Corrigé de l'examen du 16 mai 2005

Exercice (6 points) Voir TD.

Problème (14 points)

I - Etude des suites orthonormales.

I-1. On écrit $f = P_n(f) + (f - P_n(f))$ et puisque $f - P_n(f)$ est orthogonal à $P_n(f)$ (caractérisation de la projection orthogonale), le théorème de Pythagore donne

$$\|f\|^2 = \|P_n(f)\|^2 + \|f - P_n(f)\|^2$$

D'autre part, $\|f - P_n(f)\| = d_n(f)$ (autre propriété de la projection orthogonale). L'égalité demandée en résulte.

I-2. De la question précédente il résulte que si $\|f\| = 1$ on a $1 = \|P_n(f)\|^2 + d_n(f)^2$, d'où $\|P_n(f)\| \leqslant 1$. Mais si $f \in V_n$, on a $f = P_n(f)$ et par suite $\|P_n(f)\| = \|f\| = 1$. Donc, $\sup\limits_{\|f\|=1} \|P_n(f)\| = 1$.

I-3. On sait que $P_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle \varphi_k \,|\, f\rangle \varphi_k$. [On peut aussi le redémontrer en calculant $\left\langle \left(f - \sum\limits_{k=0}^{n} \langle \varphi_k \,|\, f\rangle \varphi_k\right) \,\middle|\, v\right\rangle = 0$ pour $v \in V_n$]. Donc, toujours par le théorème de Pythagore on a $\|P_n(f)\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle \varphi_k \,|\, f\rangle^2$. La question **I-1.** donne alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \langle \varphi_k \,|\, f\rangle^2 + d_n(f)^2 = \|f\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci prouve que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \langle \varphi_k \,|\, f\rangle^2$ sont majorées par $\|f\|^2$, donc la série est convergente et on a l'inégalité de Bessel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi_k \,|\, f\rangle^2 \leqslant \|f\|^2$$

(On peut aussi utiliser **I-2.**)

I-4. Puisque $f_k \in V$, f_k est combinaison linéaire de fonctions φ_m, ce qui signifie que $f_k \in V_N$ pour un certain N et donc à V_n pour tous les entiers supérieurs à N. Donc, pour tout $n \geqslant N$, $f_k = P_n(f_k)$ d'où $f - P_n(f) = f - P_n(f) + P_n(f_k) - f_k$, c'est-à-dire, puisque P_n est linéaire

$$f - P_n(f) = f - f_k + P_n(f_k - f)$$

On a donc

$$\|f - P_n(f)\| \leqslant \|f - f_k\| + \|P_n(f_k - f)\| \leqslant 2\,\|f - f_k\|$$

Choisissons maintenant $\varepsilon > 0$ et k tel que $\|f - f_k\| \leqslant \varepsilon$. Alors, ce qui précède montre que pour tout n assez grand, $\|f - P_n(f)\| \leqslant 2\varepsilon$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\| = 0$$

I-5. Si Φ est une base orthonormale, le sous-espace V est dense dans E. Donc pour toute $f \in E$, il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec $f_k \in V$, qui converge vers f. La question **I-4** dit alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\| = 0$.
Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\| = 0$, il suffit de poser $f_n = P_n(f)$. En effet, $f_n \in V_n \subset V$ et la suite (f_n) converge vers f. Donc V est dense dans E et Φ est bien une base orthonormale.

II - Les suites C et S.

II-1. Rappelons que : $\cos p \cos q = \frac{1}{2}\Big(\cos(p+q)+\cos(p-q)\Big)$. On peut ainsi calculer (si m, n non nuls)

$$\begin{aligned}
\langle C_m \mid C_n \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(nx)\cos(mx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos((n+m)x)+\cos((n-m)x)dx \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq m \\ 1 \text{ si } m = m \end{cases}
\end{aligned}$$

Calculs évidents pour n ou m nul, et de même pour S. Par contre, si $n \neq m$ sont non nuls et par exemple si n est pair et m impair, $m+n$ et $n-m$ sont impairs et

$$\begin{aligned}
\langle C_m \mid S_{n-1} \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(mx)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin((n+m)x)+\sin((n-m)x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{m+n}+\frac{2}{n-m}\right) \neq 0
\end{aligned}$$

[On remarquera que sur $[0, 2\pi]$, ces fonctions sont orthogonales.]

II-2 Soit $f \in E$. La fonction F devant être paire, elle doit vérifier, pour $x \in [-\pi, 0]$, $F(x) = f(-x)$. On prolonge cette fonction à $\mathbb{R}$ en une fonction $2\pi-$périodique. La seule propriété à vérifier est la continuité. Comme f est continue sur $[0, \pi]$, F est continue sur $]-\pi, +\pi]$. Mais $F(\pi) = F(-\pi)$ montre immédiatement que F est continue. L'unicité est évidente.

La série de Fourier réelle de F est

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

car F est paire (pas de terme en sinus). On a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = \langle C_0 \mid f \rangle$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-t)\cos nt dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt dt \\
&= \sqrt{2}\langle C_n \mid f \rangle
\end{aligned}$$

Il résulte alors de l'égalité de Parseval (qui est conséquence du fait que les fonctions <u>$2\pi-$périodiques</u> $\sin nx$ et $\cos nx$ constituent une base orthonormale de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$), que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2 dt &= c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \\
&= \langle C_0 \mid f\rangle^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\langle C_n \mid f\rangle\right)^2 \\
&= \langle C_0 \mid f\rangle^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\langle C_n \mid f\rangle^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\langle C_n \mid f\rangle^2
\end{aligned}
$$

La série étant convergente. Ensuite, par un calcul classique (développer le carré scalaire) ou la question **I-1.**, on a $\|f - P_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|P_n(f)\|^2$. Donc, comme $\|P_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle C_k \mid f\rangle^2$ (question **I-3.**), il vient

$$
\|f - P_n(f)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle C_k \mid f\rangle^2
$$

ce qui est le reste d'une série convergente, donc de limite nulle quand n tend vers l'infini. En appliquant **I-5.**, on prouve que C est une base orthonormale de E.

III - Sur les polynômes de Legendre.

III-1. Soit $\alpha_n > 0$ pour tout n. On a (en posant $t = 2\frac{x}{\pi} - 1$)

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha_n Q_n \mid \alpha_m Q_n\rangle &= \alpha_n\alpha_m \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2^n n!} P_n(2\frac{x}{\pi} - 1)\frac{1}{2^m m!} P_m(2\frac{x}{\pi} - 1) dx \\
&= \alpha_n\alpha_m \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n n!} P_n(t)\frac{1}{2^m m!} P_m(t)\frac{\pi}{2} dt \\
&= \frac{\alpha_n\alpha_m}{2}\frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t) dt
\end{aligned}
$$

d'où $\langle \alpha_n Q_n \mid \alpha_m Q_m\rangle = 0$ si $m \neq n$ et

$$
\|\alpha_n Q_n\|^2 = \frac{\alpha_n^2}{2}\frac{1}{(2^n n!)^2}\left(\frac{\left(2^{2n+1}(n!)\right)^2}{2n+1}\right) = \frac{\alpha_n^2}{2n+1}
$$

Pour répondre à la question on doit donc prendre $\alpha_n = \sqrt{2n+1}$.

III-2. Puisque $V_n \subset V_{n+1}$, il est clair que la distance de f à V_n est supérieure à la distance de f à V_{n+1}, d'où $d_{n+1,Q}(f) \leqslant d_{n,Q}(f)$. La suite des distances est décroissante.

III-3. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $f \in E$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme A tel que $\|f - A\|_\infty < \varepsilon$ ($\| \, \|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme sur $[0, \pi]$). Comme $\|g\| \leqslant \|g\|_\infty$ pour toute $g \in E$, on a aussi $\|f - A\| < \varepsilon$. Mais A appartient à un certain sous-espace $V_{n,Q}$ (car les Q_n sont des polynômes de degré n et $V_{n,Q}$ coïncide avec l'ensemble des polynômes de degré au plus n). Donc $d_n(f) \leqslant \|f - A\| < \varepsilon$ et comme la suite $(d_n(f)$ est décroissante, on a $d_k(f) \leqslant \varepsilon$ pour tout $k > n$. On applique encore une fois **I-5.** pour conclure que Q est une base orthonormale de E.