme linéaire $x \mapsto \langle y, x \rangle$ est majorée sur F. Comme F est un espace vectoriel ceci n'est possible que si elle est nulle sur F, c'est-à-dire si $F \subset y^\perp$. D'un autre côté comme $0 \in F$, on a $\langle y, x' \rangle > 0$ pour tout x' de K. Donc l'hyperplan $y^\perp$ contient F et ne rencontre pas K. □

5 Points extrémaux et théorème de Krein-Milman

Définition 28. Soit E un espace vectoriel et soit K un sous-ensemble convexe de E. On dit que $x \in K$ est un point extrémal de K si pour tout vecteur $v \neq 0$ de E on a $x + v \notin K$ ou $x - v \notin K$.

Remarque. Comme on l'a vu en TD, un point x de K est extrémal si et seulement si $K \backslash \{x\}$ est convexe.

Exemples. Si $K = [-1, 1]^3$ les points extrémaux de K sont les sommets du cube. Si B est la boule euclidienne, tous les points du bord de B sont extrémaux.

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 29 (Krein-Milman)**.** *Soit K un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$. Alors K est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Remarques.

1. L'hypothèse de compacité est nécessaire. Par exemple un demi-espace ne possède aucun point extrémal donc il ne peut pas être égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. De même, il est facile de voir qu'un convexe ouvert ne possède aucun point extrémal.
2. Le résultat montre en particulier que l'enveloppe convexe des points extrémaux de K est automatiquement compacte, puisqu'elle est égale à K. Ce n'était pas évident a priori puisque l'ensemble des points extrémaux de K n'est pas forcément compact, même si K est compact. Plus précisément il est compact en dimension 1 et 2 mais il y a des contre-exemples à partir de la dimension 3.

La démonstration repose sur le résultat intermédiaire suivant.

Lemme 30. *Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, soit x_0 un point du bord relatif de K et soit H un hyperplan d'appui de K en x_0. Alors les points extrémaux de $K \cap H$ sont aussi des points extrémaux de K.*

Démonstration. Il existe $y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle = \alpha\}$ et K soit inclus dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle \leq \alpha\}$. Soit x_1 un point extrémal de $K \cap H$ et soit $v \in E$ un vecteur non nul. On doit montrer que $x_1 + v \notin K$ ou $x_1 - v \notin K$. Si $\langle y, v\rangle > 0$ alors $\langle y, x_0 + v\rangle > \alpha$ donc $x_0 + v \notin K$. Si $\langle y, v\rangle < 0$ alors $x_0 - v \notin K$ pour les mêmes raisons. Donc on peut supposer $\langle v, y\rangle = 0$. Donc v appartient à $y^\perp$ qui est l'espace vectoriel parallèle à H. Par hypothèse on a alors $x_1 + v \notin K \cap H$ ou $x_1 - v \notin K \cap H$. Mais comme $v \in y^\perp$, les points $x_1 + v$ et $x_1 - v$ appartiennent tous les deux à H, et on en déduit $x_1 + v \notin K$ ou $x_1 - v \notin K$ ce qui est le résultat cherché. □

Démonstration de Krein-Milman. On raisonne par récurrence sur la dimension. En dimension 0 le résultat est tautologique. En dimension 1 il est évident : un convexe compact de dimension 1 est un segment fermé borné. Ses points extrémaux sont ses deux extrémités et le segment est bien égal à l'enveloppe convexe de ses extrémités. On se place sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ et on suppose que le résultat est vrai en toute dimension inférieure ou égale à $n-1$. On suppose que K est d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$, sinon K est inclus dans un sous-espace affine de dimension inférieure ou égale à $n-1$ et le résultat est donné par l'hypothèse de récurrence. Soit $x \in K$, on veut montrer que x s'écrit comme combinaison convexe des points extrémaux de K. Si x est dans l'intérieur de K, on fixe un point x_0 arbitraire de la frontière et on trace la droite D passant par x_0 et x. Comme K est compact, elle rencontre la frontière de K en un deuxième point x_1, et on a $x \in [x_0, x_1]$. Supposons que x_0 et x_1 s'écrivent tous deux comme des combinaisons convexes de points extrémaux de K. Alors ce sera aussi le cas de x puisque x est une combinaison convexe de x_0 et x_1. Ce raisonnement montre qu'il suffit de montrer le résultat pour $x \in \partial K$. Si $x \in \partial K$, alors K admet un hyperplan d'appui H en x. L'hyperplan H est de dimension $n-1$ et $K \cap H$ est un convexe compact de H. D'après l'hypothèse de récurrence x s'écrit comme combinaison convexe des points extrémaux de $K \cap H$. Mais d'après le lemme précédent les les points extrémaux de $K \cap H$ sont aussi des points extrémaux de K, ce qui termine la démonstration. □

Donnons tout de suite un exemple d'application. Rappelons qu'on appelle polyèdre un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui soit une intersection finie de demi-espaces fermés.

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, y_i\rangle \leq a_i\}\,. \tag{1}$$

On commence par s'intéresser aux points extrémaux d'un polyèdre.

Proposition 31. *Soit x un point du polyèdre K défini par (1). Alors x est un point extrémal de K si et seulement si l'espace vectoriel engendré par les y_i pour lesquels on a $\langle x, y_i\rangle = a_i$ est égal à $\mathbb{R}^n$. En particulier K possède au plus $\binom{m}{n}$ points extrémaux.*

Démonstration. Rappelons qu'un point x est extrémal si pour tout vecteur non nul u au moins l'un des deux points $x + u$ et $x - u$ est en dehors de K. Soit x un point de K, on note I l'ensemble des i pour lesquels $\langle x, y_i\rangle = a_i$. Si les $(y_i)_{i\in I}$ n'engendrent pas $\mathbb{R}^n$ il existe un vecteur u non nul qui leur est orthogonal. Notons alors que dans ce cas $\langle x + tu, y_i\rangle = \langle x, u_i\rangle = a_i$ pour tout $i \in I$. Pour $i \notin I$ on a $\langle x, y_i\rangle < a_i$, et donc par continuité $\langle x + tu, y_i\rangle \leq a_i$ pour t suffisamment proche de 0. Donc pour t suffisamment proche de 0, on a $x + tu \in K$ et $x - tu \in K$ ce qui montre que x n'est pas un point extrémal. En prenant la contraposée de ce qu'on vient de montrer on en déduit que si x est extrémal alors les $(y_i)_{i\in I}$ engendrent $\mathbb{R}^n$. Réciproquement si les $(y_i)_{i\in I}$ engendrent $\mathbb{R}^n$, pour tout vecteur $u \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $\langle y_i, u\rangle \neq 0$. Si $\langle y_i, u\rangle > 0$ alors $\langle x + u, y_i\rangle > a_i$ donc $x + u \notin K$. Si au contraire $\langle y_i, u\rangle < 0$ alors $x - u \notin K$ ce qui montre que x est un point extrémal, ce qui termine la démonstration de la première partie de la proposition.
Montrons la deuxième partie. D'après ce qui précède tout point extrémal est solution d'un

système d'un certain nombres d'équations $\langle y_i, x\rangle = a_i$ qui soient telles que les y_i engendrent $\mathbb{R}^n$. Il y a donc au moins n équations, et quitte à écarter celles qui sont redondantes on peut supposer qu'il y en a exactement n. Pour chacun de ces systèmes de n équations, il y a exactement une solution. Donc le nombre de points extrémaux de K est au plus égal au nombre de systèmes de n équations libres qu'on peut faire avec les contraintes définissant K, donc au plus $\binom{m}{n}$. □

Corollaire 32. *Tout polyèdre borné est un polytope, c'est-à-dire qu'il est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.*

Remarque. Le résultat est bien sûr faux si on ne suppose pas le polytope borné, par exemple un demi-espace n'est pas l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Démonstration. Par hypothèse, un polyèdre est fermé, donc un polyèdre borné est compact. C'est donc l'enveloppe convexe de ses points extrémaux par Krein-Milman. Or d'après ce qui précède il ne possède qu'un nombre fini de points extrémaux. □

6 Polarité

On rappelle que si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ on note $A^\perp$ l'espace orthogonal à A

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in A\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En reprenant l'orthogonal on obtient $(A^\perp)^\perp = \mathrm{vect}(A)$. En particulier si F est un sous-espace vectoriel on a $(F^\perp)^\perp = F$. Dans cette section on va définir une dualité similaire pour les ensembles convexes et les cônes convexes.

Définition 33. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On appelle *polaire* de A l'ensemble

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, y\rangle \le 1,\ \forall y \in A\}.$$

On appelle cône dual de A l'enssemble

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, y\rangle \ge 0,\ \forall y \in A\}.$$

Remarque. Attention le sens dans l'inégalité n'est pas le même pour le polaire ou le cône dual.

Exemple. Si K est la boule unité fermée d'une certaine norme sur $\mathbb{R}^n$ alors K° est la boule unité de la norme duale. Par exemple pour $p \in [1; +\infty]$, on note B_p^n la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. Alors $(B_p^n)^\circ = B_q^n$ en notant q l'exposant conjugué de p, donné par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En particulier la boule euclidienne B_2^n est son propre dual : $(B_2^n)^\circ = B_2^n$.

Proposition 34. *Soient A, B deux sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.*

1. *L'ensemble A° est convexe, fermé et contient 0.*
2. *L'ensemble A^* est un cône convexe fermé.*
3. *Si $A \subset B$ alors $B^\circ \subset A^\circ$ et $B^* \subset A^*$.*
4. *Si $\lambda > 0$ alors $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$.*

Démonstration. L'ensemble

$$A^\circ = \bigcap_{y \in A} \{\langle x, y\rangle \le 1\}$$

est une intersection de demi-espaces fermés contenant 0 ce qui montre que A° est convexe, fermé et contient 0. La démonstration est similaire pour A^*. Les propriétés 3 et 4 sont laissées en exercice (facile). □

Comme pour l'orthogonal on s'intéresse maintenant à ce qui se passe quand on prend le polaire du polaire. Il est immédiat d'après la définition que $A \subset A^{\circ\circ}$ et que $A \subset A^{**}$. C'est l'inclusion réciproque qui est intéressante.

Théorème 35 (Théorème du bipolaire, ou du bidual)**.** *On a $A^{\circ\circ} = A$ si et seulement si A est convexe, fermé et contient 0. De même $A^{**} = A$ si et seulement si A est un cône convexe fermé.*

Démonstration. On montre le résultat pour les cônes. Le sens direct est immédiat : A^{**} est toujours un cône fermé puisque c'est le cône dual de A^*. Donc si $A = A^{**}$ alors A est un cône fermé. C'est la réciproque qui est non triviale. On suppose que A est un cône fermé. On sait déjà que $A \subset A^{**}$, on veut montrer l'inclusion réciproque. On va raisonner par contraposée et montrer que $\mathbb{R}^n \backslash A \subset \mathbb{R}^n \backslash A^{**}$. On se donne donc $x_0 \notin A$. Comme A est convexe fermé, il existe un demi-espace fermé contenant A et pas x_0 : il existe $y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\langle y, x \rangle \geq \alpha$ pour tout x de C et $\langle y, x_0 \rangle < \alpha$. Comme $0 \in A$ on a $\alpha \leq 0$ et donc $\langle y, x_0 \rangle < 0$. D'un autre côté, puisque A est un cône, si $x \in A$ alors $\lambda x \in A$ pour tout $\lambda > 0$. En faisant tendre λ vers $+\infty$ dans l'inégalité $\langle y, \lambda x \rangle \geq \alpha$ on trouve $\langle y, x \rangle \geq 0$, pour tout x de A. On a donc $y \in A^*$ et $\langle y, x_0 \rangle < 0$ ce qui montre que $x_0 \notin A^{**}$, ce qu'il fallait démontrer.
La preuve pour la polarité des convexes est très similaire et on la laisse en exercice. $\square$

Remarque. La même démonstration montre que de manière générale on a $A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}$ et $A^{**} = \overline{\mathrm{pos}(A)}$.

Donnons un exemple d'application. Rappelons qu'on appelle polytope l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$ et polyèdre l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. On a vu (Corollaire 32) que tout polyèdre borné était un polytope. On va maintenant montrer la réciproque.

Théorème 36. *Tout polytope est un polyèdre : l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme l'intersection finie de demi-espace fermés.*

Démonstration. Soit $A = \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_m)$ un polytope de $\mathbb{R}^n$. Quitte à translater A et à se restreindre à l'espace vectoriel engendré par A on peut supposer que 0 appartient à l'intérieur de A. Alors A° est borné. En effet on a $\varepsilon B_2^n \subset A$ pour un certain $\varepsilon > 0$ donc $A^\circ \subset (\varepsilon B_2^n)^\circ = \frac{1}{\varepsilon} B_2^n$. Par ailleurs comme $A = \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_m)$ on a $A^\circ = \cap_{i=1}^m \{x_i\}^\circ = \cap_{i=1}^m \{\langle x, x_i \rangle \leq 1\}$. Donc A° est un polyèdre borné. D'après le Corollaire 32, A° est un polytope : il existe $y_1, \ldots, y_k$ tels que $A^\circ = \mathrm{conv}(y_1, \ldots, y_k)$. Comme A est un convexe fermé (rappelons que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte donc fermée) contenant 0 il est égal à son bipolaire. Donc $A = A^{\circ\circ} = \cap_{i=1}^k \{\langle x, y_i \rangle \leq 1\}$ ce qui montre bien que A est un polyèdre. $\square$

7 Optimisation linéaire

On appelle problème d'optimisation linéaire un problème de minimisation d'une forme linéaire sur un polyèdre. Rappelons qu'on appelle polyèdre une intersection finie de demi-espaces fermés. On introduit la notation suivante : pour $x \in \mathbb{R}^n$ on écrit $x \geq 0$ si x appartient à $\mathbb{R}_+^n$. Remarquer que le cône des vecteurs à coefficients positifs vérifie la propriété suivante :

$$x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \geq 0,\ \langle x, y \rangle \geq 0.$$

Autrement dit il est égal à son cône dual. Plus généralement on écrira $x \leq y$ si si $y - x$ appartient à $\mathbb{R}_+^n$, ce qui définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$. Un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ s'écrit alors

$\{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ pour une certaine matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur b de $\mathbb{R}^m$. Un problème d'optimisation linéaire est donc un problème de la forme

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \langle x, a \rangle \\ \text{sous contraintes} & Ax \leq b \end{array} \tag{2}$$

On dit que le problème est *réalisable* lorsque l'ensemble des x vérifiant la contrainte n'est pas vide. On appelle alors *valeur* du problème l'infimum des $\langle x, c \rangle$ parmi les x vérifiant les contraintes (cet infimum peut valoir $-\infty$) et on dit que x est une solution du problème si cet infimum est atteint en x. Si le problème n'est pas réalisable on dit par convention que sa valeur est $+\infty$.
Pour un certain nombre de raisons on aime bien que le polyèdre soit présenté comme l'intersection du cône des vecteurs positifs et d'un sous-espace affine, ce qui donne un problème ayant cette allure :

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \langle x, a \rangle \\ \text{sous contraintes} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{3}$$

On dira que le problème est sous forme canonique. Le problème initial peut toujours se mettre sous forme canonique, quitte à augmenter la dimension de l'espace. En effet on remarque qu'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme la différence de deux vecteurs positifs. Par ailleurs, une contrainte $Ax \leq b$ peut s'écrire $Ax - y = b$ avec $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$. Donc le problème (2) est équivalent à

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \langle x_1 - x_2, a \rangle \\ \text{sous contraintes} & Ax_1 - Ax_2 - y = b \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ y \geq 0, \end{array}$$

qui est le problème canonique (3) en dimension $2n + m$: si on pose

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix}, \quad \widetilde{a} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & -A & -I_m \end{pmatrix},$$

en notant I_m la matrice identité en dimension m, le problème s'écrit

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \langle \widetilde{a}, \widetilde{x} \rangle \\ \text{sous contraintes} & \widetilde{A}\widetilde{x} = b \\ & \widetilde{x} \geq 0. \end{array}$$

Donnons tout de suite un premier résultat.

Théorème 37. *Si le problème est réalisable et que sa valeur est finie alors le problème admet une solution. Autrement dit une forme linéaire minorée sur un polyèdre atteint son minimum.*

Remarque. Il faut bien voir que le polyèdre n'est pas supposé borné donc le résultat n'est pas totalement trivial. Notons en particulier que le résultat serait faux pour un convexe fermé général. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $K = \{(x, y) \colon x > 0, y \geq 1/x\}$ est un convexe fermé. L'infimum de $(x, y) \mapsto x$ sur K est 0, mais cet infimum n'est pas atteint.

Démonstration. D'après ce qui précède on peut supposer que le problème est sous forme canonique (3). On pose $C = \{(Ax, \langle x, a \rangle) \colon x \geq 0\}$. Alors C est le cône convexe de $\mathbb{R}^{m+1}$ engendré par les vecteurs $(Ae_i, \langle e_i, a \rangle)$ pour $i = 1, \ldots, n$, en notant $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En particulier c'est un cône engendré par un nombre fini de vecteurs, donc il est fermé. Par conséquent l'ensemble $I = \{t \in \mathbb{R} \colon (b,t) \in C\}$ est aussi fermé. Par définition si le problème est réalisable alors I est non vide, et la valeur du problème est $\inf\{I\}$. Si cet inf n'est pas $-\infty$, il appartient alors à I, ce qui montre que le problème a une solution. $\square$

On va maintenant voir qu'on peut associer à tout problème d'optimisation linéaire un problème dual. Pour ce faire on remarque d'abord qu'étant donné $z \in \mathbb{R}^m$ on a

$$\sup_{y \geq 0}\{\langle z, y\rangle\} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent la valeur du problème (2) peut se récrire comme

$$\inf_{Ax \leq b}\{\langle a, x\rangle\} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \geq 0}\{\langle a, x\rangle + \langle y, Ax - b\rangle\}.$$

Le problème dual est essentiellement le problème qu'on obtient en échangeant le sup et l'inf dans l'expression qui précède. En faisant quelques calculs on tombe finalement sur la notion suivante.

Définition 38. Étant donné le problème d'optimisation linéaire (2), on définit son problème dual de la manière suivante :

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & \langle y, b\rangle \\ \text{sous contraintes} & A^T y = a \\ & y \leq 0. \end{array}$$

Lorsque le problème est sous forme canonique (3) son dual est le problème

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & \langle y, b\rangle \\ \text{sous contraintes} & A^T y \leq a. \end{array} \tag{4}$$

Le problème dual est donc encore un problème d'optimisation linéaire, mais c'est un problème de maximisation et non plus de minimisation. Pour cette raison, s'il n'est pas réalisable sa valeur est par convention $-\infty$. Évidemment, le théorème précédent reste valable : s'il est réalisable et que sa valeur est finie, alors il admet une solution. Le problème initial sera dorénavant appelé problème primal.

Lemme 39. *En appelant α et α^* les valeurs respectives des problèmes primal et dual, on a $\alpha^* \leq \alpha$.*

Démonstration. On peut supposer que le problème primal est sous forme canonique (3). L'inégalité est trivialement vérifiée dès que l'un des deux problèmes n'est pas réalisable, donc on peut aussi supposer qu'ils le sont tous les deux. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $x \geq 0$ et $Ax = b$ et soit $y \in \mathbb{R}^m$ vérifiant $A^T y \leq a$. Alors x et $-A^T y + a$ sont tous les deux à coordonnées positives, donc $\langle x, -A^* y + a\rangle \geq 0$. On en déduit donc

$$\langle a, y\rangle = \langle Ax, y\rangle \leq \langle x, b\rangle.$$

En prenant l'inf en x et le sup en y on obtient le résultat cherché. $\square$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 40. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les deux problèmes sont réalisables,*

2. *Le problème primal admet une solution,*
3. *Le problème dual admet une solution.*

De plus lorsque ces conditions sont réalisées les deux problèmes ont la même valeur.

Démonstration. Montrons $1 \Rightarrow 2$. Si 1 est vérifiée alors le problème primal est réalisable et sa valeur n'est pas $-\infty$, puisque d'après le lemme précédent cette valeur est minorée par la valeur du problème dual et que ce dernier est supposé réalisable. D'après le Théorème 37 on en déduit que le problème primal admet une solution.
Montrons $2 \Rightarrow 3$ et que les deux valeurs α et α^* sont égales. On peut supposer que le problème primal est sous forme canonique. On rappelle que le cône $C = \{(Ax, \langle x, a\rangle) \colon x \geq 0\}$ est fermé. On fixe $\varepsilon > 0$. Par définition de α, le point $(b, \alpha - \varepsilon)$ n'appartient pas à C. Comme C est un cône fermé, le théorème du bidual montre qu'il existe il existe $(y, s) \in C^*$ tel que $\langle y, a\rangle + s(\alpha - \varepsilon) < 0$. D'un autre côté $(a, \alpha) \in C$ donc $\langle y, a\rangle + s\alpha \geq 0$. Les deux inégalités montrent que $s > 0$, quitte à diviser y par s on peut supposer que $s = 1$. Comme $(y, 1) \in C^*$ on a $\langle Ax, y\rangle + \langle x, a\rangle \geq 0$ et donc $\langle x, A^T y + a\rangle \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Ce qui est équivalent à dire que $-A^T y \leq a$. Si on pose maintenant $y' = -y$. On a $A^T y' \leq a$, ce qui montre que le problème dual est réalisable, et $\langle y', a\rangle > \alpha - \varepsilon$, ce qui montre $\alpha^* > \alpha - \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\alpha^* \geq \alpha$ et donc $\alpha^* = \alpha$, d'après le lemme précédent. Le fait que le problème dual admette une solution se déduit à nouveau du Théorème 37 : si le problème dual a une valeur finie alors cette valeur est atteinte.
Pour l'implication $3 \Rightarrow 2$ on remarque qu'il y a une symétrie dans le problème qui est cachée par le fait que le problème primal est un problème de minimisation tandis que le problème dual est un problème de maximisation. Mais en écrivant $\max\langle y, b\rangle = -\min\langle y, -b\rangle$ on voit que le problème dual peut se ramener à un problème de minimisation, donc à un prolème primal. Si maintenant on prend le dual de ce nouveau problème primal, on tombe sur un problème de maximisation qui s'avère être équivalent à l'ancien problème primal. Ce calcul très amusant est laissé au lecteur. Par conséquent l'implication $3 \Rightarrow 2$ se déduit en fait de ce qu'on vient de faire.
Une fois qu'on sait que $3 \Leftrightarrow 2$ il est évident que ces deux propriétés impliquent 1, ce qui termine la démonstration. □

Donnons un premier exemple, qui est un cas un peu dégénéré.

Lemme 41 (Lemme de Farkas)**.** *Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Alors exactement une des deux propositions suivantes est vraie :*

1. *Il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = b$;*
2. *Il existe y tel que $A^T y \geq 0$ et $\langle b, y\rangle < 0$.*

Démonstration. On considère le problème

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \langle x, 0\rangle \\ \text{sous contraintes} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

qui n'est pas tout à fait aussi trivial qu'il en a l'air : soit il est réalisable et dans ce cas sa valeur est évidemment 0, soit il ne l'est pas et sa valeur est $+\infty$. Ce problème est sous forme canonique et son problème dual est

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & \langle y, b\rangle \\ \text{sous contraintes} & A^T y \leq 0. \end{array}$$

On peut voir que ce problème est toujours réalisable, que si 2 est vérifiée alors sa valeur est $+\infty$ et que si 2 n'est pas vérifiée alors sa valeur est 0. En utilisant maintenant le théorème de dualité on a la chaine d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} \text{1 est vérifiée } &\Leftrightarrow \text{ le prolbème primal a une solution} \\ &\Leftrightarrow \text{ le problème dual a une solution} \\ &\Leftrightarrow \text{2 n'est pas vérifiée.} \end{aligned}$$

□

Voici un deuxième exemple, un peu plus délicat. Rappelons qu'on note $\Delta_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ le simplexe des vecteurs à coefficients positifs et dont la somme fait 1.

Théorème 42 (Théorème du minimax de von Neumann)**.** *Soit* (a_{ij}) *une matrice* $n \times m$ *à coefficients réels, on a*

$$\min_x \max_y \left\{ \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j \right\} = \max_y \min_x \left\{ \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j \right\},$$

le min étant pris sur les x *appartenant au simplexe* Δ_{n-1} *et le max sur les* $y \in \Delta_{m-1}$*.*

Démonstration. Ce n'est pas absolument nécessaire mais ça simplifie un peu les choses de supposer que les (a_{ij}) sont tous positifs. Et on ne perd pas de généralité en le faisant puisque remplacer a_{ij} par $a_{ij} + c$ pour tous i, j revient à ajouter c aux deux membres de l'égalité. On note A la matrice (a_{ij}). Pour x fixé, la quantité $\max_y \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$ est la valeur du problème

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & \langle A^T x, y \rangle \\ \text{sous contraintes} & u^T y = 1 \\ & y \geq 0, \end{array}$$

en notant u le vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les cordonnées valent 1. Ce problème de maximisation admet clairement une solution (le polyèdre sur lequel on optimise est compact) et donc sa valeur est égale à celle de son problème primal. Un calcul rapide montre que ce problème primal est le suivant :

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & t \\ \text{sous contraintes} & A^T x \leq tu \end{array}$$

Par conséquent $\min_x \max_y \sum a_{ij} x_i y_j$ est la valeur du problème

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & t \\ \text{sous contraintes} & A^T x \leq tu \\ & x \geq 0 \\ & v^T x = 1 \end{array}$$

en appelant v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ ne contenant que des 1. On peut simplifier un peu ce problème si A est à coefficients positifs. En effet on peut alors se restreindre aux $t > 0$, et on se rend compte assez facilement que le problème se ramène à

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & 1/\langle x, v \rangle \\ \text{sous contraintes} & A^T x \leq u \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Ce n'est plus un problème linéaire, mais comme minimiser l'inverse d'une quantité positive revient à maximiser le dénominateur, la quantité $\min_x \max_y \sum a_{ij} x_i y_j$ est donc égale à l'inverse de la valeur du problème

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & \langle x, v \rangle \\ \text{sous contraintes} & A^T x \leq u \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{5}$$

Un raisonnement très similaire montre que $\max_y \min_x \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$ est égal à l'inverse de la valeur du problème

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \langle y, u\rangle \\ \text{sous contraintes} & v \leq Ay \\ & y \geq 0. \end{array} \tag{6}$$

Il suffit donc de montrer que les deux problèmes (5) et (6) sont atteints et ont la même valeur. Mais un rapide calcul montre qu'ils sont duaux l'un de l'autre. Comme par ailleurs ils sont réalisables tous les deux le théorème de dualité permet de conclure. □

8 Fonctions convexes. Propriétés de continuité

On va considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira qu'une telle fonction f est *propre* si elle n'est pas constamment égale à $+\infty$.

Définition 43. Soit E un espace vectoriel soit $f \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est *convexe* si

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \quad \forall x, y \in E, \forall t \in [0,1].$$

On dit qu'une fonction f est concave si $-f$ est convexe et que f est affine si elle est à la fois convexe et concave (dans ce cas f ne prend que des valeurs finies).

Remarques. 1. Il est facile de voir que f est affine si et seulement si $f - f(0)$ est linéaire.

2. On peut aussi parler de fonction convexe définie sur un sous-ensemble C de E, à condition que C lui-même soit convexe. Il suffit de de restreindre la définition aux $x, y \in C$.
3. On montre facilement par récurrence sur m que si f est convexe alors

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

pour tous $x_1, \dots x_m \in E$ et tous $\lambda_i \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Définition 44. Étant donné $f \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on appelle *domaine* de f l'ensemble $\mathrm{dom}(f) = \{x \in E \colon f(x) < +\infty\}$. On appelle *épigraphe* de f est la partie de l'espace produit $E \times \mathbb{R}$ située au-dessus du graphe de f :

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \colon f(x) \leq t\}.$$

Donnons quelques propriétés simples des fonctions convexes.

Proposition 45. *1. Le domaine d'une fonction convexe est convexe.*

2. Une fonction f est convexe si et seulement si son épigraphe est un sous-ensemble convexe de $E \times \mathbb{R}$.

3. Un supremum de fonctions convexes est une fonction convexe.

4. Si $\lambda \geq 0$ et f est convexe alors λf est convexe.

5. La somme de deux fonctions convexes est convexe.

Démonstration. La propriété 1 est facile, par définition si $f(x)$ et $f(y)$ sont finis alors f est finie sur le segment $[x, y]$. Pour 2 on suppose f convexe, on se donne (x, s) et (y, t) appartenantà l'épigraphe de f, et $\lambda \in [0,1]$. Alors $(1-\lambda)s + \lambda t \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y)$ ce qui montre que $(1-\lambda)(x,s) + \lambda(y,t) \in \mathrm{epi}(f)$. La réciproque se démontre de manière similaire. Pour le point 3 on peut remarquer que $\text{epi}\left(\sup_{i\in I} f_i\right) = \cap_{i\in I}\text{epi}(f_i)$. Donc si les f_i sont convexes, leurs épigraphes sont convexes d'après le point 2 donc l'épigraphe de $\sup\{f_i\}$ aussi comme intersection de convexes. Les points 4 et 5 se déduisent très facilement de la définition. □

On va aborder les propriétés de continuité des fonctions convexes.

Lemme 46. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction convexe et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si f est majorée au voisinage de x alors f est continue en x.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un voisinage $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$ tels que $f(y) \le C$ si $\|y - x\| \le \varepsilon$. Soit $\delta \in]0,1[$ et soit u vérifiant $\|u\| \le \varepsilon$. On pose $z = x + \delta u$. On a

$$f(z) = f\left((1-\delta)x + \delta(x+u)\right) \le (1-\delta)f(x) + \delta f(x+u).$$

Donc $f(z) - f(x) \le -\delta f(x) + \delta f(x+u) \le C'\delta$, en posant $C' = C + |f(x)|$. De même

$$f(x) = f\left(\frac{1}{1+\delta}z + \frac{\delta}{1+\delta}(x-u)\right) \le \frac{1}{1+\delta}f(z) + \frac{\delta}{1+\delta}f(x-u),$$

ce qui implique facilement $f(x) - f(z) \le C'\delta$. On a donc $|f(z) - f(x)| \le C'\delta$ pour tout z dans un voisinage de x, ce qu'il fallait démontrer. □

On va déduire de ce lemme que les fonctions convexes sont continues sur l'intérieur de leur domaine.

Théorème 47. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction convexe. Alors la fonction f restreinte à l'intérieur relatif de son domaine est continue. Elle est même localement lipschitzienne, au sens où elle est lipschitzienne sur tout compact inclus dans l'intérieur relatif de son domaine.*

Remarque. Ce résultat serait faux en dimension infinie, puisqu'en dimension infinie il existe même des formes linéaires qui ne soient pas continues.

Démonstration. Quitte à se restreindre à l'espace affine engendré par le domaine de f il suffit de montrer le résultat suivant : soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe à valeurs finies, alors f est localement lipschitizienne sur U. On commence par montrer que f est continue sur U. Soit $x_0 \in U$. Il existe $\delta > 0$ tel que la boule $x_0 + \delta B_1^n$ soit incluse dans U, en notant B_1^n la boule unité pour la norme ℓ_1, qui est aussi l'enveloppe convexe des $\pm e_i$, en notant (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$x_0 + \delta B_1^n = \text{conv}(x \pm \delta e_i).$$

Donc tout point de $x_0 + \delta B_1^n$ s'écrit comme combinaison convexe des $2n$ points $x_0 \pm \delta e_i$. En utilisant la convexité de f on en déduit facilement que f est majorée par $\max\{f(x_0 \pm \delta e_i)\}$ sur $x_0 + \delta B_1^n$. Donc f est majorée au voisinage de x_0, donc f est continue en x_0 d'après le lemme précédent, ce qui termine la démonstration de la première partie.

Pour la deuxième partie, on se donne un compact K inclus dans U et on veut montrer que f est lipschitzienne sur K. Soit B_2^n la boule euclidienne (fermée). Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $K + \varepsilon B_2^n$ est encore un compact inclus dans U. Comme d'après la première partie f est continue sur U elle est bornée $K + \varepsilon B_2^n$, disons par une certaine constante C. On se donne maintenant $x, y \in K$ et on pose $z = y + \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|}$, en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Alors $z \in K + \varepsilon B_2^n$ et $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ avec $\lambda = \frac{\|y-x\|}{\varepsilon + \|y-x\|}$. En utilisant la convexité de f et le fait que f est bornée sur $K + \varepsilon B_2^n$ on obtient

$$f(y) - f(x) \le \lambda(f(z) - f(x)) \le \frac{\|y-x\|}{\varepsilon + \|y-x\|}2C \le \frac{2C}{\varepsilon}\|y-x\|.$$

Ceci est valable pour tous $x, y \in K$, ce qui montre bien que f est lipschitzienne sur K. □

9 Sous-gradient. Transformée de Legendre-Fenchel

Définition 48. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et propre et soit x_0 appartenant au domaine de f. On dit que $y \in \mathbb{R}^n$ est un *sous-gradient* de f au point x_0, ce qu'on note $y \in \partial f(x_0)$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, y\rangle.$$

Par abus de langage, l'ensemble $\partial f(x_0)$ est aussi appelé sous-gradient de f en x_0. L'existence d'un sous-gradient en x_0 est équivalente à l'existence d'une fonction affine ℓ vérifiant $\ell(x) \leq f(x)$ pour tout x et $\ell(x_0) = f(x_0)$.

Exemples.

1. Soit $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$. Alors $\partial f(x) = \{1\}$ si $x > 0$, $\partial f(x) = \{-1\}$ si $x < 0$ et $\partial f(0) = [-1, 1]$.
2. Si $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ (norme euclidienne) alors $\partial f(x) = \{x\}$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 49. *Soit f une fonction convexe propre et x_0 un point appartenant à l'intérieur relatif de son domaine, alors $\partial f(x)$ est non vide. Il existe donc une fonction affine $\ell \leq f$ vérifiant $\ell(x) = f(x)$.*

La démonstration utilise le lemme suivant.

Lemme 50. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et propre. Alors*

$$\mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f)) = \{(x,t)\colon x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f)),\ t > f(x)\}.$$

Démonstration. On procède par double inclusion, et on utilise notamment la caractérisation de l'intérieur relatif donnée par le Théorème 17. On note $P\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la projection donnée par $P(x,t) = x$. Comme $P(\mathrm{epi}(f)) = \mathrm{dom}(f)$, le Théorème 19 montre que $P(\mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f))) = \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. Donc si $(x,t) \in \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f))$ alors $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. De plus comme $(x, f(x)+1) \in \mathrm{epi}(f)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)(x,t) - \varepsilon(x, f(x)+1) \in \mathrm{epi}(f)$. Donc $(x, (1+\varepsilon)t - \varepsilon(f(x)+1)) \in \mathrm{epi}(f)$ donc $f(x) \leq t - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ donc $f(x) < t$. Ceci montre une première inclusion. Réciproquement, on fixe $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ et $t > f(x)$. On pose $\delta = t - f(x)$. On se donne $(x', t') \in \mathrm{epi}(f)$ et on cherche à montrer que $(1+\varepsilon)(x,t) - \varepsilon(x',t') \in \mathrm{epi}(f)$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. D'une part on a $(1+\varepsilon)t - \varepsilon t' = f(x) + \delta + \varepsilon(t - t') \geq f(x) + \frac{\delta}{2}$, si ε est suffisamment petit. D'autre part comme $x' \in \mathrm{dom}(f)$ et $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f)$ on a $(1+\varepsilon)x - \varepsilon x' \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ pour ε assez petit. De plus on sait que f restreinte à l'intérieur de son domaine est continue. Donc on a aussi $f((1+\varepsilon)x - \varepsilon x') \geq f(x) - \frac{\delta}{2}$ pour ε suffisamment petit. En mettant tout ensemble on obtient bien $f((1+\varepsilon)x - \varepsilon x') \leq (1+\varepsilon)t - \varepsilon t'$, ce qu'il fallait démontrer. □

.

Démonstration du Théorème 49. On se donne x_0 appartenant à l'intérieur relatif du domaine de f. d'après ce qui précède $(x_0, f(x_0))$ appartient au bord relatif de $\mathrm{epi}(f)$. Donc $\mathrm{epi}(f)$ admet un hyperplan d'appui en $(x_0, f(x_0))$: il existe $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que

$$\langle y, x_0\rangle + s f(x_0) \leq \langle y, x\rangle + st,$$

pour tout $(x,t) \in \mathrm{epi}(f)$ avec inégalité stricte si $(x,t) \in \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f))$. Mais comme $x_0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ le lemme précédent montre que $(x_0, f(x_0)+1)$ appartient à l'intérieur relatif de $\mathrm{epi}(f)$, et en appliquant l'inégalité stricte à $(x_0, f(x_0)+1)$ on obtient $s > 0$. Quitte à diviser y par s on peut supposer $s = 1$, et on obtient $\langle y, x_0 - x\rangle + f(x_0) \leq t$ pour tout $(x,t) \in \mathrm{epi}(f)$ ce qui implique en particulier $\langle y, x_0 - x\rangle + f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ce qui montre que $-y \in \partial f(x_0)$. □

Remarques. 1. Lorsque x appartient seulement au bord du domaine de f alors f n'admet pas forcément de sous-gradient en x. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\sqrt{x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = +\infty$ sinon n'admet pas de sous-gradient en 0.

2. Ce théorème montre en particulier qu'une fonction convexe et propre est toujours minorée par une fonction affine.

On introduit maintenant une notion de semi-continuité qui joue un rôle important dans la suite.

Définition 51. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est semi-continue inférieurement en x si pour toute suite $x_n \to x$ on a $\liminf f(x_n) \geq f(x)$. Elle est dite semi-continue inférieurement si elle est semi-continue en tout point.

Évidemment une fonction continue est semi-continue inférieurement. On a vu qu'une fonction convexe était automatiquement continue lorsqu'on la restreignait à l'intérieur de son domaine. En revanche, vue comme fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ elle peut ne pas être semi-continue inférieurement. Par exemple si on pose $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = +\infty$ si $x \geq 0$, alors f est convexe, mais $\lim_{n\to\infty} f(-1/n) = 0 < +\infty = f(0)$, ce qui montre que f n'est pas semi-continue inférieurement en 0.

Proposition 52. *1. Une fonction est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe est fermé.*

2. Un sup de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continu inférieurement.

3. La somme de deux fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.

4. Si f est semi-continue inférieurement et $\lambda > 0$ alors λf est semi-continue inférieurement.

Remarque. Attention le fait que l'épigraphe de f soit fermé n'implique par que le domaine de f le soit. Le domaine d'une fonction semi-continue inférieurement peut même être ouvert si $f(x) \to +\infty$ quand x tend vers le bord du domaine (faire un dessin).

Démonstration. 1. On suppose que f est semi-continue inférieurement et on se donne (x_n, t_n) une suite d'éléments de $\mathrm{epi}(f)$ tendant vers $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Alors $f(x) \leq \liminf f(x_n) \leq \liminf t_n = t$, donc $(x,t) \in \mathrm{epi}(f)$, ce qui montre que $\mathrm{epi}(f)$ est fermé. La réciproque se démontre de manière analogue. Une fois qu'on a montré 1 la propriété 2 est évidente, puisque $\mathrm{epi}(\sup\{f_i\}) = \cap \mathrm{epi}(f_i)$. Les propriétés 3 et 4 sont faciles. □

On va maintenant introduire une notion de dualité pour les fonctions convexes.

Définition 53. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre. On définit la transformée de Legendre-Fenchel de f par

$$f^* \colon y \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y\rangle - f(x)\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Exemples. 1. Si $f(x) = \langle x, y_0\rangle + b$ est une fonction affine, on voit facilement que $f^*(y) = +\infty$ pour tout $y \neq y_0$ et que $f^*(y_0) = b$. Réciproquement si f vaut $+\infty$ partout sauf en un point, alors f^* est affine.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on pose $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ (norme euclidienne). Il est facile de voir que $\varphi^* = \varphi$. On peut même montrer que φ est la seule fonction avec cette propriété.

Donnons quelques propriétés élémentaires.

Proposition 54. *Soient $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ des fonctions propres. Alors*

1. *On a* $f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y\rangle$ *pour tous* x, y.
2. *On a* $f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle$ *si et seulement si* $y \in \partial f(x)$.
3. f^* *est une fonction convexe semi-continue inférieurement.*
4. *Si* $f \leq g$ *alors* $f^* \geq g^*$.
5. *Si* $\lambda > 0$ *on a* $(\lambda f)^* = \frac{1}{\lambda} f^*$.

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 sont des reformulations des définitions. La propriété 3 est claire : f^* est un sup de fonctions affines, donc un sup de fonctions convexces continues. Les autres propriétés sont faciles aussi et laissées en exercice. □

Rappelons que si f est convexe et propre f est minorée par une fonction affine. On en déduit alors que f^* est propre. On peut alors s'intéresser à f^{**}. Par définition de f^*, si $f^*(y) < +\infty$ alors $x \mapsto \langle x, y\rangle - f^*(y)$ est une fonction affine plus petite que f. C'est même la plus grande fonction affine plus petite que f de pente y : si $\ell(x) = \langle x, y\rangle - a$ est une fonction affine plus petite que f alors par définition de f^* on a $f^*(y) \leq a$. Ceci montre que f^{**} est le sup des fonctions affines plus petites que f :

$$f^{**} = \sup\{\, \ell \colon \ell \text{ affine}, \ell \leq f\,\}\,.$$

Le théorème principal de cette section est le suivant.

Théorème 55 (Dualité de Legendre-Fenchel)**.** *Soit* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre. On a* $f = f^{**}$ *si et seulement si* f *est convexe et semi-continue inférieurement. Autrement dit une fonction* f *est convexe et semi-continue inférieurement si et seulement si elle est égale au sup des fonctions affines majorées par* f.

Démonstration. Le sens direct est immédiat puisque f^{**} est toujours une fonction convexe semi-continue inférieurement. Montrons la réciproque. On a toujours $f^{**} \leq f$ puisque f^{**} est un sup de fonctions plus petites que f. Il s'agit de montrer l'inégalité dans l'autre sens. On peut remarquer que le Théorème 49 montre que pour $x_0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ il existe une fonction affine $\ell \leq f$ telle que $\ell(x_0) = f(x_0)$, ce qui implique en particulier $f^{**}(x_0) \geq f(x_0)$. Mais cet argument ne s'applique pas en dehors de $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. La démonstration est un peu plus simple si on suppose de plus que f est positive. Commençons par montrer qu'on peut ajouter cette hypothèse sans perte de généralité. On a vu qu'il existait ℓ_0 affine majorée par f. Alors $g = f - \ell_0$ est propre, convexe, semi-continue inférieurement et positive. De plus

$$g^{**} = \sup\{\ell \colon \ell \text{ affine}, \ell \leq f - \ell_0\} = \sup\{\ell - \ell_0 \colon \ell \text{ affine}, \ell \leq f\} = f^{**} - \ell_0.$$

Donc si on montre le résultat pour g on l'aura aussi pour f. On suppose donc désormais $f \geq 0$. On fixe alors $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $t_0 < f(x_0)$. Alors (x_0, t_0) n'appartient pas à $\mathrm{epi}(f)$, qui est convexe et fermé puisque f est supposée convexe et semi-continue inférieurement. Donc il existe un demi-espace fermé contenant $\mathrm{epi}(f)$ et pas (x_0, t_0). Il existe $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\langle y, x_0\rangle + st_0 < \alpha$ et

$$\langle y, x\rangle + st \geq \alpha, \quad \forall (x, t) \in \mathrm{epi}(f).$$

En faisant tendre t vers $+\infty$ on voit que $s \geq 0$. Si $s > 0$, on peut procéder comme dans la preuve du Théorème 49 : quitte à diviser y et α par s on peut supposer $s = 1$. On obtient alors $f(x) \geq \alpha - \langle y, x\rangle$ pour tout x et $t_0 < \alpha - \langle y, x_0\rangle$. Ceci implique $f^{**}(x_0) > t_0$, puis $f^{**}(x_0) \geq f(x_0)$ en faisant tendre t_0 vers $f(x_0)$. Traitons maintenant le cas $s = 0$. On obtient $\langle y, x\rangle \geq \alpha$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $\langle y, x_0\rangle < \alpha$. Comme f est supposée positive la première inégalité implique $f(x) \geq \lambda(\alpha - \langle y, x\rangle)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda > 0$. Donc $\lambda(\alpha - \langle y, x\rangle)$ est une fonction affine majorée par f donc $f^{**}(x_0) \geq \lambda(\alpha - \langle y, x_0\rangle)$. Comme $\langle y, x_0\rangle < \alpha$, en faisant tendre λ vers $+\infty$ on obtient $f^{**}(x_0) = +\infty$ et donc a fortiori $f^{**}(x_0) \geq f(x_0)$. □

Remarque. On a vu que pour toute f convexe on avait $y \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(y) = \langle x, y \rangle$. Si de plus f est semi-continue inférieurement on a $f = f^{**}$. En appliquant l'équivalence précédente à f^* on obtient donc

$$f(x) + f^*(y) = \langle x, y \ \Leftrightarrow \ y \in \partial f(x) \ \Leftrightarrow \ x \in \partial f^*(y).$$

Donc le sous-différentiel de f^* est en quelque sorte la réciproque du sous-différentiel de f.

10 Convexité et différentiabilité

Rappelons quelques définitions qui permettrons de fixer aussi les notations. On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x est différentiable en x s'il existe une forme linéaire, appelée différentielle de f en x et notée $df(x)$, vérifiant

$$f(y) = f(x) + df(x)(y - x) + o(\|y - x\|),$$

quand $y \to x$. La forme linéaire $df(x)$ provient du produit scalaire avec un élément de $\mathbb{R}^n$ qui est appelé gradient de f en x et noté $\nabla f(x)$. On a donc

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + o(\|y - x\|).$$

Les coordonnées de $\nabla f(x)$ sont appelées dérivées partielles de f en x et notées $\partial_i f(x)$. Lorsqu'une fonction est deux fois différentiable, au sens où la fonction et ses dérivées partielles sont différentiables, on note $\nabla^2 f(x)$ la matrice $(\partial_i \partial_j f(x))$, appelée matrice hessienne de f en x. On rappelle le théorème de Schwarz, qui affirme que cette matrice est alors symétrique. Commençons cette section par un résultat qui permette de lire la convexité d'une fonction sur sa différentielle.

Proposition 56. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \colon U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est convexe sur U.*

(ii) $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$, $\forall x, y \in U$.

(iii) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$, $\forall x, y \in U$.

Si de plus f est deux fois différentiable, alors ces conditions sont aussi équivalentes à :

(iv) *Pour tout x de U, la matrice $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive.*

Remarque. La propriété (ii) peut se reformuler en disant que le gradient de f en x est un sous-gradient.

Démonstration. On fixe $x, y \in U$ et on pose $\varphi(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si f est convexe alors φ est positive sur $[0, 1]$ et nulle en 0. Donc $\varphi'(0) \geq 0$ ce qui donne (ii). Pour la réciproque on pose $z = (1 - t)x + ty$. Alors $x = z + t(x - y)$. L'inégalité (ii) donne donc

$$f(x) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), t(x - y) \rangle.$$

De même $f(y) \geq f(z) + \langle f(z), (1-t)(y-x) \rangle$. On en déduit bien $(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(z)$ ce qui montre que f est convexe. On a donc montré $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Si (ii) est vérifiée en sommant les inégalités $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ et $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$ on trouve (iii). Pour la réciproque on pose

$$\varphi(t) = f((1 - t)x + ty) - f(x) - t \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

L'inégalité (iii) montre que $\varphi'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ ce qui implique $\varphi(1) \geq \varphi(0)$ ce qui donne (ii).
Pour la deuxième partie, on fixe $x, y \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ et on pose

$$\rho(t) = \langle \nabla f((1-t)x + ty) - \nabla f(x), y - x \rangle.$$

On a $\rho(0) = 0$, et si (iii) est vérifiée alors $\rho(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc $\rho'(0) \geq 0$ ce qui donne $\langle \nabla^2 f(x)(y-x), y-x \rangle \geq 0$. Comme on peut faire varier y dans un voisinage de x on en déduit bien que $\nabla^2 f(x)$ est positive. La réciproque est claire : si (iv) est vérifiée alors $\rho'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ donc $\rho(1) \geq \rho(0)$ ce qui donne (iii). $\square$

Le théorème principal de cette section est le suivant, il fait le lien entre les notions de sous-gradient et de gradient pour une fonction convexe.

Théorème 57. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et soit x_0 un point situé à l'intérieur du domaine de f. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f est différentiable en x_0 ;*
2. *Le sous-gradient de f en x_0 est réduit à un point.*

De plus lorsque ces conditions sont vérifiées on a bien sûr $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Exemple. La fonction $f(x) = |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, sa dérivée vaut 1 à droite de 0 et -1 à gauche. En 0 elle n'est pas dérivable et son sous-gradient est l'intervalle $[-1,1]$.

La démonstration du théorème est un peu longue, on donne d'abord un résultat intermédiaire, qui nous servira pour la démonstration de l'implication difficile du théorème.

Lemme 58. *Soit f une fonction convexe et x_0 dans l'intérieur du domaine de f et soit v un vecteur non nul. Alors*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad \textit{existe.}$$

De plus, en notant $f'(x_0; v)$ cette limite, on a l'existence de $y \in \partial f(x_0)$ tel que $f'(x_0; v) = \langle y, v \rangle$.

Démonstration. On fixe un vecteur $v \neq 0$ et on considère la fonction

$$\varphi\colon t \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \mapsto \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Comme x_0 est dans l'intérieur du domaine de f elle prend des valeurs finies au voisinage de 0. De plus on déduit de la convexité de f que φ est croissante $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Les détails sont laissés en exercice. Donc φ admet forcément une limite finie à droite en 0. De plus cette limite, qu'on note $f'(x; v)$, vérifie $f'(x; v) \leq \varphi(t)$ si $t \geq 0$ et $f'(x; v) \geq \varphi(t)$ si $t < 0$. On en déduit

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t f'(x_0; v), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On note D l'ensemble $(x, f(x)) + \mathbb{R}(v, f'(x; v))$, qui est une droite affine de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. L'inégalité précédente montre que pour $(x,t) \in D$ on a $f(x) \geq t$. Or on a vu à la section précédente que pour $(x,t) \in \operatorname{ri}(\operatorname{epi}(f))$ on avait $f(x) < t$. Donc la droite affine D ne rencontre pas l'ensemble $\operatorname{ri}(\operatorname{epi}(f))$, qui est un convexe relativement ouvert. D'après le Corollaire 27, il existe hyperplan affine de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ contenant D et ne rencontrant pas $\operatorname{ri}(\operatorname{epi}(f))$. Donc il existe $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle + st &= \alpha, \quad \forall (x,t) \in D, \\ \langle y, x \rangle + st &> \alpha, \quad \forall (x,t) \in \operatorname{ri}(\operatorname{epi}(f)). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(x_0, f(x_0)) \in D$ et $(x_0, f(x_0)+1) \in \mathrm{epi}(f)$ on voit que $s > 0$. Quitte à diviser y et α par s on peut supposer que $s = 1$. L'égalité ci-dessus se réécrit alors

$$\langle y, x_0\rangle + f(x_0) + t\left(\langle y, v\rangle + f'(x; v)\right) = \alpha, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ce qui est équivalent aux deux égalités : $f'(x_0; v) = -\langle y, v\rangle$ et $\alpha = \langle y, x_0\rangle + f(x_0)$. On reporte cette deuxième égalité dans l'inégalité ci-dessus. On obtient

$$\langle y, x\rangle + t > \langle y, x_0\rangle + f(x_0), \quad \forall (x, t) \in \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f)).$$

Mais encore une fois $\mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f))$ étant dense dans $\mathrm{epi}(f)$ l'inégalité a aussi lieu au sens large sur $\mathrm{epi}(f)$ et on en déduit $f(x) \geq f(x_0) - \langle y, x - x_0\rangle$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$, puis pour tout x de $\mathbb{R}^n$. Donc $-y \in \partial f(x_0)$ ce qui termine la preuve. □

Démonstration du Théorème 57. Supposons que f est différentiable en x_0 et soit $y \in \partial f(x_0)$. Alors par définition du sous-gradient la fonction $x \mapsto f(x) - \langle x, y\rangle$ atteint son minimum en $x = x_0$. Par ailleurs elle est différentiable en x_0 et son gradient en x_0 vaut $\nabla f(x_0) - y$. Donc $\nabla f(x_0) = y$. On a donc montré $1 \Rightarrow 2$ et le fait que $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ lorsque f est différentiable en x_0. Pour la réciproque on suppose que $\partial f(x_0) = \{y\}$ pour un certain y et on veut montrer que f est différentiable en x_0. Quitte à remplacer f par $x \mapsto f(x) - f(x_0) - \langle x - x_0, y\rangle$ on peut supposer $f(x_0) = 0$ et $y = 0$. Il s'agit alors de montrer que $|f(x)| = o(\|x - x_0\|)$ quand $x \to x_0$. Comme $f(x_0) = 0$ et que 0 est un sous-gradient en x_0 on sait déjà que $f(x) \geq 0$. Il suffit donc de majorer f par un $o(\|x - x_0\|)$. On utilise alors le lemme qui précède. Comme 0 est le seul sous-gradient de f en x_0 le lemme montre que $f'(x_0; v) = 0$ pour tout vecteur v. En apliquant ceci à $v = \pm e_i$ on en déduit que $f(x_0 + te_i) = o(t)$ quand $t \to 0$, pour tout $i = 1, \dots, n$, en notant (e_i) les vecteurs de la base canonique. Comme on l'a vu précédemment, si on note $\|x\|_1 = \sum_{i \leq n} |x_i|$ la norme ℓ_1 et B_1^n sa boule unité, la convexité de f fait que f est majorée par $\max_{i \leq n}\{f(x_0 + te_i)\}$ sur la boule $x_0 + tB_1^n$. Cette quantité est un $o(t)$ d'après ce qui précède. Autrement dit $f(x) \leq o(\|x - x_0\|_1)$ ce qui est le résultat cherché. □

11 Optimisation convexe

On appellera problème d'optimisation convexe un problème de la forme

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & f(x) \\ \text{sous contrainte} & x \in K, \end{array} \tag{7}$$

où $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe et K est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Comme dans le chapitre sur l'optimisation linéaire l'infimum de f sur K est appelé valeur du problème et on dit que le problème admet une solution si cet infimum est atteint. Les solutions du problèmes sont alors les points qui réalisent cet infimum.

Avant de traiter ce problème commençons par dire quelques mots sur l'optimisation sans contrainte, c'est-à-dire sur le cas $K = \mathbb{R}^n$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. Alors par définition f atteint son minimum en x si et seulement si $0 \in \partial f(x)$. Si f est semi-continue inférieurement alors cette condition est équivalente à $x \in \partial f^*(0)$. Dans ce cas, le problème de minimisation de f sur $\mathbb{R}^n$ admet une solution si et seulement si le sous-gradient de f^* en 0 est non vide, ce qui est le cas par exemple si 0 est à l'intérieur du domaine de f^*. La valeur du problème est finie si et seulement si f est minorée sur $\mathbb{R}^n$, ce qui revient à dire que 0 est dans le domaine de f^*. La valeur du problème peut-être finie sans que le problème n'admette de solution lorsque 0 appartient au bord du domaine de f^*. Par exemple l'infimum de $f(x) = \mathrm{e}^x$ sur

$\mathbb{R}$ vaut 0 mais il n'est pas atteint. Ceci est cohérent avec le fait que la transformée de Legendre de f est

$$f^*: x \mapsto \begin{cases} x \log x - x & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit bien que 0 est au bord du domaine de f^* et que f^* n'admet pas de sous-gradient en 0.

Évidemment on peut toujours transformer le problème de minimisation sous contrainte (7) en un problème sans contrainte en disant qu'il revient au même de minimiser $f(x) + g(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ en appelant g la fonction qui vaut 0 sur K et $+\infty$ en dehors de K, qui est bien une fonction convexe. Mais cette transformation ne simplifie pas tellement le problème et on ne procèdera pas de la sorte dans la suite.

On ne va pas étudier précisément la question de l'existence et de l'unicité d'une solution ici, on donne juste deux critères simples qui fonctionnent souvent. Rappelons (comme on l'a vu en TD) qu'une fonction convexe est dite strictement convexe pour tous x, y dans le domaine de f vérifiant $x \neq y$ on a $f(\frac{x+y}{2}) < \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

Proposition 59. *On considère un problème d'optimisation* (7)*.*

1. *Si K est compact et f est semi-continue inférieurement alors le problème admet une solution.*
2. *Si f est strictement convexe et si K est convexe alors le problème admet au plus une solution.*

Remarque. Le point 1 n'a rien à voir avec la convexité, il est vrai sous les seules hypothèses mentionnées : f semi-continue inférieurement et K compact.

Démonstration. Pour le point 1 on se donne une suite minimisante (x_n), c'est-à-dire une suite d'éléments de K vérifiant $\lim f(x_n) = \inf_K\{f\}$. Comme K est compact on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que (x_n) converge vers un élément de K qu'on note x^*. Alors par semi-continuité inférieure $f(x^*) \leq \liminf f(x_n) = \inf_K\{f\}$. Donc x^* est solution du problème. Pour le point 2 on peut raisonner par l'absurde. Si le problème admet deux solutions x_1 et x_2 alors par stricte convexité $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) = f(x_1) = \min_K\{f\}$. Mais comme K est convexe on a $\frac{x_1+x_2}{2} \in K$ et on obtient une contradiction. $\square$

Le but de cette section est de donner une condition nécessaire et suffisante d'optimalité. Pour ce faire un introduit d'abord les notions de cône tangent et de cône normal en un point d'un convexe.

Définition 60. Soit K un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $x \in K$. On appelle cône *tangent* à K en x le cône $T_x(K) = \mathbb{R}_+(K - x) = \operatorname{pos}(K - x)$. On appelle cône *normal* à K en x le cône $N_x(K) = -(K - x)^* = -T_x(K)^*$.

Remarques. Le cône tangent est un cône convexe, mais il n'est pas forcément fermé. Le cône normal est fermé par définition. Ces notions ne sont intéressantes que si x appartient au bord relatif de K. Pour x dans l'intérieur relatif de K il est clair que $T_x(K) = E$, en notant E l'espace vectoriel parallèle à l'espace affine engendré par K et et $N_x(K) = E^\perp$.

Exemples. Soit B la boule euclidienne et x est un point du bord de B. Alors $T_x(B) = \{y \colon \langle x, y\rangle < 0\} \cup \{0\}$ et $N_x(B)$ est la demi-droite $\mathbb{R}_+x$. Si $K = [0,1]^n$ et $x = (1, \dots, 1)$ alors $T_x(K) = \mathbb{R}^n_-$ et $N_x(K) = \mathbb{R}^n_+$.

Théorème 61. *Étant donné le problème d'optimisation convexe* (7)*, on se donne x_0 appartenant à K et on considère les propositions suivantes :*

(i) $0 \in \partial f(x_0) + N_{x_0}(K)$,

(ii) x_0 *est une solution du problème.*

Alors on a toujours (i) $\Rightarrow$ *(ii) tandis que la réciproque (ii)* $\Rightarrow$ *(i) est vraie si l'intersection* $\mathrm{ri}(K) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ *est non vide.*

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est facile : si $0 \in \partial f(x_0) + N_{x_0}(K)$ alors il existe $y \in \partial f(x_0)$ tel que $-y \in N_{x_0}(K)$. Alors $f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, y\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et $\langle x - x_0, y\rangle \geq 0$ pour tout $x \in K$. Donc $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in K$ ce qui montre bien que x_0 est solution de (7).
Comme d'habitude la réciproque se déduit d'un résultat de séparation des convexes. Soit x_0 une solution du problème. Alors l'ensemble $C = K \times \{f(x_0)\}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Soit $(x, t) \in \mathrm{epi}(f) \cap C$. Alors $x \in K$, donc $f(x) \geq f(x_0)$. D'un autre côté $f(x) \leq t = f(x_0)$. Donc $f(x) = f(x_0) = t$. En particulier (x, t) appartient au bord relatif de $\mathrm{epi}(f)$. Par conséquent $C \cap \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f)) = \emptyset$, ce qui implique $\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f)) = \emptyset$. D'après la partie 2 du Théorème 26, on peut séparer strictement ces deux convexes relativement ouverts : il existe $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que

$$\langle y, \rangle + st < \langle z, y\rangle + su\alpha, \quad \forall (x, t) \in \mathrm{ri}(C), \forall (z, u) \in \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f)). \tag{8}$$

On utilise maintenant l'hypothèse : il existe x appartenant à $\mathrm{ri}(K) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. Alors $(x, f(x_0)) \in \mathrm{ri}(C)$ (remarquer que $\mathrm{ri}(C) = \mathrm{ri}(K) \times \{f(x_0)\}$) et $(x, f(x)+1) \in \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f))$. En appliquant l'inégalité précédente à ces deux points, et comme $f(x) \geq f(x_0)$ par hypothèse, on obtient $s > 0$. Quitte à diviser y par s on peut supposer que $s = 1$. De plus l'inégalité (8) a lieu au sens large lorsque $(x, t) \in C$ et $(z, u) \in \mathrm{epi}(f)$ ce qui nous donne en particulier

$$\langle y, x\rangle + f(x_0) \leq \langle z, y\rangle + f(z), \quad \forall x \in K, \forall z \in \mathrm{dom}(f).$$

Cette inégalité est même vraie pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ puisqu'elle est trivialement vérifié pour $z \notin \mathrm{dom}(f)$. En appliquant à $x = x_0$ on voit que $-y \in \partial f(x_0)$. Et en appliquant à $z = x_0$ on voit que $y \in N_{x_0}(K)$. Donc $0 \in \partial f(x_0) + N_{x_0}(K)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. Il ne suffit pas d'avoir $K \cap \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$ pour que l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ soit vérifiée. Par exemple si $f(x) = -\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = +\infty$ si $x < 0$ et $K =]-\infty, 0]$ alors le problème admet une solution qui est 0. Mais le sous-gradient de f en 0 est vide donc la condition (ii) ne peut pas être vérifiée. Ceci étant dit la condition $\mathrm{ri}(K) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f)) \neq \emptyset$ n'est pas la seule condition qu'on puisse mettre. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ serait aussi vraie dans le cas $K \cap \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \neq \emptyset$, ce qui suppose en particulier que le domaine de f est d'intérieur non vide. Il suffit en effet d'utiliser la partie 1 du Théorème 26 à la place de la partie 2 dans la démonstration.

Exemple. Lorsque la fonction f est différentiable la condition (i) se simplifie en $\nabla f(x_0) \in -N_{x_0}(K) = (K - x_0)^*$. Par exemple si $f(x) = \|x - x_0\|^2$ (norme euclidienne) où x_0 est un point fixé de $\mathbb{R}^n$, on retrouve le fait que le projeté $\overline{x_0}$ de x_0 sur K est caractérisé par la propriété $x_0 - \overline{x_0} \in (K - x_0)^*$.

Le théorème n'est réellement intéressant que si on sait décrire le cône normal à K en chaque point. Dans la section suivante on va s'intéresser au cas où K est un polyèdre.

12 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker

On considère un problème de la forme :

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & f(x) \\ \text{sous contraintes} & \langle x, y_i\rangle \leq b_i,\ i = 1, \dots, m, \end{array} \tag{9}$$

avec $a_1, \dots, a_m$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $b_1, \dots, b_m$ des réels. Comme dans le chapitre sur l'optimisation linéaire on peut alors introduire une notion de problème dual. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^m$ on pose

$$g(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\langle x, ai \rangle - b_i \right) \right\}.$$

La fonction $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est concave comme infimum de fonctions affines. Le problème dual associé à (9) est

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & g(\lambda) \\ \text{sous contraintes} & \lambda \geq 0. \end{array} \tag{10}$$

Rappelons qu'on écrit $\lambda \geq 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. C'est encore un problème d'optimisation convexe, puisque maximiser une fonction concave revient à minimiser une fonction convexe. De la même manière que dans le cas linéaire la valeur du problème dual est toujours plus petite que celle du problème primal.

Lemme 62. *Soit α et α^* les valeurs respectives des problèmes primal et dual. On a $\alpha^* \leq \alpha$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle x, y_i \rangle \leq b_i$ pour tout i et $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vérifiant $\lambda_i \geq 0$ pour tout i. Alors

$$g(\lambda) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\langle x, ai \rangle - b_i \right) \leq f(x).$$

En prenant le sup en λ et l'inf en x on obtient le résultat cherché. □

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 63. *On suppose qu'il existe un point x commun aux intérieurs relatifs du polyèdre défini par (9) et du domaine de f. Le problème primal admet une solution si et seulement s'il existe un couple $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vérifiant :*

(i) $-\sum_{i=1}^m \lambda_i^* y_i \in \partial f(x^*)$,

(ii) $\langle x^*, y_i \rangle \leq b_i$, $i = 1, \dots, m$,

(iii) $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1, \dots, m$,

(iv) $\lambda_i^* (\langle x^*, y_i \rangle - b_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

De plus le point x^* est alors solution du problème primal, le point λ^* est solution du problème dual et on a $f(x^*) = g(\lambda^*)$. En particulier les deux problèmes ont la même valeur.

Remarques.

1. Les coefficients $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange. Les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) sont appelées conditions KKT (pour Karush, Kuhn et Tucker). On dit aussi parfois que le vecteur $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ est un vecteur KKT.
2. La condition (iii) stipule que pour tout i soit l'inégalité $\langle x^*, y_i \rangle \leq b_i$ est en fait une égalité (on dit que la contrainte est saturée) soit le multiplicateur de Lagrange correspondant est nul. Par exemple dans le cas extrême où x^* est solution du problème et appartient à l'intérieur du polyèdre, aucune des contraintes n'est saturée, donc les multiplicateurs de Lagrange sont tous nuls, et la condition (i) devient $0 \in \partial f(x^*)$. Autrement dit dans ce cas x^* est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.
3. En fait il suffit d'avoir un point commun au polyèdre (9) et à l'intérieur relatif de f pour que le théorème soit vrai, le point n'a pas besoin d'être dans l'intérieur relatif du polyèdre. Mais cette amélioration repose sur un théorème de séparation pour les polyèdres un peu subtil qui n'est pas traité dans ces notes.

La démonstration combine le théorème de la section précédente avec le lemme suivant.

Lemme 64. *Soit $K = \bigcap_{i=1}^m \{\langle x, y_i\rangle \leq b_i\}$ un polyèdre, soit $x_0 \in K$ et soit $I(x_0)$ l'ensemble des indices des contraintes saturées par x_0 : $I(x_0) = \{i \leq m \colon \langle x_0, y_i\rangle = b_i\}$. Alors*

$$N_{x_0}(K) = \mathrm{pos}(\{y_i, i \in I(x_0)\}).$$

Démonstration. On commence par montrer que $T_{x_0}(K) = -\{y_i,\, i \in I(x_0)\}^*$. Si $x \in K$, alors $\langle x, y_i \leq b_i$ pour tout i donc $\langle x - x_0, y_i\rangle \leq 0$ pour tout $i \in I(x_0)$, ce qui montre $K - x_0 \subset -\{y_i,\, i \in I(x_0)\}^*$ et donc $T_{x_0}(K) = \mathbb{R}_+(K - x_0) \subset -\{y_i,\, i \in I(x_0)\}^*$. D'un autre côté si $\langle x, y_i\rangle \leq 0$ pour tout $i \in I(x_0)$ alors il est facile de voir que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $x_0 + \varepsilon x \in K$. Donc $x \in \mathbb{R}_+(K - x_0) = T_{x_0}(K)$, ce qui achève la démonstration de l'égalité $T_{x_0}(K) = -\{y_i,\, i \in I(x_0)\}^*$. Ensuite on utilise le lemme de Farkas sous la forme :

$$\{y_i, i \in I(x_0)\}^{**} = \mathrm{pos}(\{y_i, i \in I(x_0)\}).$$

On peut en effet voir ceci comme une reformulation du Lemme 41. Sinon cette égalité se déduit simplement du fait que le cône engendré par un nombre fini de points est fermé. En combinant cette égalité avec ce qui précède on en déduit bien

$$\mathrm{pos}(\{y_i, i \in I(x_0)\}) = -T_{x_0}(K)^* = N_{x_0}(K). \qquad \square$$

Démonstration du Théorème 63. Supposons que le problème primal admet une solution x^*. L'hypothèse montre qu'on a le droit d'appliquer l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ du Théorème 61. Donc il existe $y \in N_{x^*}(K)$ tel que $-y \in \partial f(x^*)$. D'après le lemme précédent y s'écrit alors $\sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i^* y_i$, avec $\lambda_i^* \geq 0$ pour tout $i \in I(x_0)$. Si on pose $\lambda_i^* = 0$ pour $i \notin I(x_0)$ on voit bien que x^* et λ^* vérifient bien les conditions (i), (ii), (iii) et (iv). La réciproque se démontre de manière analogue, et est laissée au lecteur. Il reste à montrer que λ^* est solution du problème dual et que $g(\lambda^*) = f(x^*)$. Il suffit en fait de montrer cette dernière égalité. En effet d'après le Lemme 62 on a $g(\lambda) \leq f(x^*)$ pour tout $\lambda \geq 0$, donc si $g(\lambda^*) = f(x^*)$ alors λ^* est solution du problème dual. Mais d'après le point (i) des conditions KKT on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* y_i \in \partial f(x^*)$. Par définition du sous-gradient, ceci montre que la fonction $f(x) + \langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i^* y_i\rangle$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ en x^*. On en déduit

$$g(\lambda^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \left(\langle x, ai\rangle - b_i\right) \right\} = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \left(\langle x^*, ai\rangle - b_i\right).$$

Mais d'après le point (iv) des conditions KKT le second terme du membre de droite est nul et on obtient bien $g(\lambda^*) = f(x^*)$. $\square$

Remarque. Ces résultats peuvent aussi s'interpréter de la manière suivante. On considère la fonction

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\langle x, y_i\rangle - b_i),$$

appelée Lagrangien du problème. Alors x^* est solution du problème primal et λ^* est solution du problème dual si et seulement si

$$L(x_*, \lambda_*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x, \lambda^*)\} = \sup_{\lambda \geq 0} \{L(x^*, \lambda)\}.$$

On dit que le couple (x_*, λ_*) est un point-selle du Lagrangien L.

Très souvent le polyèdre sur lequel on optimise est aussi défini par des contraintes en égalité, c'est-à-dire que l'ensemble des contraintes est de la forme

$$\begin{aligned} \langle y_i, x\rangle &\le b_i \quad i = 1\ldots k \\ \langle z_j, x\rangle &\le c_j \quad j = 1\ldots l. \end{aligned} \tag{11}$$

Évidemment cette situation se ramène à la situation précédente en remplaçant la contrainte $\langle z_j, x\rangle = c_j$ par deux contraintes $\langle z_j, x\rangle \le c_j$ et $\langle -z_j, x\rangle \le -c_j$. Donc à chaque contrainte en égalité correspond deux multiplicateurs de Lagrange positifs. Mais il est facile de voir que ceci se ramène à avoir un seul multiplicateur de Lagrange sans contrainte de signe. Autrement dit pour un problème d'optimisation convexe dont les contraintes sont données par (11) les conditions KKT deviennent :

(i) $-\sum_{i=1}^k \lambda_i^* y_i - \sum_{j=1}^l \mu_j^* z_j \in \partial f(x^*)$,

(ii) $\langle x^*, y_i\rangle \le b_i$, $i \le k$, $\langle x^*, z_j\rangle = c_j$, $j \le k$;

(iii) $\lambda_i^* \ge 0$, $i \le k$,

(iv) $\lambda_i^*(\langle x^*, a_i\rangle - b_i) = 0$, $i \le k$.

Noter qu'il n'y a pas de contraintes de positivité sur les multiplicateurs de Lagrange $\mu_1^*, \ldots, \mu_l^*$. Par exemple dans le cas où il n'y a que des contraintes en égalité, les conditions (iii) et (iv) disparaissent et on voit que x^* est solution si et seulement s'il vérifie les contraintes et $\partial f(x^*)$ appartient à $\mathrm{vect}\{z_1, \ldots, z_m\}$. Ceci était prévisible : dans ce cas on optimise f sur un espace affine, et il est facile de voir que x^* est solution si et seulement si f admet un sous-gradient en x^* qui soit orthogonal à l'espace vectoriel parallèle à l'espace affine sur lequel on optimise.

Le Théorème 63 peut se généraliser au cas où l'ensemble de contraintes n'est pas forcément polyédral, mais il est défini comme une intersection d'ensembles de niveaux de fonctions convexes explicites. C'est-à-dire qu'on considère un problème de la forme

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & f(x) \\ \text{sous contraintes} & h_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

les fonctions $f, h_1, \ldots, h_m$ étant supposées convexes. On ne va pas énoncer le résultat ici, on le fera peut-être en TD.

13 Le théorème de John

Dans cette section on va voir un exemple d'application des résultats qui précèdent. On appelle ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ un ensemble de la forme $E = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle Ax, x\rangle = 1\}$ où A est une matrice symétrique définie positive. C'est-à-dire que E est la boule unité fermé pour la norme donnée par une forme quadratique $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$. Comme on le verra plus loin les ellipsoïdes sont aussi les images de la boule euclidienne $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, x\rangle \le 1\}$ par des matrices inversibles. Étant donné un convexe K compact d'intérieur non vide et symétrique par rapport à 0, autrement dit K est la boule unité fermée d'une norme, on cherche à déterminer l'ellipsoïde inclus dans K qui maximise la mesure de Lebesgue. On va voir que ce problème admet une unique solution.

Théorème 65 (Théorème de John)**.** *Il existe un unique ellipsoïde $E \subset K$ qui soit de mesure de Lebesgue maximale. De plus on a $E = B_2^n$ si et seulement si $B_2^n \subset K$ et il existe un entier m, des vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ appartenant à $\partial K \cap \partial B_2^n$ et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ vérifiant*

$$I_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i x_i^T. \tag{12}$$

La solution du problème est appelée ellipsoïde de John associé à K. On dit aussi que K est en position de John si son ellipsoïde de John est la boule euclidienne B_2^n. La condition (12) est appelée condition de John.

Remarques. 1. Les x appartenant à $\partial K \cap \partial B_2^n$ sont appelés points de contact entre K et B_2^n (faire un dessin). La condition de John implique en particulier que si K est en position de John l'ensemble des points de contacts entre la boule euclidienne et le convexe K engendre $\mathbb{R}^n$.

2. Les points de contact appartiennent aussi à K°, puisque la condition $B_2^n \subset K$ implique $K^\circ \subset B_2^n$. Comme K est symétrique on en déduit que K est contenu dans le polyèdre symétrique $\cap_{i=1}^m \{x \colon |\langle x, x_i\rangle| \leq 1\}$.
3. Comme $\mathrm{tr}(x_i x_i^T) = \langle x_i, x_i\rangle = 1$ pour tout i, en prenant la trace de la condition de John on voit que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = n$.
4. Il est facile de voir que si E est l'ellipsoïde de John de K et A est une application linéaire inversible alors AE est l'ellipsoïde de John de AK. En particulier pour tout K il existe une application linéaire inversible telle que AK soit en position de John.
5. Il existe aussi une version du théorème de John pour les convexes non symétriques dans laquelle on s'autorise à translater les ellipsoïdes, mais on ne va pas l'aborder ici.

Le théorème de John est un résultat de théorie des convexes très puissant qui a de nombreuses conséquences. On va juste en donner un exemple ici.

Théorème 66. *Soit K un convexe compact symétrique d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un ellipsoïde E vérifiant $E \subset K \subset \sqrt{n}E$. De plus la constante $\sqrt{n}$ est optimale.*

Démonstration. On va montrer que l'ellipsoïde de John vérifie la propriété cherchée. D'après le point 4 des remarques qui précèdent on peut supposer que K est en position de John. Il s'agit alors de montrer que $B_2^n \subset K \subset \sqrt{n}B_2^n$. L'inclusion de gauche étant vraie par définition, il suffit de montrer celle de droite. La condition de John (12) montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, x_i\rangle x_i$ et donc $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, x_i\rangle^2$, en notant $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ la norme euclidienne. En utilisant maintenant les points 2 et 3 des remarques qui précèdent, on obtient $\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i = n$ pour tout $x \in K$, ce qui revient bien à dire que K est inclus dans $\sqrt{n}B_2^n$. Montrons maintenant que le $\sqrt{n}$ est optimal pour $K = B_\infty^n = [-1,1]^n$. Cette preuve sort un peu du cadre de ce cours, disons qu'elle est là en option pour celles et ceux que ça intéresserait. Il s'agit de montrer que si E est un ellipsoïde inclus dans B_∞^n, il existe $x \in B_\infty^n$ tel que $\|x\|_E \geq \sqrt{n}$, en notant $\|\cdot\|_E$ la jauge de E. On va montrer qu'un des sommets de B_∞^n vérifie l'inégalité voulue. Pour ce faire on utilise un argument probabiliste. On se donne une suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de variables aléatoires i.i.d. valant ± 1 avec probabilité $1/2$. Comme E est un ellispoïde, la norme $\|\cdot\|_E$ provient d'un produit scalaire qu'on note $\langle \cdot, \cdot\rangle_E$. On a alors le calcul suivant, dans lequel les e_i désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{E}\left[\|(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\|_E^2\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\right\|_E^2\right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j]\langle e_i, e_j\rangle_E = \sum_{i=1}^n \|e_i\|_E^2.$$

Mais comme $E \subset B_\infty^n$ on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_E$ pour tout x et donc $\|e_i\|_E \geq 1$ pour tout i. Donc $\mathbb{E}\left[\|(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\|_E^2\right]^{1/2} \geq \sqrt{n}$. Ceci implique qu'il existe au moins un choix de signe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ pour lequel $\|(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\|_E \geq \sqrt{n}$ ce qui est le résultat cherché. □

Le reste de cette section est consacré à la démonstration du théorème de John. Il faut commencer par réécrire ce problème comme un problème d'optimisation convexe. On va travailler dans l'espace $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients réels. C'est un espace vectoriel réel de dimension finie, qu'on munit du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}b_{ij}$ en notant (a_{ij}) et (b_{ij}) les coefficients respectifs de A et B. Rappelons qu'une matrice symétrique A est dite définie positive si ses valeurs propres sont toutes strictement positives, ce qui est équivalent à dire que $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour tout vecteur x non nul. Lorsque l'inégalité n'a lieu au sens large on dit que la matrice est semi-définie positive. L'ensemble des matrices semi-définies positives forme un cône convexe fermé de $S_n(\mathbb{R})$. On notera $A \geq 0$ pour dire que A appartient à ce cône. Il est facile de voir que ce cône est son propre dual, autrement dit

$$A \geq 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tr}(AB) \geq 0, \forall B \geq 0)\,.$$

Une matrice A appartient à l'intérieur du cône si et seulement si elle est définie positive, ce qu'on notera $A > 0$.
Commençons par remarquer que

$$\langle Ax, x\rangle \leq 1 \Leftrightarrow \langle A^{1/2}x, A^{1/2}x\rangle \leq 1 \Leftrightarrow A^{1/2}x \in B_2^n \Leftrightarrow x \in A^{-1/2}B_2^n.$$

Donc $E = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle Ax, x\rangle \leq 1\} = A^{-1/2}B_2^n$. En notant $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ on en déduit $|E| = |A^{-1/2}B_2^n| = \det(A)^{-1/2}v_n$ où v_n est la mesure de la boule euclidienne en dimension n. Il s'agit donc de maximiser $\det(A)^{-1/2}$ parmi les matrices A symétriques définies positives vérifiant $E = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle Ax, x\rangle \leq 1\} \subset K$, ce qui revient à minimiser $\log\det A$ parmi les matrices A vérifiant la même contrainte. Notons maintenant que $E \subset K \Leftrightarrow K^\circ \subset E^\circ$. Il est de plus facile de voir que le polaire de E est $E^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle A^{-1}x, x\rangle \leq 1\}$. La condition $K^\circ \subset E^\circ$ se réécrit donc $\langle A^{-1}x, x\rangle \leq 1$ pour tout $x \in K^\circ$. On peut aussi remarquer qu'il suffit d'imposer la contrainte pour les $x \in \partial K^\circ$. Si on échange les rôles de A et A^{-1}, le problème de John est donc équivalent au problème suivant :

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & -\log\det A \\ \text{sous contraintes} & \langle Ax, x\rangle \leq 1, \quad \forall x \in \partial K^\circ, \end{array}$$

avec la contrainte implicite supplémentaire que A doit être symétrique définie positive. On va encoder cette contrainte implicite dans la fonction à optimiser. C'est-à-dire qu'on pose

$$f \colon A \in S_n(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} -\log\det A & \text{si } A > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème de John est donc équivalent au problème d'optimisation

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & f(A) \\ \text{sous contraintes} & \langle Ax, x\rangle \leq 1, \quad \forall x \in \partial K^\circ, \end{array} \tag{13}$$

la variable A vivant dans l'espace $S_n(\mathbb{R})$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $\{A \in S_n(\mathbb{R}) \colon \langle Ax, x\rangle \leq 1\} = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \colon \operatorname{tr}(Axx^T) \leq 1\}$ est un demi-espace fermé de $S_n(\mathbb{R})$. Donc l'ensemble défini par les contraintes de (13) est convexe et fermé. On a de plus le résultat suivant.

Lemme 67. *La fonction f définie plus haut est convexe et semi-continue inférieurement sur $S_n(\mathbb{R})$. Elle est de plus strictement convexe.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ et pour toutes $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. On peut supposer $A > 0$ et $B > 0$ sinon le membre de droite vaut $+\infty$. On traite d'abord le cas $A = I_n$. Si on note α_i les valeurs propres de B alors celles de $(1-\lambda)I_n + \lambda B$ sont les $(1-\lambda) + \lambda\alpha_i$. En utilisant la concavité du logarithme on obtient

$$f((1-\lambda) + \lambda B) = -\sum_{i=1} \log\left((1-\lambda) + \lambda\alpha_i\right) \leq -\lambda\sum_{i=1}^n \log(\alpha_i) = (1-\lambda)f(I_n) + \lambda f(B).$$

Pour déduire le cas général de ce cas particulier on écrit

$$(1-\lambda)A + \lambda B = A^{1/2}\left((1-\lambda)I_n + \lambda A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)A^{1/2}.$$

On remarque que $A^{-1/2}BA^{-1/2} > 0$, on utilise les propriétés du déterminant et le cas particulier ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)A + \lambda B) &= f(A) + f\left((1-\lambda)I_n + \lambda A^{-1/2}BA^{-1/2}\right) \\ &\leq f(A) + \lambda f(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B). \end{aligned}$$

Pour la stricte convexité il s'agit de montrer que l'inégalité est stricte si $A \neq B$ et $\lambda \neq 0$ ou 1 (en fait il suffit de traiter le cas $\lambda = 1/2$). On peut procéder exactement de la même manière et utiliser la stricte concavité du logarithme. Les détails sont laissés en exercice. Pour la semi-continuité intérieure, il faut montrer que pour toute $A \in S_n(\mathbb{R})$ et toute suite de matrices symétriques (A_n) tendant vers A on a $\liminf_{A_n\to A} f(A_n) \geq f(A)$. Le seul cas qui peut poser problème est le cas où A appartient au bord du domaine, c'est-à-dire le cas $A \geq 0$ vérifiant $\det A = 0$. Dans ce cas $f(A) = +\infty$ et il s'agit de montrer que si $A_n \to A$ alors $f(A_n) \to \infty$. On peut supposer $A_n > 0$ pour tout n, alors par continuité du déterminant $\det A_n$ tend vers 0 par valeurs positives et donc $f(A_n)$ tend vers $+\infty$. □

Le problème (13) est donc bien un problème un problème d'optimisation convexe. Pour appliquer les résultat de la section précédente nous aurons besoin de déterminer le sous-gradient de f en chaque point. En fait f est ici différentiable sur son domaine.

Lemme 68. *La fonction f est différentiable sur son domaine, et pour toute matrice A dans ce domaine on a $\nabla f(A) = -A^{-1}$.*

Démonstration. On utilise le fait élémentaire suivant. Si H est une matrice $n \times n$, pas forcément symétrique, alors $\det(I_n + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(H) + o(\varepsilon)$. Donc pour $A > 0$, H symétrique et ε tendant vers 0 on a

$$\begin{aligned} f(A+\varepsilon H) &= f(A) - \log\det(I_n + \varepsilon A^{-1}H) \\ &= f(A) - \log\left(1 + \varepsilon \mathrm{tr}(A^{-1}H) + o(\varepsilon)\right) = f(A) - \varepsilon \mathrm{tr}(A^{-1}H) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

En général, le problème (13) n'est pas un problème polyèdral puisqu'il y une infinité de contraintes affines. On peut montrer qu'il se ramène à un problème avec un nombre fini de contraintes lorsque K lui-même est un polyèdre mais on souhaite ici traiter le cas général. Il nous faut alors déterminer le cône normal à l'ensemble des matrices satisfaisant les contraintes du problème en chaque point. On notera cet ensemble $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \colon \langle Ax, x\rangle \leq 1, \forall x \in \partial K^\circ\}.$$

Le résultat suivant est la partie la plus délicate de la preuve du théorème de John.

Lemme 69. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$ on a*

$$N_A(\mathcal{A}) = \mathrm{pos}\left\{xx^T \colon x \in \partial K^\circ,\ \langle Ax, x\rangle = 1\right\}.$$

Démonstration. On note $S = \{x \in \partial K^\circ \colon \langle Ax, x\rangle = 1\}$. Noter que c'est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $C = -\{xx^T \colon x \in S\}^* = \{B \in S_n(\mathbb{R}) \colon \langle Bx, x\rangle \leq 0, \forall x \in S\}$. Il est facile de voir que $T_A(\mathcal{A}) \subset C$. L'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie mais on va trouver une inclusion un peu plus faible qui est vérifiée : si on pose $C_0 = \{B \in$

$S_n(\mathbb{R})\colon \langle Bx,x\rangle < 0,\ \forall x\in S\}$ alors on a $C_0 \subset T_A(\mathcal{A})$. En effet si $B\in C_0$ alors l'application $x\mapsto \langle Bx,x\rangle$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et strictement négative sur le compact S. On en déduit qu'elle est négative sur un ouvert U contenant S. Alors $\langle (A+\varepsilon B)x,x\rangle \le \langle Ax,x\rangle \le 1$ pour tout $x\in \partial K^\circ \cap U$ et pour tout $\varepsilon > 0$. De manière similaire, comme $\langle Ax,x\rangle < 1$ sur $\partial K^\circ \backslash U$, qui est compact, il existe $\delta > 0$ tel que $\langle Ax,x\rangle \le 1-\delta$ sur $\partial K^\circ\backslash U$. On a donc $\langle (A+\varepsilon B)x,x\rangle \le 1-\delta+\varepsilon\langle Bx,x\rangle \le 1-\delta+M\varepsilon$, en notant $M = \max_{\partial K^\circ}\{\langle Bx,x\rangle\}$. Donc si $\varepsilon \le \delta/M$ on obtient $\langle (A+\varepsilon B)x,x\rangle \le 1$ pour tout $x\in\partial K^\circ$, ce qui montre bien que $B\in T_A(\mathcal{A})$. En prenant les duaux de la double inclusion $C_0\subset T_A(\mathcal{A})\subset C$ on trouve $-C^*\subset N_A(\mathcal{A})\subset -C_0^*$. Montrons maintenant que C_0 est dense dans C. En effet, comme $-I_n$ appartient à C_0, pour toute $B\in C$, le segment $[-I_n, B[$ est inclus dans C_0. En particulier B est limite d'éléments de C_0. Ceci implique en particulier $C_0^* = C^*$ et donc

$$N_A(\mathcal{A}) = -C^* = \left\{xx^T\colon x\in S\right\}^{**}.$$

D'après le théorème du bidual $N_A(\mathcal{A})$ est donc l'adhérence du cône convexe engendré par $\{xx^T\colon x\in S\}$. Pour conclure il ne reste plus qu'à montrer que ce cône est en fait fermé. Pour ce faire on commence par écrire $\mathrm{pos}\{xx^T\colon x\in S\} = \mathbb{R}_+\mathrm{conv}\{xx^T\colon x\in S\}$. Maintenant comme S est compact, l'ensemble $\{xx^T\colon x\in S\}$ aussi et son enveloppe convexe aussi. Par ailleurs $\{xx^T\colon x\in S\}$ est inclus dans le sous-espace affine $\{B\in S_n(\mathbb{R})\colon \mathrm{tr}(AB)=1\}$, donc son enveloppe convexe aussi, ce qui montre en particulier que $0\notin \mathrm{conv}\{xx^T\colon x\in S\}$. Enfin il est facile de voir que si L est un sous-ensemble compact et ne contenant pas 0 d'un espace vectoriel de dimension finie alors $\mathbb{R}_+L$ est fermé, ce qui termine la démonstration. □

On est maintenant en position de démontrer le théorème de John.

Démonstration du théorème de John. La fonction f est semi-continue inférieurement. L'ensemble $\mathcal{A}$ sur lequel on optimise n'est pas compact mais par définition de f cela revient au même d'optimiser sur l'ensemble $\mathcal{A}_+ = \{B\in\mathcal{A}\colon B\ge 0\}$ et il est facile de voir que $\mathcal{A}_+$ est compact. Donc le problème admet une solution. La solution est unique par stricte convexité de f.
Pour la deuxième partie on utilise le Théorème 61. Remarquons d'abord que ce théorème s'applique bien. En effet le domaine de f, qui est l'ensemble des matrices définies positives, est ouvert et il intersecte bien l'ensemble $\mathcal{A}$. En effet comme K° est borné, on a par exemple $\varepsilon I_n\in\mathcal{A}$ pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit. La boule euclidienne B_2^n est solution du problème de John si et seulement si la matrice I_n est solution du problème (13). D'après le Théorème 61 ceci est équivalent à $I_n\in\mathcal{A}$ et $0\in\partial f(I_n)+N_{I_n}(\mathcal{A})$. Comme on l'a vu plus haut la condition $I_n\in\mathcal{A}$ est équivalente à $K^\circ\subset B_2^n$, ce qui équivaut à $B_2^n\subset K$. D'après les Lemme 68 et 69 la deuxième condition est équivalente à $I_n\in\mathrm{pos}\{xx^T\colon x\in\partial K^\circ\cap\partial B_2^n\}$. C'est-à-dire : il existe des réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ et des vecteurs $x_1,\dots,x_m$ appartenant à $\partial K^\circ\cap\partial B_2^n$ tels que $I_n=\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i x_i^T$. On obtient presque ce qu'on voulait, si ce n'est que les x_i sont des points de contact entre K° et B_2^n alors qu'on voulait avoir des points de contact entre K et B_2^n. Mais en fait les deux conditions sont équivalentes (exercice). □

14 Espaces vectoriels topologiques localement convexes

Lorsque l'espace est de dimension finie il n'y a qu'une seule topologie qui soit intéressante, celle donnée par la distance euclidienne, ou par la distance associée à n'importe quelle norme puisqu'elle sont toutes équivalentes. En dimension infinie ce n'est plus le cas, d'abord les normes ne sont pas toutes équivalentes, et il y a même des topologies intéressantes qui ne sont pas données par une norme, comme par exemple la topologie faible sur un Hilbert de dimension infinie.

Définition 70. On dit que E est un *espace vectoriel topologique* si E est un espace vectoriel muni d'une topologie qui soit séparée, au sens les singletons de E sont fermés, et et qui soit compatible avec la structure d'espace vectoriel, au sens où les applications suivantes sont continues :

$$\left\{ \begin{array}{ll} E \times E & \to E \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} \times E & \to E \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda x \end{array} \right.$$

Si de plus le point 0 admet une base de voisinages convexes on dit que E est *localement convexe.*

Remarques. Le fait que les opérations d'espace vectoriel soient continues montre par exemple que pour tout ouvert U et pour tout $x \in E$ l'ensemble $x + U$ est ouvert. En effet c'est l'image inverse de U par l'application $y \mapsto x + y$ qui est supposée continue. De même l'ensemble λU est ouvert pour tout $\lambda \neq 0$. Rappelons aussi qu'une famille $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de E est appelée base de voisinages d'un point x_0 si tous les éléments de $\mathcal{U}$ sont des ouverts contenant x_0 et si tout ouvert contenant x_0 contient un élément de $\mathcal{U}$. Dans un espace vectoriel topologique l'invariance par translation de la topologie fait que si 0 admet une base de voisinages convexes alors n'importe quel point admet une base de voisinages convexes.

Exemples. Si E est un espace vectoriel normé alors E est un espace vectoriel topologique localement convexe. En effet il est alors facile de voir que les opérations d'espace vectoriel sont continues, et l'ensemble des boules ouvertes centrées en 0 forment une base de voisinages convexes de 0. Tous les espaces vectoriels topologiques localement convexes ne sont pas normés. Par exemple sur un Hilbert de dimension infinie la topologie faible est localement convexe mais elle ne provient pas d'une norme.

Comme on l'a dit plus haut la notion d'espace vectoriel topologique localement convexe n'est intéressante qu'en dimension finie.

Théorème 71. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe de dimension finie. Alors la topologie de E coïncide avec la topologie donnée par n'importe quelle norme. Autrement dit sur $\mathbb{R}^n$ la topologie habituelle est la seule topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe.*

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et soit $f \colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Alors f est linéaire bijective. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa topologie habituelle, il s'agit de montrer que f est un homéomorphisme (bijection continue d'inverse continu). Il est clair que f est continue, puisque les opérations d'espace vectoriel sont supposées continues sur E. Pour montrer que f^{-1} est continue on note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et on pose $K = f(S)$. Comme f est continue et S compacte, K est compact. De plus $0 \notin K$ puisque $f(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. Il existe donc un ouvert U de E contenant 0 et n'intersectant pas K. De plus on peut supposer U convexe puisque la topologie de E est supposée localement convexe. Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et ne rencontrant pas la sphère unité. Ceci implique que $f^{-1}(U)$ est inclus dans la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit $\|f^{-1}(x)\| < 1$ pour $x \in U$, ce qui implique $\|f^{-1}(x)\| < \varepsilon$ pour $x \in \varepsilon U$, qui est un voisinage de 0 dans E. Ceci montre que f^{-1} est continue en 0. Or pour une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques il est facile de voir que la continuité en 0 implique la continuité en tout point. □

Nous aurons besoin de la propriété de séparation suivante.

Proposition 72. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, soit A un compact et soit B un fermé disjoint de A. Alors il existe un voisinage convexe U de 0 tel que*

$$(A + U) \cap B = \emptyset.$$

Démonstration. Soit $x \in A$, comme x n'appartient pas à B et que B est fermé, il existe un ouvert U_x contenant x et disjoint de B. Comme la topologie est localement convexe on peut de plus supposer que U_x est convexe. On pose ensuite $V_x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}U_x$. C'est encore un ouvert convexe contenant x. Comme A est compact on peut extraire un sous-recouvrement fini $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ du recouvrement de A par les V_x. Montrons maintenant que $U = \bigcap_{i=1}^m (V_{x_i} - x_i)$ a toutes les propriétés voulues. C'est un ouvert, comme intersection finie d'ouverts, et il contient 0 puisque $x_i \in V_{x_i}$ pour chaque i. De plus U est convexe comme intersection de convexes. Enfin

$$A + U \subset \bigcup_{i=1}^m (V_{x_i} + U) \subset \bigcup_{i=1}^m (V_{x_i} + V_{x_i} - x_i) = \bigcup_{i=1}^m \left(\frac{1}{2}U_{x_i} + \frac{1}{2}U_{x_i} \right) = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}.$$

Noter qu'on a utilisé la convexité des U_{x_i} dans la dernière égalité. Puisque les U_{x_i} sont tous disjoints de B, l'ensemble $A + U$ l'est aussi. □

Les propriétés topologiques des convexes vues en dimension finie restent en partie vraies.

Proposition 73. *Soit K un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe. Alors*

1. *L'intérieur $\mathring{K}$ et l'adhérence $\overline{K}$ de K sont convexes.*
2. *Pour tous $x \in \mathring{K}$ et $y \in \overline{K}$ et tout $\lambda \in [0, 1[$ on a $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \mathring{K}$.*
3. *Si $\mathring{K} \neq \emptyset$ alors $\overline{\mathring{K}} = \overline{K}$ et $\mathring{\overline{K}} = \mathring{K}$.*

Démonstration. On commence par montrer que $\overline{K}$ est convexe. Attention, on ne peut pas utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence parce que la topologie n'est pas supposée métrisable. Soient $x_0, x_1 \in \overline{K}$, soit $t \in [0, 1]$, et soit U un ouvert convexe contenant 0. On sait que $(x_0 + U) \cap K \neq \emptyset$ et $(x_1 + U) \cap K \neq \emptyset$. Comme K et U sont convexes ceci implique $((1-t)x_0 + tx_1 + U) \cap K \neq \emptyset$. Ceci est valable pour tout ouvert convexe U contenant 0 donc pour tout ouvert contenant 0 puisque la topologie est localement convexe. Ceci montre que $(1 - t)x_0 + tx_1 \in \overline{K}$, donc que $\overline{K}$ est convexe. Le fait que l'intérieur est convexe se déduit du point 2. La démonstration du point 2 est similaire à ce qu'on a fait en dimension finie pour l'intérieur relatif. Les quelques détails à modifier son laissés en exercice. Le point 3 est une conséquence du point 2, l'argument est similaire à ce qu'on a fait en dimension finie. □

Remarques.
1. Les deux égalités du point 3 sont en général fausse lorsque K est d'intérieur vide. En dimension infinie il existe par exemple des sous-espaces vectoriels stricts (qui sont alors nécessairement d'intérieur vide) qui soient denses dans l'espace. Par exemple l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ est dense dans $L^1([0, 1])$.
2. On ne parle pas d'intérieur relatif d'un convexe en dimension finie. En effet bien que la notion ait toujours un sens, aucune des bonnes propriétés de l'intérieur relatif qu'on a vues en dimension finie ne survit donc la notion n'a plus tellement d'intérêt.

15 Le théorème de Hahn-Banach

En dimension infinie, on n'a plus de notion de projection sur un convexe fermé, sauf dans le cas très particulier des espaces de Hilbert. Pour séparer des convexes disjoints il faut donc procéder autrement. On utilise un résultat de prolongement de formes linéaires appelé théorème de Hahn-Banach.

On se donne un espace vectoriel E, qui peut être de dimension finie ou infinie. On ne suppose pas que E est muni d'une topologie pour l'instant. En revanche on aura besoin de la notion suivante : on dit qu'une fonction $p\colon E \to \mathbb{R}$ est 1-homogène si $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$ et pour tout $x \in E$. On dit qu'elle est sous-additive si $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Une norme est par exemple 1-homogène et sous-additive.

Théorème 74 (Théorème de Hahn-Banach)**.** *Soit E un espace vectoriel, soit $p\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction 1-homogène et sous-additive, soit F un sous-espace vectoriel de E et $\varphi\colon F \to \mathbb{R}$ une application linéaire dominée par p : on a $\varphi \leq p$ sur F. Alors φ peut être prolongée à E tout entier en restant dominée par p.*

Remarque. Dans ce résultat il n'y a pas de topologie, mais comme on le verra plus tard la topologie est présente de manière déguisée à travers la fonction p.

Démonstration. On commence par montrer que si $F \neq E$ on peut ajouter une dimension à F, c'est-à-dire qu'on peut prolonger φ à l'espace $F + \mathbb{R}y$, où y est un vecteur quelconque en dehors de F. Soient $x, x' \in F$, on a

$$\varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(x + x') \leq p(x + x') = p(x + y + x' - y) \leq p(x + y) + p(x' - y),$$

ce qui montre que

$$\sup_{x\in F}\{\varphi(x) - p(x - y)\} \leq \inf_{x\in F}\{p(x + y) - \varphi(x)\}. \tag{14}$$

On note α le membre de gauche dans l'inégalité précédente et on étend φ au sous-espace $F + \mathbb{R}y$ en posant $\varphi(y) = \alpha$. Montrons que φ reste dominée par p. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in F$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(x + ty) = \varphi(x) + t\alpha \leq p(x + t\alpha).$$

Si $t = 0$ cette inégalité est vérifiée par hypothèse. Si $t > 0$, l'inégalité

$$\alpha \leq p\left(\frac{x}{t} + y\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$$

et l'homogénéité de p donnent le résultat cherché. Si $t < 0$, il faut utiliser l'homogénéité et l'inégalité

$$\alpha \geq \varphi\left(-\frac{x}{t}\right) - p\left(-\frac{x}{t} - y\right).$$

Si E est de dimension finie la fin de la démonstration est immédiate : on itère cet argument jusqu'à ce que φ soit définie sur E tout entier. En dimension infinie il faut faire une récurrence transfinie, ou utiliser le lemme de Zorn, en tout cas il faut utiliser l'axiome du choix d'une manière ou d'une autre. On explique brièvement ici l'argument basé sur le lemme de Zorn. Notons Ω l'ensemble des formes linéaires ψ qui soient définies sur un sous-espace de E, qui étendent φ et qui soient dominées par p. On muni Ω d'une relation d'ordre partiel en posant $\psi_1 \preceq \psi_2$ si ψ_2 est un prolongement de ψ_1. Montrons que cette relation d'ordre a la propriété suivante : toute famille totalement ordonnée d'éléments de Ω possède un majorant dans Ω (on parle d'ensemble inductif). Soit donc $\{\psi_i\}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de Ω. Alors la famille $\{F_i\}$ des sous-espaces sur lesquels les ψ_i sont définies est totalement ordonnée pour l'inclusion, donc $F := \cup_i F_i$ est un sous-espace vectoriel de E et on définit une forme linéaire ψ sur F en posant $\psi(x) = \psi_i(x)$ si $x \in F_i$. Ceci est bien défini car si x appartient à plusieurs espaces F_i les images correspondantes $\psi_i(x)$ coïncident puisque les ψ_i sont toutes des prolongements les unes des autres. Il est aussi clair que ψ est encore dominée par p. Alors ψ est bien un majorant de la famille $\{\psi_i\}$ ce qui est le résultat cherché. Le lemme de Zorn affirme ensuite que tout ensemble inductif admet un élément maximal. Dans notre cas cela montre l'existence de $\psi \in \Omega$ qui n'admette pas de prolongement (strict) dominé par p. Mais d'après la première partie de la démonstration ceci n'est possible que si ψ est déjà définie sur E tout entier, ce qui termine la démonstration. $\square$

Corollaire 75. *Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace et soit φ une forme linéaire continue sur F. Alors φ s'étend en une forme linéaire continue sur E de même norme que φ.*

Remarque. Rappelons qu'une forme linéaire φ définie sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si la quantité suivante

$$\|\varphi\|_* = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} \{\varphi(x)\}$$

est finie. On définit ainsi une norme sur l'espace des formes linéaires continues sur E, appelée norme duale. L'espace des formes linéaires continues sur E est appelé espace dual et noté E^*.

Démonstration. On pose $C = \|\varphi(x)\|_*$ la norme de φ comme forme linéaire sur F. Alors $\varphi(x) \leq C\|x\|$ pour tout $x \in F$. Il suffit maintenant d'appliquer Hahn-Banach avec la fonction $p(x) = C\|x\|$, qui est bien 1-homogène et sous-additive. □

Corollaire 76. *Soit E un espace vectoriel normé, et soit E^* son espace dual. Alors pour tout $x \in E$, il existe $\varphi \in E^*$ de norme 1 telle que $\varphi(x) = \|x\|$. Autrement dit*

$$\|x\| = \max\{\varphi(x),\ \|\varphi\|_* = 1\}.$$

Démonstration. La propriété est triviale si $x = 0$. On suppose donc $x \neq 0$ et on pose $\varphi(tx) = t\|x\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}x$, elle vérifie vérifiant $\varphi(x) = \|x\|$, et il est facile de voir qu'elle est de norme 1. D'après le corollaire précédent φ se prolonge en une forme linéaire continue de norme 1 sur E. □

On veut maintenant déduire de Hahn-Banach un énoncé de séparation des convexes qui soit valable en dimension infinie. Pour ce faire on introduit la notion de jauge d'un convexe.

Définition 77. Soit E un espace vectoriel localement convexe et soit K un convexe de E contenant 0 dans son intérieur. On appelle *jauge* de K la fonction $p\colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$p(x) = \inf\{t > 0\colon x \in tK\}.$$

Remarque. Il est facile de voir que si K est un convexe contenant 0 dans son intérieur et $x \in E$ alors l'ensemble des $t > 0$ tels que $x \in tK$ est en fait un intervalle de la forme $]t_0; +\infty[$ ou $[t_0; +\infty[$ pour un certain $t_0 \geq 0$. La jauge de x est alors donnée par $p(x) = t_0$.

Exemple. Si E un espace vectoriel normé et B sa boule unité alors la jauge de B est égale à la norme sur E.

Proposition 78. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, soit K un convexe de E contenant 0 dans son intérieur et p sa jauge. Alors on a les propriété suivantes :*

(i) p est une fonction 1-homogène sous-additive.

(ii) p est une fonction continue.

(ii) L'ensemble $\{p < 1\}$ est égal à l'intérieur de K tandis que $\{p \leq 1\}$ est l'adhérence de K. En particulier on a $\{p < 1\} \subset K \subset \{p \leq 1\}$.

Démonstration. L'homogénéité est à peu près évidente, montrons la sous-additivité. Soient $x, y \in E$, soient $s, t > 0$ tels que $x \in sK$ et $y \in tK$. Alors par convexité de K

$$x + y \in sK + tK = (s + t)K;$$

ce qui montre que $p(x+y) \leq s+t$. En prenant l'infimum sur s et t on obtient $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$. Montrons (ii). Comme K est un voisinage de 0, εK est aussi un voisinage de 0 pour $\varepsilon > 0$. On a donc $0 \leq p \leq \varepsilon$ au voisinage de 0 ce qui montre que p est continue en 0. La continuité globale se déduit de la continuité en 0 et de la sous-additivité. Le point (iii) se déduit du (ii). Les détails sont laissés en exercice. □

Théorème 79. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et soient K, L deux ensembles convexes disjoints.*

(i) Si K est ouvert et L quelconque alors il existe une forme linéaire continue sur E telle que

$$\varphi(x) < \varphi(y), \quad \forall (x,y) \in K \times L.$$

(ii) Si K est compact et L fermé, il existe une forme linéaire continue φ sur E vérifiant

$$\sup_{x\in K} \varphi(x) < \inf_{y \in L} \varphi(y).$$

Remarque. Si on reprend la terminologie qu'on avait utilisée en dimension finie, on a donc séparation stricte dans le premier cas et séparation forte dans le deuxième.

Démonstration. On commence par le point *(i)*. Soit x_0 un point arbitraire de $K-L$ et soit $C = K - L + x_0$. Alors C est ouvert, puisque K est ouvert, et convexe puisque A et B sont convexes. De plus C contient 0 par définition de x_0. Notons aussi que comme K et L sont disjoints, $0 \notin K - L$, ce qui montre que $x_0 \notin C$. En notant p la jauge de C on a donc $p(x_0) \geq 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $\varphi(tx_0) = t$. On définit ainsi une forme linéaire sur $\mathbb{R}x_0$, et comme $p(x_0) \geq 1$, on voit facilement que $\varphi \leq p$ sur $\mathbb{R}x_0$. Par Hahn-Banach analytique, on prolonge φ sur E tout entier, en gardant l'inégalité $\varphi \leq p$. Soient $x \in K$ et $y \in L$. Alors $x - y + x_0 \in C$ et donc $\varphi(x-y+x_0) \leq p(x-y+x_0) < 1$. La dernière inégalité est stricte parce que le convexe C est ouvert. Comme $\varphi(x_0) = 1$ on en déduit $\varphi(x) < \varphi(y)$, ce qu'il fallait démontrer. Il reste à montrer que φ est continue. En dimension finie ceci serait automatique mais ce n'est pas le cas en dimension infinie. En fait ça se déduit du fait que φ est dominée par la jauge d'un convexe contenant 0 dans son intérieur. En effet, il suffit de monter que φ est continue en 0, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de 0 sur lequel $|\varphi| \leq \varepsilon$. Or comme $\varphi \leq p$ on a $\varphi \leq 1$ sur C et donc $|\varphi| \leq 1$ sur $C \cap (-C)$ et donc $|\varphi| \leq \varepsilon$ sur $\varepsilon\,(C \cap (-C))$. Et ce dernier ensemble est bien un ouvert contenant 0, puisque C lui-même est un ouvert contenant 0.
Pour le point (ii) on commence par utiliser la propriété de séparation vue à la section précédente : il existe un ouvert convexe U contenant 0 tel que $K+U$ n'intersecte pas B. Quitte à remplacer U par $U \cap -U$ on peut aussi supposer que $U = -U$. Comme $K+U$ est un ouvert convexe, on peut appliquer le point (i) à $K+U$ et L, ce qui montre qu'il existe une forme linéaire continue φ sur E telle que

$$\varphi(x) + \varphi(u) < \varphi(y), \quad \forall x \in K, u \in U, y \in L.$$

Pour conclure il suffit de montrer qu'il existe $u \in U$ tel que $\varphi(u) > 0$. Comme $U = -U$, il suffit de montrer qu'il existe $u \in U$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, alors φ est identiquement nulle sur U, mais comme U est un ouvert contenant 0, φ est alors nulle sur E tout entier, ce qui est absurde, puisque φ sépare $K+U$ de L. □

On peut déduire de ce théorème des corollaires analogues à ce qu'on avait vu en dimension finie.

Corollaire 80. *Un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique localement convexe différent de l'espace entier coïncide avec l'intersection des demi-espaces fermés le contenant.*

Remarque. Ici on appelle demi-espace fermé un ensemble de la forme $\{\varphi \leq a\}$ pour une certaine forme linéaire continue non nulle φ et un réel a.

Corollaire 81 (Hyperplan d'appui)**.** *Soit C un convexe d'intérieur non vide et x_0 un point situé à la frontière de C. Il existe alors une forme linéaire continue φ, non nulle, telle que $C \subset \{\varphi \leq \varphi(x)\}$ et telle que l'intérieur de C soit contenu dans le demi-espace ouvert $\{\varphi < \varphi(x_0)\}$. On dit que $\{\varphi = \varphi(x_0)\}$ est un* hyperplan d'appui *en x_0.*

Les démonstrations sont similaires à ce qu'on a fait en dimension finie et sojnt laissées au lecteur.

16 Théorème de Krein-Milman en dimension infinie

Théorème 82 (Krein-Milman)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et soit K un sous-ensemble convexe compact de E. Alors K est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Démonstration. Étape 1 : on montre d'abord que tout convexe compact admet au moins un point extrémal. Cette partie nécessite d'utiliser l'axiome du choix, ici on va le faire en passant par le lemme de Zorn. On dit qu'un sous-ensemble F de K est une *face* de K si F est non vide, compacte, convexe, et si $K \backslash F$ est convexe. On considère alors l'ensemble Ω des faces de K, muni de la relation d'inclusion. Montrons que Ω possède la propriété suivante : toute sous-famille totalement ordonnée possède un minorant dans Ω. Soit donc (F_i) une famille totalement ordonnée d'éléments de Ω. Alors $F = \cap_i F_i$ est convexe fermé comme intersection de convexes fermés, et non vide, puisque la famille (F_i) est une famille totalement ordonnée de fermés inclus dans un compact. De plus $K \backslash (\cap_i F_i) = \cup_i (K \backslash F_i)$ est aussi convexe, comme union d'une famille totalement ordonnée de convexes. Donc F est un minorant de la famille (F_i) dans Ω, ce qui montre la propriété cherchée. D'après le lemme de Zorn, l'ensemble Ω possède alors un élément minimal, ce qui signifie qu'il existe une face F de K qui n'admette pas de face strictement plus petite (pour l'inclusion). Montrons qu'une telle face est forcément réduite à un point. Il est alors facile de voir que ce point est un point extrémal, ce qui donne le résultat cherché. Il suffit de montrer que dès qu'un convexe compact L contient au moins deux points alors il contient une face strictement plus petite. L'argument est le suivant : soient x_1, x_2 deux points distincts de L. On peut les séparer par une forme linéaire continue : il existe φ linéaire continue telle que $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$. Alors φ atteint son maximum sur L et on note H l'hyperplan $\{\varphi = \max_L\{\varphi\}\}$. L'ensemble $L \cap H$ est alors une face de L. En effet $L \cap H$ bien convexe compact et non vide, et $L \backslash H = L \cap \{\varphi < \max_L\{\varphi\}\}$ est aussi convexe. De plus cette face est strictement plus petite que L puisqu'elle ne contient pas x_1.
Étape 2. On montre maintenant Krein-Milman. Soit K' l'enveloppe convexe fermée des points extrémaux de K. Alors K' est non vide d'après ce qui précède et comme K est convexe fermé et contient ses points extrémaux, K contient K'. Montrons l'inclusion inverse par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in K \backslash K'$. Par Hahn-Banach, on peut séparer strictement le point x_0 du convexe fermé K' : il existe une forme linéaire continue φ telle que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ pour tout $x \in K'$. À nouveau φ atteint son maximum sur K et on pose $H = \{\varphi = \max_K\{\varphi\}\}$. Alors $K \cap H$ est un convexe compact non vide. Donc il possède un point extrémal x_1 d'après l'étape 1. On peut alors montrer que x_1 est aussi un point extrémal de K. Ceci se fait de la même manière que le Lemme 30, on laisse les détails en exercice. Donc $x_1 \in K'$ et donc $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$, ce qui contredit le fait que φ atteint son maximum sur K en x_1. □

Exemple. On considère l'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie de la norme uniforme. On note B la boule unité fermée. Il est assez facile de voir que B ne contient que deux points extrémaux, à savoir la fonction constante égalé à 1 et la fonction constante égalé à -1. L'enveloppe convexe des points extrémaux de B est donc un segment. Donc Krein-Milman ne s'applique pas donc B n'est pas compacte. Ceci était prévisible, la boule unité d'un espace vectoriel normé n'est compacte qu'en dimension finie. Mais on peut dire beaucoup mieux : le fait que Krein-Milman ne s'applique pas montre qu'il n'est pas possible de mettre une topologie localement convexe sur $\mathcal{C}^0([0,1])$ qui rende B compacte. En particulier ceci montre que $\mathcal{C}^0([0,1])$ n'admet pas de prédual, il n'existe pas d'espace de Banach E tel que $E^* = \mathcal{C}^0([0,1])$. En effet si c'était la cas la boule B serait compacte pour la topologie faible $*$ (Théorème de Banach-Alaoglu).

17 Dualité et polarité en dimension infinie

On voudrait maintenant généraliser les notions de polaire d'un convexe, de cône dual, et de transformée de Legendre à des espaces de dimension infinie. Sur un espace de Hilbert, c'est immédiat, il suffit d'utiliser le produit scalaire. Sur un espace vectoriel normé E, il n'y a pas de produit scalaire, mais on peut mettre E en dualité avec E^* et poser $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$ et toute $\varphi \in E^*$. Avec cette dualité le polaire d'un ensemble de E sera un sous-ensemble de E^*. On va introduire une notion générale de dualité entre deux espaces qui est un peu abstraite mais qui a l'avantage de couvrir tous les cas.

Définition 83. On dit que deux espaces vectoriels E et F sont en dualité s'il existe une application $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times F \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire sur E pour tout $y \in F$.
2. $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire sur F pour tout $x \in E$.
3. si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout y alors $x = 0$.
4. si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout x alors $y = 0$.

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

Exemples. L'espace $\mathbb{R}^n$ est en dualité avec lui-même via le produit scalaire, plus généralement un espace de Hilbert est en dualité avec lui-même via son produit scalaire. Un espace vectoriel normé E est en dualité avec son dual E^* via la forme $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$. Mais on peut aussi avoir des esapces en dualité ne rentrant pas dans ce cadre. Par exemple $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dans dualité avec $F = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace des suites réelles via la forme

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i, \quad \forall x \in E, y \in F.$$

Une fois qu'on a une dualité entre deux espaces, on peut les munir d'une topologie associée à cette dualité.

Définition 84. Soient E, F deux espaces en dualité. Soit $\sigma(E,F)$ la plus petite topologie sur E telle que pour tout y l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ soit continue. De manière plus explicite un sous-ensemble de E est ouvert pour la topologie $\sigma(E,F)$ si et seulement s'il peut s'écrire comme réunion d'ensembles de la forme

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{x \in E \,:\, \langle x, y_i \rangle < a_i\}$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, $y_1, \ldots, y_m \in F$ et $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. On définit la topologie $\sigma(F,E)$ sur F de manière analogue.

Exemples. Si $E = F = \mathbb{R}^n$ munis du produit scalaire usuel, la topologie obtenue est la topologie usuelle. Si $E = H$ est un espace de Hilbert mis en dualité avec lui même la topologie $\sigma(H, H)$ est la topologie faible sur H. Si E est un Banach mis en dualité avec son dual E^* la topologie $\sigma(E, E^*)$ est la topologie faible sur E tandis que la topologie $\sigma(E^*, E)$ est la topologie faible $(*)$ sur E^*.

Proposition 85. *Si E, F sont en dualité la topologie $\sigma(E, F)$ fait de E un espace topologique localement convexe.*

Démonstration. J'ai la flemme d'écrire la démonstration du fait que les opérations d'espace vectoriel sont continues mais ce n'est pas très dur. La topologie est localement convexe presque par définition : les ensembles de la forme $\cap_{i=1}^m \{x \colon \langle x, y_i \rangle < 1\}$, avec $y_1, \ldots, y_m$ suite finie d'éléments de F forment une base de voisinages de 0, et ils sont tous convexes. □

Un des mérites de cette notion d'espaces en dualité c'est que les espaces E, F ont des rôles parfaitement symétriques, en particulier dans le résultat suivant.

Théorème 86. *Soient E, F deux espaces en dualité. Une forme linéaire sur E est continue pour la topologie $\sigma(E, F)$ si et seulement si elle provient de la dualité avec un élément de F : il existe $y \in F$ tel que $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in E$. Autrement dit, le dual topologique de E muni de la topologie $\sigma(E, F)$ s'identifie à F. De manière symétrique le dual de F pour la topologie $\sigma(F, E)$ est E.*

Ce résultat n'est pas très dur à montrer mais il n'est pas totalement immédiat non plus. La preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme 87 (Lemme des noyaux)**.** *Soit E un espace vectoriel et soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \varphi$ des formes linéaires. Alors on a l'équivalence suivante*

$$\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \mathrm{vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Remarque. Il n'est pas question de topologie dans ce lemme, c'est un résultat purement algébrique.

Démonstration. L'implication de droite à gauche est triviale. Montrons le sens difficile. On définit une application linéaire $T \colon E \to \mathbb{R}^{n+1}$ en posant $T(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi(x))$. L'image de T est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ qu'on note F. L'hypothèse montre en particulier que le vecteur $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ n'appartient pas à F. On en déduit que $F^\perp$ (orthogonal de F pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$) n'est pas inclus dans $\mathrm{e}_{n+1}^\perp$. Donc il existe un vecteur de $F^\perp$ dont la dernière coordonnée est non nulle, et quitte à diviser le vecteur par cette coordonnée on peut supposer qu'elle vaut 1. Donc il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 1)$ soit orthogonal à l'image de T. Mais en écrivant ce que ceci signifie explicitement on se rend compte que cela revient à dire que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$, ce qu'il fallait démontrer. □

Démonstration du Théorème 86. Si $y \in F$ l'application $x \in E \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire et continue pour $\sigma(E, F)$ par définition. C'est la réciproque qui n'est pas évidente. Soit φ une forme linéaire continue sur E. Alors $\{\varphi < 1\}$ est un ouvert de $\sigma(E, F)$ et il contient 0, donc il contient un éléments de la base de voisinages de 0 mentionnée plus haut : il existe un entier m et des éléments $y_1, \ldots, y_m$ de F tels que

$$\bigcap_{i=1}^m \{x \colon \langle x, y_i \rangle < 1\} \subset \{\varphi < 1\}.$$

On pose $\varphi_i(x) = \langle x, y_i \rangle$ pour tout i et on se donne $x \in \cap_{i=1}^m \ker(\varphi_i)$. Alors $\varphi_i(x) < 1$ pour tout i et donc $\varphi(x) < 1$. En appliquant ce résultat à λx et en faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient $\varphi(x) \leq 0$. Mais on peut appliquer ceci à $-x$, ce qui donne $\varphi(x) \geq 0$. Donc $\varphi(x) = 0$, ce qui montre que $\cap_{i=1}^m \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)$. D'après le le lemme précédent on a donc $\varphi \in \mathrm{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda \langle x, y_i \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i \right\rangle,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Définition 88. Soit E, F deux espaces en dualité. Pour $A \subset E$ on définit respectivement le polaire de A et le cône dual de A par

$$A^\circ = \{y \in F;\ \langle x, y \rangle \leq 1,\ \forall x \in A\}$$
$$A^* = \{y \in F;\ \langle x, y \rangle \geq 0,\ \forall x \in A\}.$$

De même si $\varphi \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe on définit sa transformée de Legendre par

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in E} \{\langle x, y \rangle - \varphi(x)\}, \quad \forall y \in F.$$

Les ensembles A° et A^* possède les mêmes propriétés que dans le cas fini dimensionnel, la seule différence étant que le polaire d'un sous-ensemble de E est un sous-ensemble de l'espace dual F. De même φ^* est une fonction convexe sur F. Évidemment on peut faire la même chose avec les sous-ensembles de F, dont les polaires sont des sous-ensembles de E. On a alors le résultat suivant.

Théorème 89. *Soit $A \subset E$. On a $A = A^{\circ\circ}$ si et seulement si A est convexe, contient 0 et est fermé pour la topologie $\sigma(E, F)$. De même $A = A^{**}$ si et seulement si A est un cône convexe fermé pour la topologie $\sigma(E, F)$. Enfin on a $\varphi^{**} = \varphi$ si et seulement φ est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie $\sigma(E, F)$.*

Les démonstrations sont similaires à ce qu'on a fait en dimension finie. Elles sont laissées en exercice.

Remarque. Techniquement la définition de la semi-continuité inférieure qu'on a donnée plus haut n'est valable que pour les espaces métriques. Or la topologie d'un espace vectoriel topologique localement convexe n'est pas forcément métrisable. Pour un espace topologique général la semi-continuité inférieure est définie ainsi. On dit que $f \colon E \to \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement en x_0 si pour tout $t < f(x_0)$ l'ensemble $\{f > t\}$ est un voisinage de x_0. On peut montrer que f est semi-continue inférieurement en tout point de E si et seulement si son épigraphe est fermé.

Pour les fonctions convexes en dimension infinie on peut aussi se poser la question de l'existence d'un sous-gradient.

Théorème 90. *Soient E et F deux espaces en dualité. Soit $\varphi \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement et dont le domaine est d'intérieur non vide, tout ceci pour la topologie $\sigma(E, F)$. Alors φ admet un sous gradient en tout point de l'intérieur de son domaine : pour tout x_0 à l'intérieur du domaine, il existe $y \in F$ tel que*

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \langle x - x_0, y \rangle, \quad \forall x \in E.$$

Encore une fois on laisse la démonstration en exercice.