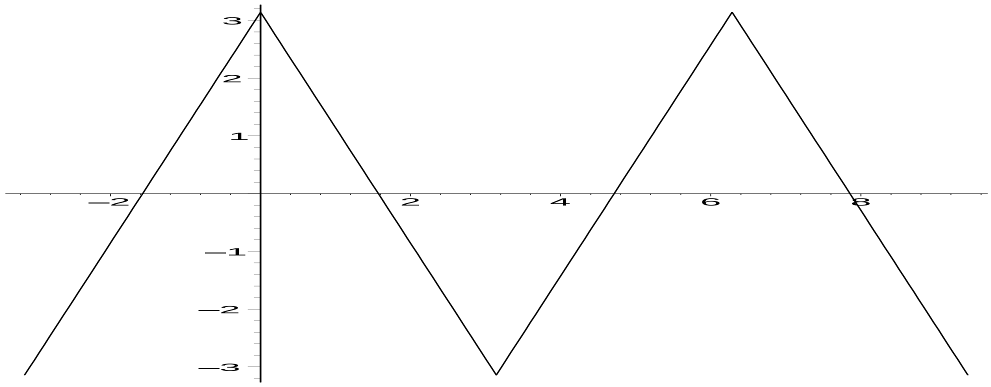
Corrigé de l'examen du 25 mai 2004

Exercice 1
1) Représentation graphique



2) $c_0 = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \pi - 2xdx = 0$. La fonction étant paire, les coefficients b_n sont nuls.

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)dx = \frac{4}{\pi n^2}(1-\cos(n\pi)) = \frac{4}{\pi n^2}(1-(-1)^n)$$

(faire une intégration par parties)

d'où $a_{2k} = 0$ et $a_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^2}$.

3) La fonction f est de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de f est convergente en tout point. Par exemple, pour $x = 0$ on obtient :

$$\pi = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^2}$$

donc

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Soit s la somme de la série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. On peut écrire

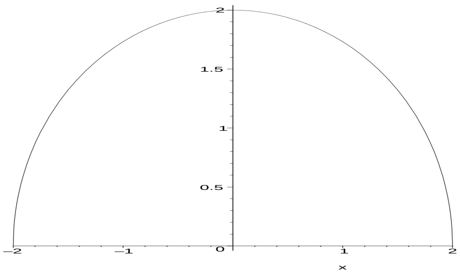
$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}s \end{aligned}$$

d'où $\frac{3}{4}s = \frac{\pi^2}{8}$ et finalement

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2

Représentation graphique du domaine (demi-disque)



On note C la courbe limitant le demi-disque D , c'est-à-dire le demi-cercle et le segment $[-2, 2]$ de l'axe des abscisses, orientée dans le sens trigonométrique. Le travail $T_C(V)$ du champ de vecteurs V est donné par exemple par la formule de Green-Riemann :

$$V = (P, Q) \qquad T_C(V) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

D étant le domaine limité par la courbe C, soit

$$T_C(V) = \iint_D 3\left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

Calculons cette intégrale en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} T_C(V) &= \int_0^2 \int_0^\pi 3r^3 d\theta dr \\ &= 3\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

Exercice 3

Le système est de la forme $X' = MX + B$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -9\cos t + 17\sin t \\ -2\sin t - 4\cos t \end{pmatrix}$$

On diagonalise M. Les valeurs propres sont $+5$ et -5. Les vecteurs propres $V = (2, 1)$ et $(1, -2)$ donnent la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et son inverse $M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On obtient donc les solutions du système homogène

$$\begin{cases} x(t) = & 2c_1e^{5t} + c_2e^{-5t} \\ y(t) = & c_1e^{5t} - 2c_2e^{-5t} \end{cases}$$

Il reste à calculer des solutions particulières du système complet. On sait qu'il en existe de la forme

$$x_0(t) = a\cos t + b\sin t$$

$$y_0(t) = c\cos t + d\sin t$$

On obtient

$$-a\sin t + b\cos t = 3(a\cos t + b\sin t) + 4(c\cos t + d\sin t) - 9\cos t + 17\sin t$$
$$-c\sin t + d\cos t = 4(a\cos t + b\sin t) - 3(c\cos t + d\sin t) - 2\sin t - 4\cos t$$

d'où en identifiant les coefficients de $\sin t$ et $\cos t$ dans les 2 équations, le système linéaire

$$\begin{cases} a + 3b + 4d & = -17 \\ -3a + b - 4c & = -9 \\ -4b - c + 3d & = -2 \\ -4a + 3c + d & = -4 \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1 \quad d = -3$$

On obtient finalement les solutions générales du système différentiel :

$$x(t) = 2c_1e^{5t} + c_2e^{-5t} + \cos t - 2\sin t$$
$$y(t) = c_1e^{5t} - 2c_2e^{-5t} + \cos t - 3\sin t$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

(On peut aussi poser $X = PZ$ et résoudre le système $Z' = DZ + P^{-1}B$ où D est la matrice diagonale $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{smallmatrix}\right)$ puis calculer $X = PZ$. Les calculs sont un peu plus longs...)