Corrigé de l'examen du 14 décembre 2004

Exercice (6 points)
a) La fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue et $g(a) \geqslant 0$, $g(b) \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule en un point c au moins de $[a, b]$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

b) Si $f(a) \in]a, b[$, l'image par f de la partie connexe $]a, b]$ est $[a, f(a)[\cup] f(a), b]$ qui n'est pas connexe. Or l'image d'un connexe par une application continue est connexe, donc $f(a)$ est égal à a ou b. Pour la même raison $f(b) \in \{a, b\}$. Comme f est injective, $f(a) \neq f(b)$, donc on a bien la situation du texte.

Problème (14 points)
I – Une application linéaire continue. (5 points)

I-1. On a, par hypothèse, $|a_n x_n| \leqslant \|a\|_\infty |x_n|$, donc pour tout $N > 0$

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n x_n| \leqslant \|a\|_\infty \sum_{n=0}^{N} |x_n| \leqslant \|a\|_\infty \|x\|$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |a_n x_n|$ sont majorées, donc elle converge et $(a_n x_n)_n \in \ell^1$. La série $\sum a_n x_n$ étant absolument convergente et $\mathbb{R}$ étant complet, cette série est convergente.

Remarque 1 – Il ne suffit pas de majorer $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x_n$ pour que la série converge (sauf si elle est à termes positifs...).

I-2. La linéarité de φ_a est immédiate et la continuité résulte de l'inégalité

$$|\varphi_a(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n| \leqslant \|a\|_\infty \|x\|$$

Cette inégalité montre de plus que $\|\varphi_a\| \leqslant \|a\|_\infty$, par définition de la norme d'une application linéaire.

I-3. Montrons qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $x \in \ell^1$ tel que $|\varphi_a(x)| \geqslant (\|a\|_\infty - \varepsilon) \|x\|$ ce qui prouvera que $\|\varphi_a\| \geqslant \|a\|_\infty$ et l'égalité d'après la question précédente. Il existe un entier n tel que $|a_n| \geqslant (\|a\|_\infty - \varepsilon)$ (par définition de $\|a\|_\infty$). Mais pour cet entier, $\varphi_a(e_n) = a_n$, donc $|\varphi_a(e_n)| = |a_n| \geqslant (\|a\|_\infty - \varepsilon) \|e_n\|$. Ceci montre que φ_a est une isométrie. La linéarité résulte du calcul immédiat suivant (notations évidentes !)

$$\varphi_{\lambda a + b}(x) = \sum_n (\lambda a_n + b_n) x_n = \lambda \sum_n a_n x_n + \sum_n b_n x_n = \lambda \varphi_a(x) + \varphi_b(x)$$

II-1. Soit $u \in E$. Alors $u(e_n) \in \mathbb{R}$ et, puisque u est continue, linéaire et $\|e_n\| = 1$

$$|a_n| = |u(e_n)| \leqslant \|u\| \|e_n\| = \|u\|$$

ce qui montre que a est une suite bornée et $\|a\|_\infty \leqslant \|u\|$ (c'est-à-dire que $\|u\|$ majore $\|a\|_\infty$).

II-2. On a $u(s_N) = u(\sum\limits_{k=0}^{N} x_k e_k) = \sum\limits_{k=0}^{N} x_k u(e_k) = \sum\limits_{k=0}^{N} x_k a_k$.

On a $s_N = (x_0, x_1, ..., x_N, 0, 0, ...)$, suite dont tous les termes sont nuls sauf les N premiers, identiques à ceux de s. Il en résulte que $s - s_N = (0, 0, ...0, x_{N+1}, x_{N+2}, ...)$ et

$$\|s - s_N\| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|$$

C'est le reste de rang $N+1$ de la série convergente $\sum\limits_k |x_k|$, qui tend donc vers 0 quand N tend vers l'infini. Donc s_N converge bien vers s dans ℓ^1.
Puisque u est continue, on en déduit que $u(s_N)$ converge vers $u(s)$. Or on a vu que $u(s_N) = \sum\limits_{k=0}^{N} x_k a_k$, série qui converge vers $\varphi_a(s)$ (question I-1, car $a \in \ell^\infty$). On a donc $u(s) = \varphi_a(s)$ (unicité de la limite). On a prouvé ainsi que tout $u \in E$ est dans l'image de φ, ce qui est la preuve de la surjectivité de cette application.

II-3. De plus, φ est injective (linéaire et isométrique, donc de noyau nul). C'est donc un isomorphisme d'espace normés. Comme ℓ^1 est complet on en déduit que $\varphi(\ell^1) = \ell^\infty$ est complet, donc un espace de BANACH.
REMARQUE 2 – On peut redémontrer cette dernière propriété en utilisant des suites de CAUCHY : si (x_n) est une suite de CAUCHY de ℓ^∞, son image par φ^{-1} est de CAUCHY dans ℓ^1 (car φ^{-1} est une isométrie...) donc converge vers une limite dont l'image par φ est la limite de (x_n) par continuité de φ.

III-1. Cela résulte immédiatement de $|a_n e^{inx}| = |a_n|$ ($a \in \ell^1$) car la série de fonctions est normalement, donc uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$. C'est une série uniformément convergente de fonctions continues, donc la somme f_a est continue. Elle est bornée car, pour tout N

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n e^{inx}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \|a\|$$

donc $|f_a(x)| = \left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}\right| \leqslant \|a\|$.

III-2. L'application $f : a \mapsto f_a$ est linéaire (évident !) et on vient de montrer que $|f_a(x)| \leqslant \|a\|$ pour tout x d'où $\|f_a\|_\infty \leqslant \|a\|$. Donc l'application f est continue de ℓ^1 dans $\mathcal{C}_B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de la norme uniforme et la norme de cette application linéaire est majorée par 1. Montrons que cette norme de f est 1. Si $a = e_0$ on a $f_{e_0}(x) = 1$ donc $\|f_{e_0}\| = \|e_0\|$ et le résultat en découle.

III-3. On obtiendra une condition suffisante de dérivabilité de f_a si la série des dérivées des fonctions $x \mapsto a_n e^{inx}$ est uniformément convergente (cours chapitre 5 corollaire 2.16). Cette condition est vérifiée si la série $\sum n|a_n|$ est convergente. et on a

$$f_a'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} i n a_n e^{inx}$$

III-4. Pour calculer l'intégrale demandée, on peut intégrer terme à terme la série définissant f_a, puisque cette série est uniformément convergente. Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_k a_k e^{ikt} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_k a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = a_n$$

car l'intégrale de droite est nulle si $k \neq n$.

III-4. Si on considère la norme $\| \ \|_\infty$ sur ℓ^1, la suite $A^n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{e_k}{k}$ a pour norme $\|A^n\|_\infty = \frac{1}{n}$, donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour cette norme $\| \ \|_\infty$. Cependant on a $f_{A^n}(0) = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k} > (n+1)\dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$, donc $\|f_{A^n}\|_\infty > \dfrac{1}{2}$ et ne converge pas vers 0. L'application $a \mapsto f_a$ n'est donc pas continue pour la norme de ℓ^∞ sur ℓ^1.