Université Paris-Dauphine Année 2019/20
L3

Analyse complexe
Feuille d'exercices

Exercice 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que les composantes connexes de Ω sont ouvertes.

Exercice 2. Montrer par un exemple que la réunion de deux ensembles connexes n'est pas forcément connexe. Même question pour l'intersection.

Exercice 3. On dit qu'un espace métrique (X, d) est totalement discontinu si les composantes connexes de X sont les singletons.

1. Montrer que si les singletons sont ouverts alors X est totalement discontinu. Donner un exemple d'un tel espace.
2. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse, et qu'un espace peut même être totalement discontinu sans qu'aucun de ses singletons ne soit ouvert.

Exercice 4. On rappelle la définition de la limsup et la liminf d'une suite (a_n) de réels :

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{a_k\} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\{a_k\}.$$

1. Montrer que $\limsup a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (a_n), en autorisant les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ comme valeurs d'adhérence. Montrer de même que $\liminf a_n$ est la plus petite valeur d'adhérence.
2. Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ on a $\lim a_n = \ell$ si et seulement si $\liminf a_n = \limsup a_n = \ell$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f(z) = z^n$. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que $f'(z) = nz^{n-1}$. Si n est un entier négatif, montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et que la formule pour la dérivée reste valide.

Exercice 6. Montrer que si f est holomorphe sur un domaine et que f ne prend que des valeurs réelles alors f est constante.

Exercice 7 (Critère de d'Alembert)**.** Montrer que si $|a_{n+1}|/|a_n| \to \ell \in [0, \infty]$ alors le rayon de $\sum a_n z^n$ vaut $1/\ell$.

Exercice 8. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum q^{n^2} z^n$ où q vérifie $|q| < 1$;
2. $\sum n^p z^n$ où p est un entier non nul ;

3. $\sum a_n z^n$ où a_n vérifie $a_n = a^n$ si n est pair et $a_n = b^n$ si n est impair et a, b sont deux nombres complexes non nuls.

Exercice 9 (Lemme d'Abel)**.** Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes.

1. (transformée d'Abel) Montrer que pour tout entier N on a
$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_{N+1} \sum_{k=0}^{N} b_k + \sum_{n=0}^{N} \left((a_n - a_{n+1}) \sum_{k=0}^{n} b_k \right).$$
2. En déduire que si (a_n) une suite de réels décroissant vers 0 et si la suite $(\sum_{k \leq n} b_k)$ des sommes partielles des b_n est bornée alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
3. Application : montrer que si $|z| = 1$ et $z \neq 1$ alors $\sum_{n \geq 1} z^n / n$ converge.

Exercice 10 (Continuité à la frontière)**.** Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit z_0 un point situé au bord du disque de convergence. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge alors
$$\lim_{t \to 1,\, t<1} \sum_{n \geq 0} a_n (t z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n.$$
Indication : Se ramener au cas $z_0 = 1$ et utiliser la transformée d'Abel.

Exercice 11 (Produit de Cauchy)**.** Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série
$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$
est supérieur ou égal à $\min(R_1, R_2)$ et que pour $|z| < \min(R_1, R_2)$ on a
$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$
2. En déduire que le produit de deux fonctions analytiques est analytique.

Exercice 12. On fixe un entier $p \geq 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \binom{n+p}{n} z^n$ et montrer que pour z dans le disque de convergence on a
$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+p}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}.$$
2. En déduire que pour tous entiers p, q on a
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} \binom{q+n-k}{n-k} = \binom{p+q+1+n}{n}.$$
Indication : Utiliser l'exercice précédent.

Exercice 13. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Montrer que la somme de la série est analytique sur son disque de convergence.
Remarque : Il est évident que la somme de la série est développable en série entière en 0, il s'agit de montrer qu'elle est développable en série entière en tout point du disque.

Exercice 14. La notion d'analycité a aussi du sens sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est analytique si elle admet un développement en série entière en tout point de l'intervalle. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 15. Montrer qu'une fonction analytique nulle en z_0 se factorise par $(z - z_0)$. Autrement dit si f est analytique et vérifie $f(z_0) = 0$ alors il existe g analytique telle que $f(z) = (z - z_0)g(z)$ pour tout z.

Exercice 16. On a vu en cours que la dérivée d'une fonction analytique était analytique. Montrer de même que si une fonction analytique admet une primitive, alors cette primitive est analytique.

Exercice 17. Résoudre les équations $\mathrm{e}^z = -1$ et $\sin z = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18. Montrer que pour tout entier n, il y a une inégalité valable pour tout $x \geq 0$ entre $\sin(x)$ et son développement de Taylor à l'ordre n.

Exercice 19. Montrer que $\sin(\pi/6) = 1/2$ et en déduire que $3 < \pi < 3 + 3^{-3/2}$.

Exercice 20. On note log la détermination principale du logarithme. Est-il vrai que $\log(z_1 z_1) = \log(z_1) + \log(z_2)$ dès que z_1, z_2 et $z_1 z_2$ sont dans le domaine de définition de log ?

Exercice 21. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ par

$$f_\alpha(z) = \exp(\alpha \log z)$$

où log désigne la détermination principale du logarithme. Montrer que f_α est holomorphe et déterminer les valeurs de α pour lesquelles on peut prolonger de manière holomorphe f_α à $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, voire à $\mathbb{C}$ tout entier.
Indication : On pourra commencer par essayer de prolonger f_α par continuité en -1.

Exercice 22.

1. Montrer que le développement en série entière de la détermination principale du logarithme en 1 est

$$\log z = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

2. En combinant ceci avec les exercices 9 et 10 montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = 2\sin(\frac{\theta}{2}) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\theta - \pi}{2}.$$

Exercice 23. Soit f la fonction donnée par $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$.

1. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. En appliquant la formule de Cauchy au bord du demi-cercle centré en 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan supérieur, montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 24. En appliquant la formule de Cauchy à un rectangle bien choisi montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+iy)^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$$

et en déduire la fonction caractéristique de la loi Gaussienne.

Exercice 25. Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens direct et soit α un nombre complexe n'appartenant pas au cercle. Calculer

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-\alpha)(z-1/\alpha)}.$$

Exercice 26. Pour les chemins de classe $\mathcal{C}^1$ démontrer que l'indice par rapport à un point est constant sur les composantes connexes du complémentaire du chemin en utilisant un théorème de dérivation sous le signe intégrale à la place du théorème de Rouché.

Exercice 27 (Une autre démonstration de d'Alembert-Gauss)**.** Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Pour tout $r > 0$ on note γ_r le chemin parcourant le cercle centré en 0 et de rayon r dans le sens direct. Si P n'a pas de racines de module r on note $j(r)$ l'indice du chemin $P \circ \gamma_r$ par rapport à 0. Montrer que $j(r) = n$ pour r assez grand et en déduire que P possède forcément une racine.

Exercice 28. Soit Ω un domaine simplement connexe et soit f holomorphe sur Ω.

1. Montrer que si f ne s'annule pas sur Ω alors il existe g holomorphe sur Ω telle que $e^g = f$.
   Indication : Rappelons que sur un domaine simplement connexe les fonctions holomorphes admettent des primitives globales.
2. En déduire que si f ne s'annule pas alors pour tout entier n il existe h holomorphe sur Ω telle que $h^n = f$.
3. Enfin montrer que si f évite les valeurs 0 et 1 alors il existe k holomorphe sur Ω telle que $\cos(k) = f$.

Exercice 29. Soit Ω un domaine et soit f une fonction holomorphe sur Ω et ne s'annulant pas sur Ω.

1. Montrer que $\log|f|$ vérifie la formule de la moyenne sur Ω.
   Indication : Utiliser l'exercice précédent.

2. En déduire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\mathrm{e}^{i\theta}-z|\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |z|<1 \\ \log|z| & \text{si } |z|>1 \end{cases}$$

3. Montrer que $\log|\mathrm{e}^{i\theta}-1|$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ et en déduire que le résultat de la question précédente reste vrai pour $|z|=1$. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \log(\sin\theta)\,d\theta$.

Exercice 30 (Effacement des singularités)**.**

1. Montrer que si f est holomorphe sur $\Omega\backslash\{z_0\}$ et continue en z_0 alors elle est holomorphe sur Ω.
2. Soit D une droite, montrer que si f est holomorphe sur $\Omega\backslash D$ et continue sur Ω alors f est holomorphe sur Ω.
3. (Principe de symétrie de Schwarz) Soit Ω un domaine symétrique par rapport à l'axe réel. Soit f holomorphe sur $\Omega\cap\{\Im z>0\}$, continue et à valeur réelle sur $\Omega\cap\mathbb{R}$. Montrer que f admet une unique extension holomorphe à Ω.

Exercice 31 (Extensions du théorème de Liouville)**.**

1. Soit f une fonction entière vérifiant $f(z)=O(|z|^n)$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n.
2. Soient f et g deux fonctions entières vérifiant $|f(z)|\leq|g(z)|$ pour tout z, montrer qu'il existe λ tel que $f=\lambda g$.

Exercice 32 (Lemme de Schwarz)**.** Soit f holomorphe sur le disque $D:=D(0,1)$ telle que $f(0)=0$ et $f(D)\subset D$.

1. Montrer que $|f(z)|\leq|z|$ pour tout $z\in D$ et que $|f'(0)|\leq 1$.
2. Montrer de plus que dès que l'une de ces inégalités est une égalité (en plus de l'égalité $f(0)=0$) alors il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}z$ pour tout $z\in D$.

Application : On appelle automorphisme du disque une application de D dans D qui soit bijective, holomorphe et de réciproque holomorphe.

3. Soit $a\in D$, montrer que l'application

$$\psi_a\colon z\in D\mapsto\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$$

est un automorphisme du disque, et qu'il échange 0 et a.

4. Réciproquement, montrer si ψ est un automorphisme du disque alors il existe $a\in D$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels que $\psi=\mathrm{e}^{i\theta}\psi_a$.
Indication : Commencer par montrer qu'un automorphisme du disque qui fixe 0 est une rotation en utilisant le lemme de Schwarz.

Exercice 33. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes vérifiant $f_n\to f$ uniformément sur tout compact. Montrer que $f_n'\to f'$ uniformément sur tout compact. Donner un résultat analogue pour les séries de fonctions holomorphes et les intégrales dépendant de manière holomorphe d'un paramètre.
Indication : Utiliser les inégalités de Cauchy.

Exercice 34. On note $\gamma(dx) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$ la mesure gaussienne standard. Montrer que $\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{zx}\gamma(dx)$ est une fonction entière. Montrer que $\varphi(t) = \mathrm{e}^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et en déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx}\,\gamma(dx) = \mathrm{e}^{-t^2/2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 35. Soit f holomorphe dans un voisinage épointé d'un point z_0.

1. Montrer que si $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$ alors z_0 est un pôle (la singularité n'est pas essentielle).
   Indication : Étudier la singularité de $1/f$ en z_0.
2. Montrer de plus que si la singularité est essentielle alors l'image par f de tout voisinage épointé de z_0 est dense dans $\mathbb{C}$.
   Remarque : En fait on peut montrer beaucoup mieux : le grand théorème de Picard affirme que si z_0 est une singularité essentielle alors l'image de tout voisinage épointé de z_0 évite au plus un point.

Exercice 36. Soit Ω un domaine ne contenant pas 0 et soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dit que f est une détermination de la racine n-ième si f est continue sur Ω et vérifie $f(z)^n = z$ pour tout z.

1. Montrer que si f est une détermination de la racine n-ième alors f est holomorphe et vérifie $f' = \frac{1}{nf^{n-1}}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de détermination de la racine n-ième dans un voisinage épointé de 0.
   Indication : Raisonner par l'absurde et étudier la singularité de la racine n-ième en 0.

Exercice 37 (Encore une extension de Liouville)**.** Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Montrer que s'il existe un entier n tel que $f(z) = O\left(|z|^n\right)$ en l'infini alors f est une fraction rationnelle.
Indication : Commencer par montrer que sous ces hypothèses f n'a qu'un nombre fini de pôles.

Exercice 38. Soit f une fonction méromorphe de la forme $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, où g est une fonction holomorphe au voisinage de z_0. Montrer que le résidu de f en z_0 vaut $g^{(n-1)}(z_0)/(n-1)!$.

Exercice 39. Déterminer la fonction caractéristique de la loi de Cauchy, c'est-à-dire la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ ayant pour densité $1/\pi(1+x^2)$, en appliquant la formule des résidus à un grand demi-cercle posé sur l'axe réel.

Exercice 40. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 41. Soit $R(X,Y)$ une fraction rationnelle de deux variables à coefficients complexes. On suppose que R n'a pas de pôle sur le cercle unité.

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$
s'exprime en fonction des résidus de la fonction méromorphe
$$\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right).$$
2. Utiliser ce principe pour calculer l'intégrale
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\, d\theta,$$
où a est un réel vérifiant n'appartenant pas à l'intervalle $[-1, 1]$. Question subsidiaire : même question pour a complexe, toujours en excluant l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 42. En appliquant la formule des résidus à un rectangle bien choisi montrer que pour tout α vérifiant $0 < \Re\alpha < 1$ on a
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Exercice 43. Soit g la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par
$$g(z) = \frac{1}{z^2(e^z-1)}.$$

1. En appliquant la formule des résidus à g et à un chemin faisant le tour d'un rectangle bien choisi montrer que
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
2. (Généralisation) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^n\, 2^{2n-1} \pi^{2n} a_{2n},$$
où les (a_n) sont les coefficients du développement en série entière de $\frac{z}{e^z-1}$ en 0.

Exercice 44. Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0. On suppose que f est non constante et on note k l'ordre du zéro de $f - f(z_0)$ en z_0, ce nombre est parfois appelé indice de f en z_0.

1. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et pour α suffisamment proche mais distinct de $f(z_0)$ l'équation $f(z) = \alpha$ possède k racines distinctes dans le disque $D(z_0, \varepsilon)$.
Indication : Penser au théorème de Rouché.

Ce résultat à de nombreuses conséquences :

2. Montrer qu'une fonction holomorphe non constante est ouverte (i.e. l'image d'un ouvert est un ouvert).
3. Montrer si f est holomorphe et injective alors f' ne s'annule pas.
4. En déduire que si f est holomorphe sur un domaine et injective, alors l'image de f est un domaine et la réciproque de f est aussi holomorphe. On dit que f est bi-holomorphe.

Encore une fois ces résultats sont spécifiques à l'analyse complexe, il est facile de voir que les énoncés analogues sur $\mathbb{R}$ sont complètement faux.

Exercice 45 (Formule de Jensen)**.** Soit f holomorphe au voisinage du disque $\overline{D} = \overline{D}(0, r)$. On suppose aussi que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros dans le disque $\overline{D}$.
2. On énumère $z_1, \ldots, z_n$ les zéros de f dans $\overline{D}$ en tenant compte des multiplicités : par exemple un zéro d'ordre 3 est répété trois fois dans la liste. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta = \log |f(0)| + \sum_j \log \left(\frac{r}{|z_j|} \right).$$
Indication : Utiliser l'exercice 29.

On va maintenir donner une application de cette formule. On dit qu'une fonction entière f est d'ordre $\rho \in [0, +\infty[$ s'il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait
$$|f(z)| \leq e^{C|z|^\rho}$$
pour tout z de module suffisamment grand.

3. Montrer que si f est une fonction entière d'ordre ρ, alors il existe $C_1 > 0$ tel que le nombre $N(r)$ de zéros de f qui soient de module plus petit que r vérifie $N(r) \leq C_1 r^\rho$ pour r assez grand.
4. Illustrer ce résultat avec la fonction sinus.

Exercice 46. Montrer de deux manières différentes que
$$\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 47. Montrer que pour $|z| < 1$ on a
$$\prod_{n \geq 0} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}$$

Exercice 48 (Factorisation de la fonction zêta de Riemann)**.** Montrer que pour $\Re z > 1$
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}.$$

Montrer aussi que cette fonction (appelée fonction zêta de Riemann) est holomorphe sur $\{\Re z > 1\}$.

Exercice 49. Déterminer le résidu de la fonction Γ en chacun des ses pôles.

Exercice 50.

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}$ on a

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

2. En déduire la formule suivante (appelée formule de duplication)

$$\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$