APERÇU HISTORIQUE DE LA CONJECTURE DE CHERLIN-ZILBER

OLIVIER FRÉCON

1. Introduction

Cet article fait suite à l'exposé "Mauvais groupes et conjecture de Cherlin-Zilber" donné au Congrès de la Société Mathématiques de France qui s'est tenu à Lille du 4 au 8 juin 2018.

Une préoccupation majeure de la théorie des modèles, une branche de la logique mathématique, est la classifications des structures, dans un sens très général. Dans ce contexte, différentes notions de dimensions ont été introduites ; celle qui nous intéresse ici est le *rang de Morley*.

Le rang de Morley ne peut pas être défini pour une structure quelconque. Quand il peut l'être, il confère à la structure des propriétés particulièrement fortes. Un exemple frappant est celui des corps : un théorème de Macintyre assure qu'un corps infini auquel on peut associer un rang de Morley est algébriquement clos ! Pour les groupes, la situation est moins claire, et l'un des enjeux de la conjecture de Cherlin-Zilber est justement de comprendre si les propriétés induites par le rang de Morley sont aussi spectaculaires que dans le cas des corps.

Le rang de Morley est d'abord apparu dans les années 60, dans la preuve du *théorème de catégoricité de Morley*, un résultat fondamental de la théorie des modèles concernant la classification des structures et la *catégoricité*. Ainsi, le rang de Morley est fortement lié à la notion d'$\aleph_1$-*catégoricité* : c'est même cette dernière qui en est à l'origine. Dans les années 70, les théoriciens des modèles ont commencé à beaucoup s'intéresser aux *groupes* auxquels on peut associer un rang de Morley, et plus précisément au cas où ce rang de Morley est *fini*. L'étude de ces groupes, appelés *groupes de rang de Morley fini*, s'est ensuite développée sous l'impulsion d'une question, toujours ouverte, formulée indépendamment par Cherlin et Zilber à la fin des années 70. Une formulation équivalente de cette conjecture, et autant rencontrée dans la littérature, sera donnée plus loin (cf. conjecture 3.12).

Conjecture de Cherlin-Zilber 1.1. – Un groupe simple et infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

En d'autres termes, si G est un groupe simple et infini de rang de Morley fini, alors G est isomorphe comme groupe abstrait à un groupe de Chevalley : le groupe des points K-rationnels d'un groupe algébrique simple défini sur un corps algébriquement clos K.

L'objet de cet article est de présenter le développement de cette conjecture depuis l'origine, en détaillant plus particulièrement ses motivations historiques et en dressant un état des lieux de nos connaissances actuelles. Il s'adresse principalement

---

Date: October 2, 2018.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 20F11, 03C45.

aux mathématiciens non logiciens désireux de comprendre ce que sont les groupes de rang de Morley fini et la conjecture de Cherlin-Zilber, et pourquoi les théoriciens des modèles s'intéressent à cette conjecture ouverte depuis plus de 40 ans.

Pour une présentation générale de la théorie des modèles, on se référera au récent article de Bouscaren [15], au livre de Poizat [46] ou à celui de Marker [38]. Les livres traitant spécifiquement des groupes de rang de Morley fini sont [47], [14] et [1]; signalons aussi le livre de Wagner [59] qui considère le contexte plus général des *groupes stables.* D'autre part, l'article de Poizat [48] fournit un historique de la théorie des modèles bien plus général que celui donné ici en §2.

2. Genèse d'une conjecture

2.1. **Équivalence élémentaire vs isomorphie.**

2.1.1. *Quelques définitions.* Pour les définitions formelles de *langage, structure*, *énoncé* ou *théorie*, on peut par exemple consulter le premier chapitre de [38].

Concrètement, une *structure* $\mathscr{M}$ est un ensemble non vide M muni d'un ensemble de fonctions $f : M^m \to M$, d'un ensemble de relations $R \subseteq M^n$ et d'un ensemble de constantes $c \in M$. Le *langage* de la structure $\mathscr{M}$ est formé de l'ensemble des symboles de fonction, de l'ensemble des symboles de relation, et de l'ensemble des symboles de constante. *Précisons que rien n'interdit à un langage d'être infini. Toutefois, afin de ne pas alourdir les hypothèses de certains résultats donnés plus bas, les langages seront dans cette section tous supposés dénombrables.*

Par exemple, le langage des groupes commutatifs ordonnés est constitué des symboles de fonction $+$ et $-$, du symbole de relation $\leq$, et du symbole de constante 0. Pour avoir un groupe commutatif ordonné, il faut donc d'abord un ensemble non vide G, des fonctions $+ : G^2 \to G$ et $- : G \to G$, une relation $\leq \subseteq G^2$ et un élément $0 \in G$. Il faut ensuite que la structure $(G; +, -, \leq, 0)$ satisfasse certaines conditions, que nous pouvons écrire sous forme d'une liste d'*énoncés* :

$$\forall x \forall y \forall z((x+y)+z = x+(y+z)) \ ; \ \forall x \forall y(x+y = y+x) \ ; \ \forall x(0+x = x)$$
$$\forall x(x+(-x) = 0) \ ; \ \forall x(x \leq x) \ ; \ \forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$$
$$\forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z) \ ; \ \forall x \forall y \forall z(x \leq y \to x+z \leq y+z)$$

Une telle liste d'énoncés s'appelle une *théorie*; il s'agit ici de la *théorie des groupes commutatifs ordonnés.* Précisons que seules les constantes du langage sont permises pour écrire un tel énoncé, les éléments de l'ensemble G ne peuvent y figurer.

Notons aussi que les énoncés ci-dessus sont des énoncés de la *logique du premier ordre*; par exemple le premier peut s'écrire sous la forme plus habituelle suivante :

$$\forall x \in G, \forall y \in G, \forall z \in G, (x+y)+z = x+(y+z)$$

Par contre, les énoncés de la forme $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N}, \exists y \in G, n \cdot y = x$ ne sont pas du premier ordre, puisque l'ensemble $\mathbb{N}$ ne fait partie de la structure.

2.1.2. *L'équivalence élémentaire.* Deux groupes commutatifs ordonnés ne satisfont pas forcément les mêmes énoncés. En effet, si on considère $\mathcal{R} = (\mathbb{R}; +, -, \leq, 0)$ et $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +, -, \leq, 0)$, alors $\mathcal{R}$ satisfait l'énoncé ci-dessous et pas $\mathcal{Z}$:

$$\forall x \exists y(y+y = x)$$

Par contre, il est possible de montrer que les groupes commutatifs ordonnés $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}; +, -, \leq, 0)$ satisfont exactement les mêmes énoncés [38, Corollary 3.1.17] : on dit que les deux structures $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ sont *élémentairement équivalentes.*

Définition 2.1. – *Deux structures $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ de même langage $\mathscr{L}$ sont dites* élémentairement équivalentes *si elle satisfont les mêmes énoncés. On note alors*

$$\mathscr{M} \equiv \mathscr{N}$$

Maintenant, considèrons les groupes commutatifs ordonnés qui satisfont l'énoncé

$$\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$$

ainsi que tous les énoncés de la forme suivante, où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \exists y (\underbrace{y + \cdots + y}_{n \text{ fois}} = x)$$

Ces groupes sont appelés *groupes divisibles commutatifs linéairement ordonnés.* Il est possible de montrer qu'à l'instar de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$, tous les groupes divisibles commutatifs linéairement ordonnés sont élémentairement équivalents. Ainsi, si on se donne un énoncé φ dans le langage des groupes commutatifs ordonnés, alors soit il est satisfait par tous les groupes divisibles commutatifs linéairement ordonnés, soit il n'est satisfait par aucun. On dit que la théorie des groupes divisibles commutatifs linéairement ordonnés est *complète* [38, Corollary 3.1.17].

Définition 2.2. – *Dans un langage $\mathscr{L}$, une théorie $\mathcal{T}$ est dite* complète *si les structures qui satisfont les énoncés de $\mathcal{T}$ sont toutes élémentairement équivalentes.*

2.1.3. *L'isomorphie.* Si $\mathscr{M} = (M; \ldots)$ et $\mathscr{N} = (N; \ldots)$ sont des structures de même langage, un *isomorphisme* entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ est une bijection $\mu : M \to N$ qui préserve la structure $\mathscr{M}$ et dont la réciproque préserve la structure $\mathscr{N}$.

Par exemple, si $\mathscr{M} = (M; +, -, \leq, 0)$ et $\mathscr{N} = (N; +, -, \leq, 0)$ sont deux groupes commutatifs ordonnés, alors par définition, une bijection $\mu : M \to N$ est un isomorphisme si, pour tous $x \in M$ et $y \in M$, on a :

$$\mu(x + y) = \mu(x + y) \ ; \ \mu(-x) = -\mu(x) \ ; \ x \leq y \leftrightarrow \mu(x) \leq \mu(y) \ ; \ \mu(0) = 0$$

Il suit de cette définition que deux structures isomorphes satisfont les mêmes énoncés, d'où le résultat suivant.

Fait 2.3. – [38, Theorem 1.1.10] *Deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.*

La réciproque est vraie pour les structures finies, mais fausse en générale : on a vu que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ sont élémentairement équivalentes, or elles n'ont pas le même cardinal, où le *cardinal d'une structure* $\mathscr{M} = (M; \cdots)$ est celui de M, elles ne peuvent donc pas être isomorphes.

2.2. **Du théorème de Löwenheim au théorème de Morley.** La plupart des théoriciens des modèles s'accorde à dire que ce qui marque la naissance de leur discipline, c'est l'article de Leopold Löwenheim paru en 1915 à *Mathematische Annalen* [34]. Le théorème principal de cette publication dit que dans un langage $\mathscr{L}$, si une structure infinie $\mathscr{M}$ satisfait un énoncé φ, alors il y a une structure *dénombrable* $\mathscr{N}$ qui satisfait φ.

La version définitive de ce résultat sera donnée quelques années plus tard par Thoralf Albert Skolem, qui après avoir simplifié et généralisé considérablement la preuve de Löwenhein, aboutira à ce qui est désormais connu sous le nom de *"théorème de Löwenheim-Skolem"*. Bien que sa conclusion soit encore plus forte, la version allégée ci-dessous ne trahit pas l'essentiel.

Théorème de Löwenheim-Skolem 2.4. – *Soit $\mathscr{M}$ une structure infinie dans un langage $\mathscr{L}$. Alors, pour tout cardinal infini κ il y a une structure $\mathscr{N}$ de cardinal κ élémentairement équivalente à $\mathscr{M}$.*

Une conséquence de ce théorème est que l'équivalence élémentaire est une notion nettement plus faible que l'isomorphie. En effet, pour toute structure infinie $\mathscr{M}$, il est possible de trouver une structure $\mathscr{N}$ qui lui est élémentairement équivalente tout en étant de cardinal différent; elles ne peuvent donc pas être isomorphes !

Cependant, à ce stade, seule la cardinalité d'une structure fait obstacle à ce que l'équivalence élémentaire soit similaire à l'isomorphie, d'où la question suivante.

Question générale 2.5. – Quelles sont les structures isomorphes à toute structure de même cardinal qui lui est élémentairement équivalente ?

Jorzy Łoś [33] et Robert Lawson Vaught [56] ont introduit la notion suivante, centrale pour la suite.

Définition 2.6. – *Une théorie $\mathcal{T}$ est dite* catégorique en un cardinal κ*, ou* κ-catégorique*, si à isomorphie près, il y a une unique structure de cardinal κ satisfaisant tous les énoncés de $\mathcal{T}$.*

Il y a de multiples exemples de théories catégoriques en un cardinal κ. Nous donnons juste deux d'entre elles.

Exemple 2.7. –

- [38, Proposition 2.2.5 et Corollary 4.4.3] Pour un entier premier ou nul fixé c, la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique c n'est pas $\aleph_0$-catégorique, par contre elle est catégorique en tout cardinal non dénombrable.
- [38, Theorem 2.4.1] Dans le langage $\mathscr{L} = \{<\}$, la théorie $\mathcal{T}$ des *ordres denses sans extrémités* est formée des énoncés suivants :

  $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$; $\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$

  $\forall x \neg (x < x)$; $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z < y))$ et $\forall x \exists y \exists z (y < x < z)$

  Cette théorie est $\aleph_0$-catégorique tout en n'étant catégorique en aucun cardinal non dénombrable.

Łoś et Vaught ont indépendamment fait la remarque suivante en 1954; il s'agit d'une conséquence directe du théorème de Löwenheim-Skolem.

Test de Łoś-Vaught 2.8. – [33, 56] *Si une théorie $\mathcal{T}$ est catégorique en un cardinal κ et qu'aucune structure finie ne satisfait tous ses énoncés, alors $\mathcal{T}$ est complète.*

Après s'être intéressé à des exemples de théories κ-catégoriques, comme ceux donnés ci-dessus, Łoś a formulé en 1954 une conjecture majeure de la théorie des modèles [33]. Celle-ci sera démontrée en 1962 par Michael Darwin Morley, dans sa thèse (la publication date elle de 1965).

Théorème de catégoricité de Morley 2.9. – [39] *Une théorie catégorique en un cardinal non dénombrable est catégorique en tout cardinal non dénombrable.*

Ce théorème est fondamental pour la théorie des modèles, il marque un tournant pour la discipline. Sa preuve est même souvent considérée comme le point de départ de la théorie des modèles moderne (voir [46, p. 487] ou [38, p. 207]).

En tout cas, il devient crucial de s'intéresser aux structures concernées par le théorème de Morley. L'essentiel de cet article est justement consacré aux *groupes* dont la théorie est catégorique en un cardinal non dénombrable.

2.3. **$\aleph_0$-catégoricité vs $\aleph_1$-catégoricité.** Selon le théorème de catégocité de Morley, il existe deux sortes de théories catégoriques en un cardinal κ : celles qui sont $\aleph_0$-catégoriques et celles qui sont catégoriques en tout cardinal non dénombrable. Ces dernières sont plus couramment appelées *théories $\aleph_1$-catégoriques.* Notons toutefois qu'une théorie peut-être à la fois $\aleph_0$-catégoriques et $\aleph_1$-catégoriques, nous en dirons quelques mots.

Les théories $\aleph_0$-catégoriques font l'objet d'une littérature abondante. Leur caractérisation est un résultat majeur donné de façon indépendante en 1959 par Czesław Ryll-Nardzewski [52], Erwin Engeler [23] et Lars Svenonius [53] (voir aussi [38, §4.4] et [46, §10.c]).

Au niveau des groupes, ce théorème caractérisant les théories $\aleph_0$-catégoriques apporte notamment les informations suivantes (fait 2.10). Précisons qu'ici, comme dans toute la suite, on permet à un groupe d'avoir une structure enrichie dans le sens où, en plus de sa loi de groupe, son langage peut comporter d'autres fonctions, relations et constantes. Précisons aussi que la *théorie* $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$ d'une structure $\mathscr{M}$ est l'ensemble des énoncés satisfaits par $\mathscr{M}$. Il s'agit clairement d'une théorie complète.

Fait 2.10. – ([38, Corollary 4.4.4] ou [47, §1.e]) *Un groupe dont la théorie est $\aleph_0$-catégorique, est localement fini et d'exposant borné.*

Notons que, si ce résultat donne une première idée assez précise de ce qu'est un groupe dont la théorie est $\aleph_0$-catégorique, il est très loin d'apporter une réponse définitive : la classification des groupes dont la théorie est $\aleph_0$-catégorique reste une question ouverte. La situation est bien diférente pour les corps; comme le fait 2.10 s'applique au groupe multiplicatif d'un corps, un tel corps ne peut pas exister !

Aucun corps n'a une théorie $\aleph_0$-catégorique.

La situation est radicalement différentes pour les corps et groupes dont la théorie est $\aleph_1$-catégorique. Par exemple, la théorie d'un corps algébriquement clos $(K;+,\cdot)$ est $\aleph_1$-catégorique (exemple 2.7). De plus, la réciproque est vraie, elle a été prouvée en 1971 par Angus Macintyre; il s'agit d'un résultat fondamental.

Fait 2.11. – (Macintyre [36]) *Un corps dont la théorie est $\aleph_1$-catégorique est algébriquement clos.*

Au niveau des groupes, l'exemple principal de groupes ayant une théorie $\aleph_1$-catégorique est fourni par Boris Zilber en 1977.

Fait 2.12. – (Zilber [62]) *Dans le langage des groupes, la théorie d'un groupe algébrique simple défini sur un corps algébriquement clos est $\aleph_1$-catégorique.*

Comme nous le verrons à la section 3.3, la conjecture de Cherlin-Zilber ne fait rien d'autre que demander si la réciproque de ce résultat est vraie !

Nous avons vu que les structures ayant une théorie est $\aleph_0$-catégorique et celles ayant une théorie $\aleph_1$-catégorique sont très différentes. Maintenant, que reste-t-il lorsqu'on s'intéresse aux groupes dont la théorie est à la fois $\aleph_0$-catégorique et $\aleph_1$-catégorique ? En réalité pas grand chose, comme le révèle le résultat suivant démontré en 1977.

Théorème 2.13. – (Baur, Cherlin et Macintyre [9]) *Un groupe dont la théorie est à la fois $\aleph_0$-catégorique et $\aleph_1$-catégorique, est d'exposant borné et a un sous-groupe abélien normal d'indice fini.*

En fait la description dans l'article est encore plus précise [9, Theorem 63]. Finalement, l'ensemble de ces résultats sur les groupes dont la théorie est $\aleph_0$-catégorique et ceux dont la théorie est $\aleph_1$-catégorique fait apparaître une véritable dichotomie entre ces deux classes de structures. Dans les sections suivantes, nous nous concentrerons sur les *groupes* dont la théorie est $\aleph_1$-catégorique.

3. Groupes de rang de Morley fini

3.1. **Le rang de Morley.** Dans la preuve du théorème de catégoricité, Morley associe un ordinal à chaque théorie $\aleph_1$-catégorique [39]. Il définit cet ordinal à partir d'une dimension qu'il est possible d'attribuer à certains ensembles dits *définissables* [38, §4.1 et §6.2] et qui, dans les année suivantes, sera appelée *rang de Morley* (pour une définition formelle on peut consulter [47, §17.c] ou [38, §6.2]). Au départ, le rang de Morley est un ordinal éventuellement infini. Cependant, John T. Baldwin prouvera en 1973 que le rang de Morley est en réalité toujours un entier, du moins dans le contexte qui nous intéresse.

Théorème 3.1. – (Baldwin [4]) *Si une structure a une théorie $\aleph_1$-catégorique, alors ses ensembles définissables non vides ont un rang de Morley fini.*

À ce stade, nous devons donc préciser ce qu'est un ensemble définissable (une définition formelle se trouve dans [38, §1.3]). Pour cela, considérons par exemple un groupe commutatif ordonné $\mathscr{G} = (G; +, -, \leq, 0)$, et a et b deux éléments de G avec $a \leq b$. Alors les ensembles suivants sont des exemples d'ensembles définissables :

$$\{x \in G \ : \ a \leq x \vee x \leq b\} \ ; \ \{(x, y) \in G \times G \ : \ x + y \leq a \vee (\exists z (z + z = y))\}$$

En particulier, un *ensemble définissable* peut éventuellement être définissable *avec paramètres*, c'est-à-dire des éléments de G (ici les paramètres sont a et b). De plus, une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Nous pouvons remarquer que, si A et B sont deux ensembles définissables, alors leur intersection, leur union, leur différence $A \setminus B$, leur produit cartésien ainsi que les images de la projection canonique $p_A : A \times B \to A$ sont définissables.

Ajoutons à cela que d'ordinaire, en théorie des modèles on distingue les ensembles *définissables* des ensembles *interprétables*, lesquels sont définis pour être les ensembles définissables quotientés par une relation d'équivalence définissable. Comme dit ci-dessous, nous allons suivre l'approche de [47], et conformément à elle, nous ne ferons pas une telle distinction. Ainsi, dans la suite, *un ensemble définissable quotienté par une relation d'équivalence définissable sera lui-même dit définissable.*

À partir de maintenant, nous considérons seulement des structures de groupes (avec éventuellement, comme dit à la section précédente, une structure enrichie).

Dans le contexte de la conjecture de Cherlin-Zilber, l'approche de Bruno Poizat [47] du rang de Morley est habituellement préférée à l'approche générale. En effet, elle fournit directement de nombreuses propriétés qui sont utilisées quotidiennement par ceux qui étudient les groupes de rang de Morley fini; elle ne nécessite pas non plus l'assimilation d'outils modèles-théorique peu utilisés dans les analyses des groupes de rang de Morley fini. Par contre elle ne fonctionne que pour les groupes, elle n'a pas d'équivalent pour une structure quelconque.

Dans [47], l'idée de base est la suivante. On fixe un groupe $\mathscr{G} = (G; \cdot, \cdots)$ quelconque et on assigne à chaque ensemble définissable A non vide un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ appelé *rang*, noté $\mathrm{rk}\,(A)$ et défini comme suit :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rk}\,(A) > n$ si et seulement si A contient une famille infinie de sous-ensemble définissables disjoints de rang n.

Cette définition suit l'idée de Morley. D'ailleurs, si la théorie de $\mathscr{G}$ est $\aleph_1$-catégorique, ou plus généralement si $\mathscr{G}$ a un rang de Morley fini, alors le rang rk est le rang de Morley. Pour avoir une correspondance plus large entre le rang rk et le rang de Morley, nous avons besoin d'axiomes supplémentaires.

Théorème 3.2. – (Poizat [47, §2]) *Soit $\mathscr{G} = (G; \cdot, \cdots)$ une structure de groupe. Les ensembles définissables non vides ont un rang de Morley fini si et seulement si*

- $\mathrm{rk}\,(A)$ *est fini pour tout ensemble définissable A non vide;*
- *si $f : A \to B$ est une fonction définissable et surjective, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{b \in B \ : \ \mathrm{rk}\,(f^{-1}(b)) = r\}$ est définissable;*
- *pour toute fonction définissable $f : A \to B$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour chaque $b \in B$, $f^{-1}(b)$ est infini dès qu'il contient au moins m éléments.*

Si tel est le cas, le rang de Morley *de tout ensemble définissable est* $\mathrm{rk}\,(A)$.

Un groupe $\mathscr{G} = (G; \cdot, \cdots)$ satisfaisant les conditions du théorème ci-dessus sera appelé un *groupe de rang de Morley fini.* Notons qu'un groupe de rang de Morley fini peut ne pas être une structure $\aleph_1$-catégorique : par exemple, les groupes $(\mathbb{C} \times \mathbb{Q}; +, \mathbb{C})$ et $(\mathbb{C} \times \mathbb{Q}; +, \mathbb{Q})$ sont de rang de Morley 2, de même cardinal et élémentairement équivalents, or ils ne sont pas isomorphes.

Remarque 3.3. – Une structure $\mathscr{N} = (N; \cdots)$ est dite *interprétable* dans la structure $\mathscr{M}$ si N et les fonctions et relations de $\mathscr{N}$ sont définissables dans $\mathscr{M}$. Il suit de ce qui précède qu'un groupe interprétable dans un groupe de rang de Morley fini est lui-même de rang de Morley fini.

En particulier, pour montrer la conjecture 1.1, il suffit donc de la montrer pour les *pures groupes*, c'est-à-dire les groupes $(G; \cdot)$ dans le langage reduit à $\{\cdot\}$.

Comme on a vu que la théorie d'un corps algébriquement clos $(K; +, \cdot)$ est $\aleph_1$-catégorique, il suit de de cette remarque que tout groupe interprétable dans $(K; +, \cdot)$ est de rang de Morley fini. Ainsi les groupes algébriques sur K sont de rang de Morley fini (avec la structure induite par le corps K, c'est-à-dire avec leur pleine structure algébrique !). En fait, il est montré dans [47], notamment sur la base de [45, Théorème 7], que les groupes interprétables dans $(K; +, \cdot)$ sont précisément les groupes algébriques sur K. De plus, le rang de Morley d'un ensemble définissable correspond alors exactement à sa dimension en tant que variété algébrique. Ceci constitue l'exemple principal de groupe de rang de Morley fini.

3.2. **Quelques résultats fondamentaux.**

3.2.1. *Groupes connexes.* Parmi les premières études portant sur les groupes de rang de Morley fini, on peut notamment citer celles d'Angus Macintyre en 1971. En fait, il analysait plus généralement les groupes dont la théorie est *totalement transcendante* (voir [47, §17] pour plus de détails). Il donnait notamment une première version de la *condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables* [35, §5]. Ce résultat a notamment permis d'introduire la notion ci-dessous.

Définition 3.4. – *Tout groupe G de rang de Morley fini a un plus petit sous-groupe définissable d'indice fini G° appelé* composante connexe. *Si $G = G^\circ$, le groupe G est dit* connexe.

Les groupes infinis et simples sont des exemples de groupes *connexes*.

3.2.2. *Corps de rang de Morley fini.* C'est aussi en 1971 que Macintyre a prouvé le fait 2.11; nous l'énonçons ici sous la forme qui nous intéresse dans cet article.

Théorème 3.5. – (Macintyre [36]) *Tout corps infini de rang de Morley fini est algébriquement clos.*

Une question naturelle est de savoir si on peut interpréter un corps infini dans un groupe infini G de rang de Morley fini. Ce n'est généralement pas possible dans un groupe abélien. Aussi, par une très difficile construction, Andreas Baudisch a montré en 1996 qu'un groupe G infini, connexe, nilpotent, non abélien et de rang de Morley fini peut ne pas interpréter de corps infini [7]. Pour les groupes résolubles, une étude de Zilber datant de 1984 donne le résultat suivant.

Théorème 3.6. – (Zilber [63]) *Tout groupe connexe, résoluble, non nilpotent et de rang de Morley fini interprète un corps infini.*

Le cas des groupes non résolubles reste largement ouvert. Le problème majeur est qu'on ne sait pas si un groupe connexe, non résoluble et de rang de Morley fini admet un sous-groupe définissable, connexe, résoluble et non nilpotent. Cette question est fortement liée au problème des *mauvais groupes* détaillé plus loin.

En fait, on ne sait pas non plus si un groupe connexe, non résoluble et de rang de Morley fini admet un sous-groupe propre, définissable, connexe et non abélien. Par contre, un résultat de Joachim Reineke datant de 1975 montre qu'un tel groupe a un sous-groupe propre, définissable et infini.

Théorème 3.7. – (Reineke [51]) *Tout groupe infini de rang de Morley fini a un sous-groupe définissable, abélien et infini.*

Un célèbre problème, resté ouvert durant une trentaine d'années, concernait les corps de rang de Morley fini. Il s'agissait de savoir si le groupe multiplicatif d'un corps de rang de Morley fini peut avoir un sous-groupe propre, définissable et infini (un tel corps s'appelle un *mauvais corps*). Une réponse négative aurait énormément simplifié la conjecture de Cherlin-Zilber. En 2009 un tel corps de caractéristique nulle a été construit par Baudisch, Hils, Martin-Pizarro et Wagner [8]. Des travaux de Wagner suggèrent qu'une telle construction n'est pas possible en caractéristique positive [60]; mais c'est alors le groupe additif qui peut avoir un sous-groupe propre, définissable et infini [6]. Par contre, la question suivante est ouverte, une réponse négative aurait des conséquences substantielles sur la conjecture de Cherlin-Zilber.

Question 3.8. – [25] Existe-t-il un corps K de rang de Morley fini avec un sous-groupe T de K^* qui est le groupe additif d'un autre corps infini définissable ?

3.2.3. *Groupes de rang de Morley fini et $\aleph_1$-catégoricité.* D'après le théorème 3.1, tout groupe ayant une théorie est $\aleph_1$-catégorique est de rang de Morley fini. La réciproque est généralement fausse (cf. la fin de la section 3.1), sauf si on restreint notre attention aux groupes *simples* de rang de Morley fini.

Théorème 3.9. – (Zilber [62]) *Dans le langage des groupes, la théorie de tout groupe simple et infini de rang de Morley fini est $\aleph_1$-catégorique.*

Ce résultat est la version générale du théorème 2.12. Il est l'un des nombreux corollaires du théorème des indécomposables de Zilber [62] qui est fondamental pour l'étude des groupes de rang de Morley fini. L'énoncé de ce dernier étant plutôt technique, nous ne le détaillerons pas. Signalons toutefois que c'est grâce à ce théorème qu'on sait que le sous-groupe dérivé d'un groupe de rang de Morley fini est définissable, ce qui a priori n'a aucune raison d'être. C'est aussi lui qui permet de savoir que, pour qu'un groupe non abélien de rang de Morley fini soit simple, il suffit qu'il n'ait pas de sous-groupe normal, *définissable*, propre et non-trivial.

3.2.4. *Groupes de petit rang de Morley.* Il suit du théorème 3.7 qu'un groupe connexe de rang de Morley 1 est abélien. En 1979, Gregory Cherlin a étudié les groupes connexes de rang de Morley 2 et 3 [17]. Pour les groupes de rang 2, il montre que la situation est conforme à ce qui se produit dans le cas des groupes algébriques.

Théorème 3.10. – (Cherlin [17]) *Un groupe connexe de rang de Morley 2 est résoluble.*

La situation des groupes de rang de Morley 3 est nettement plus compliquée, dans le sens où l'analyse faite dans [17] n'a pas pu aller à son terme. Concrètement, le résultat principal de [17] est le suivant.

Théorème 3.11. – (Cherlin [17]) *Soit G un groupe simple de rang de Morley 3.* Si G a un sous-groupe définissable de rang de Morley 2*, alors G est isomorphe à* $\mathrm{PSL}_2(K)$ *pour un corps algébriquement clos K.*

C'est bien plus tard que l'hypothèse concernant l'existence d'un sous-groupe définissable de rang de Morley 2 pourra finalement être retirée (théorème 4.2).

3.3. **La conjecture de Cherlin-Zilber.** Il arrive que la conjecture 1.1, parfois appelée *conjecture d'algébricité*, soit formulée différemment. L'équivalence des deux énoncés suit de la remarque 3.3 et des théorèmes 3.1 et 3.9.

Conjecture de Cherlin-Zilber 3.12. – Un groupe simple dont la théorie est $\aleph_1$-catégorique est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Cette conjecture a été formulée à la fin des années 70, indépendamment par Zilber dans [62] et Cherlin dans [17]. Elle est toujours largement ouverte, et c'est elle qui motive la plupart des travaux concernant les groupes de rang de Morley fini. Pour Zilber, ce sont notamment les résultats présentés à la section 3.2.3 et le théorème 2.12, qui ont motivé son énoncé. Pour Cherlin, c'est suite à son étude des groupes de petit rang de Morley (§3.2.4) qu'il a formulé la conjecture. Nous devons toutefois signaler que l'énoncé dans [17] est un peu plus général, puisqu'il concerne les groupes *ω-stables*, c'est-à-dire des groupes sur lesquels le rang de Morley est défini mais peut prendre pour valeur un ordinal infini. Néanmoins, cette formulation plus générale est rapidement passée au second plan; elle est d'ailleurs rarement mentionnée.

Nous détaillerons plus tard les avancées concernant la conjecture de Cherlin-Zilber. Disons déjà qu'elle a été établie pour plusieurs classes de groupes. La première d'entre elles est celle des groupes simples *localement finis*. La question de démontrer la conjecture pour ces groupes était posée par Cherlin dans [17]. C'est Simon Thomas, qui a résolu ce problème dans sa thèse en 1983.

Théorème 3.13. – (Thomas [54]) *La conjecture de Cherlin-Zilber tient pour les groupes simples, infinis et* localement finis *de rang de Morley fini.*

La preuve de Thomas est basée sur des techniques propres à l'étude des groupes localement finis. Elle utilise par exemple la classification des groupes simples finis, et il n'y a raisonnablement aucun espoir de pouvoir l'adapter au contexte général des groupes simples de rang de Morley fini.

En fait, ce sera en 2008 que le principal théorème concernant les groupes de rang de Morley fini sera démontré par Altınel, Borovik et Cherlin (théorème 5.2 [1]). Cependant, de très nombreux obstacles comme les *mauvais groupes* ci-dessous, empêchent encore une résolution complète de la conjecture de Cherlin-Zilber.

4. Mauvais groupes

Les *mauvais groupes* ont initialement été définis en 1979 par Cherlin (définition 4.1 [17]). Dès le départ, leur possible existence était un obstacle à la conjecture de Cherlin-Zilber (cf. théorème 3.11), elle s'est révélée être un problème majeur. La définition des mauvais groupes a ensuite été étendue à d'autres groupes présentant une structure similaire [18, 10]. Ceux définis par Cherlin se sont avérés ne pas exister [26]; pour les autres, la question de leur existence reste ouverte; ce problème est même devenu emblématique de la conjecture de Cherlin-Zilber.

4.1. Les groupes simples de rang de Morley 3.

Comme le suggère le théorème 3.11, qui est le résultat principal de [17], Cherlin a été amené à définir un *mauvais groupe* de la façon suivante.

Définition 4.1. – *Un groupe de rang de Morley 3 est dit* mauvais *s'il ne contient aucun sous-groupe définissable de rang de Morley 2.*

La question de l'existence de ces groupes sera finalement tranchée près de 40 ans plus tard [26]; ainsi la conjecture de Cherlin-Zilber est vérifiée pour les groupes de rang de Morley 3.

Théorème 4.2. – (F. [26]) *Tout groupe simple de rang de Morley 3 est isomorphe à* $\mathrm{PSL}_2(K)$ *pour un corps algébriquement clos* K.

Disons quelques mots sur ce qui s'est passé entre [17] et [26]. Pour analyser les mauvais groupes, Cherlin a introduit dans [17] une notion aussi importante que naturelle pour toutes les études concernant les groupes de rang de Morley fini.

Définition 4.3. – *Dans un groupe de rang de Morley fini, un* sous-groupe de Borel *est un sous-groupe résoluble, définissable, connexe et maximal pour ces conditions.*

Précisons que la conjugaison des sous-groupes de Borel dans les groupes de rang de Morley fini est une question ouverte totalement hors de portée. Cependant, la situation est différente pour les mauvais groupes, et Cherlin a ainsi pu énormément préciser la structure d'un éventuel mauvais groupe.

Théorème 4.4. – (Cherlin [17]) *Dans un mauvais groupe* simple G :

- *les sous-groupes de Borel sont conjugués;*
- *deux sous-groupes de Borel distincts ont une intersection triviale;*
- *l'union des sous-groupes de Borel recouvre* G.

De plus, G *n'a pas d'involution.*

Cette analyse sera complétée une dizaine d'années plus tard par Nesin [42, 43] qui fournira par exemple une preuve géométrique de l'absence d'involution. Une autre information, cruciale pour la preuve du théorème 4.2, sera donnée par Delahan et Nesin (cf. théorème 4.6).

D'autre part, Nesin avait remarqué qu'un mauvais groupe agit sur une géométrie naturelle qui n'est pas très loin d'être un plan projectif non-désarguésien de rang de Morley 2 [43], or de tels plans ont été construits par Baldwin en 1994 [5], ce qui pouvait sembler être un argument en faveur de l'existence d'un mauvais groupe.

Au début des années 2000, Jaligot a montré qu'un mauvais groupe ne pouvait pas être existentiellement clos [31], puis Mustafin et Poizat ont montré qu'il ne pouvait pas être linéaire [41].

C'est en munissant les mauvais groupes d'une géométrie, avec des notions de droite et de plan adaptés au contexte, puis en essayant de montrer que cette géométrie munit les mauvais groupes d'une structure d'espace projectif, qu'une contradiction est survenue dans [26] (théorème 4.2).

4.2. **Les mauvais groupes en rang supérieur.** À la fin des années 80, Corredor [18] et Borovik et Poizat [10] ont indépendamment remarqué que d'autres groupes de rang de Morley fini présenteraient, s'ils existaient, une structure similaire à celle des mauvais groupes ci-dessus. Ils ont alors étendu la définition 4.1.

Définition 4.5. – *Un* mauvais groupe *est un groupe non résoluble et connexe de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes propres, définissables et connexes sont nilpotents.*

Corredor [18] et Borovik et Poizat [10] ont alors généralisé le théorème 4.4 à cette notion de mauvais groupes. Notons aussi qu'en réalité, le résultat de Delahan et Nesin mentionné plus haut a été démontré dans ce contexte plus large.

Théorème 4.6. – (Delahan-Nesin [14, Proposition 13.4]) *Un mauvais groupe simple n'a pas d'automorphisme involutif définissable.*

Malheureusement ces mauvais groupes n'ont pas encore pu être éliminés. Leur introduction a surtout montré que le problème est considérablement plus large que celui formulé par Cherlin. De plus, l'élimination des mauvais groupes de rang de Morley 3 faite dans [26] ne semble pas se généraliser à ces mauvais groupes de rang de Morley supérieur.

Éric Jaligot a généralisé en 2001 encore un peu plus la notion de mauvais groupe [29], en étudiant les *groupes de Frobenius remplis*. Pour cela, il a dit d'un sous-groupe de Borel B d'un groupe de rang de Morley fini G qu'il est *isolé*, si tout sous-groupe de Borel K de G intersecte infiniment au plus un conjugué de B. Le théorème principal de [29] affirme que, si G est un groupe simple de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes propres, définissables et connexes sont résolubles :

- soit G satisfait toutes les conclusions du théorème 4.4;
- soit G a un sous-groupe de Borel non isolé.

Signalons enfin plusieurs travaux récents liés aux mauvais groupes :

- Wagner a adapté dans [58] les arguments de [26] à un contexte plus large;
- Deloro et Wiscons ont prouvé dans [22, 61] qu'*un groupe simple de rang de Morley 4 ou 5 ne peut être que mauvais.*
- Poizat a introduit dans [50] une notion d'*ensemble convexe*, permettant de généraliser des arguments de [26].

5. État des lieux

5.1. **Le programme de Borovik.** Dans les années 80, Borovik a proposé une approche de la conjecture de Cherlin-Zilber fondée sur des idées qui ont été fructueuses pour la classification des groupes simples finis. Elle est principalement basée sur les involutions et le résultat ci-dessous, où un 2-*sous-groupe de Sylow* est défini pour être un 2-sous-groupe maximal.

Théorème 5.1. – (Borovik-Poizat [11]) *Les* 2*-sous-groupes de Sylow sont conjugués dans tout groupe de rang de Morley fini.*

Si S est l'un d'eux, alors il a un plus grand sous-groupe divisible T et un plus grand sous-groupe définissable, connexe et d'exposant borné U. De plus, T est abélien avec un nombre fini d'involutions, et TU est d'indice fini dans S.

Le sous-groupe formé des involutions de T a donc une structure d'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$; sa dimension est appelée *rang de Prüfer* et se note $\mathrm{Pr}_2(T)$.

Nous ne détaillerons pas les nombreuses notions intervenant dans le programme de Borovik, elles sont le plus souvent issues de la théorie des groupes finis. L'idée de départ du programme est basée sur le théorème 5.1; quatre classes de groupes G de rang de Morley fini sont distinguées selon les sous-groupes T et U d'un quelconque 2-sous-groupes de Sylow :

- si T et U sont tous les deux non triviaux, G est dit de *type mixte*;
- si seul U est non trivial, G est dit de *type pair*;
- si seul T est non trivial, G est dit de *type impair*;
- sinon G est dit de *type dégénéré*.

Parmi les chercheurs qui ont participé directement au programme, on peut notamment citer Altınel, Berkman, Borovik, Burdges, Cherlin, Deloro, Jaligot ou Nesin, beaucoup d'autres ont indirectement contribué au projet. L'aboutissement principal, et particulièment spectaculaire, du programme a une très longue histoire qui ne sera pas résumée dans cet article. Nous livrons simplement son énoncé qui est le fruit de multiples travaux; sa démonstration fait l'objet d'un livre [1].

Théorème 5.2. – (Altınel, Borovik, Cherlin *et al.* [1]) *Soient G un groupe simple de rang de Morley fini. Alors :*

- *G n'est pas de type mixte;*
- *si G est de type pair, il vérifie la conjecture de Cherlin-Zilber.*

Nous verrons qu'il existe aussi des résultats extrêmement profonds pour les groupes de type impair; les informations concernant les groupes de type dégénéré sont moins forts, l'absence d'involution rend la situation plus délicate à aborder.

5.2. **Les groupes simples de type impairs.** Deux grandes sortes de résultats concernent les groupes de type impair. Ceux concernant les groupes ayant un 2-sous-groupe divisible maximal T suffisamment "gros" (concrètement, $\mathrm{Pr}(T) \geq 3$), et ceux où T est "petit" mais dont tous les sous-groupes propres définissables et connexes sont résolubles.

Pour la première catégorie, le résultat suivant marque l'achèvement d'une longue série de travaux auxquels ont notamment participé Berkman, Borovik, Burdges, Cherlin, Jaligot et Nesin. Les K^**-groupes* sont les groupes de rang de Morley fini dont les sections simples, définissables, connexes et propres vérifient la conjecture de Cherlin-Zilber. Cette hypothèse de travail est habituelle puisque, pour démontrer la conjecture de Cherlin-Zilber, il suffit de la vérifier pour les K^*-groupes simples.

Théorème 5.3. – (Burdges *et al.* [16]) *Soient G un K^*-groupe simple de rang de Morley fini de type impair et T un 2-sous-groupe divisible maximal de G. Si* $\mathrm{Pr}(T) \geq 3$*, alors G satisfait la conjecture de Cherlin-Zilber.*

D'un autre côté, Cherlin, Deloro et Jaligot ont analysé les *groupes simples connexes minimaux*, c'est-à-dire les groupes simples connexes de rang de Morley fini dont les sous-groupes propres définissables et connexes sont résolubles. Cette étude constituait d'ailleurs le sujet de la thèse de Deloro. L'analyse a finalement révélé trois configurations particulièrement pathologiques.

Théorème 5.4. – (Deloro [19, Théorème-Synthèse]) *Soient G un groupe simple connexe minimal de type impair et T un 2-sous-groupe divisible maximal de G. Alors l'une des quatre conditions suivantes est satisfaite :*

- $G \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$ *pour un corps algébriquement clos K;*
- $\mathrm{Pr}(T) = 1$ *et le* groupe de Weyl $W(G) = N_G(T)/T$ *est d'ordre 1;*
- $\mathrm{Pr}(T) = 1$ *et* $|W(G)| = 2$*;*
- $\mathrm{Pr}(T) = 2$ *et* $|W(G)| = 3$.

Cette analyse s'est poursuivie par une série de quatre articles dans lesquels Deloro et Jaligot ont étendu à un contexte bien plus large le théorème ci-dessus. Ils ont considéré les $N_\circ^\circ$*-groupes*, c'est-à-dire les groupe de rang de Morley fini dans lesquels le normalisateur de tout sous-groupe infini, définissable et abélien est résoluble-par-fini. Le théorème final a fait ressortir quatre configurations problématiques [21].

5.3. **Les groupes de type dégénéré.** Dans un tel groupe simple, les 2-sous-groupes de Sylow sont finis, ce qui est incompatible avec la conjecture de Cherlin-Zilber. Aussi, s'il existe un groupe de type dégénéré, il en existe un qui est simple connexe minimal, c'est donc sur ces groupes que se concentre l'étude des groupes de type dégénéré. Le problème est que l'immense majorité des travaux sur les groupes simples de rang de Morley fini concerne les groupes ayant des 2-sous-groupes de Sylow infinis. Une première information cruciale a toutefois été fournie en 2007.

Théorème 5.5. – (Borovik, Burdges et Cherlin [12]) *Dans un groupe connexe de rang de Morley fini, si les 2-sous-groupes de Sylow sont finis, ils sont triviaux.*

Une étude systématique des groupes simples connexes minimaux a été amorcée dans [2, 3]. Le principal résultat de [3] est le suivant, où un groupe G de rang de Morley fini est dit satisfaire l'hypothèse $(*)$ lorsque :

- soit G a un sous-groupe de Borel nilpotent;
- soit pour tout sous-groupe de Borel B, l'union des conjugués de B distincts de B recouvre B sur un ensemble de rang égal à celui de B.

Concrètement, cette hypothèse exclut juste certains groupes ayant une structure très voisine de celle des mauvais groupes.

Théorème 5.6. – (Altınel, Burdges et F. [3]) *Soit G un groupe simple connexe minimal satisfaisant l'hypothèse $(*)$. Alors tout sous-groupe de Borel B de G est un produit semi-direct de deux sous-groupes nilpotents, définissables et connexes U et D, avec D autonormalisant dans B.*

Il est également montré dans [3] que les éléments d'un groupe simple connexe minimal satisfaisant l'hypothèse $(*)$ admettent une décomposition de Jordan. La preuve du théorème ci-dessus est basée sur cette décomposition.

5.4. **La version o-minimale de la conjecture de Cherlin-Zilber.** Une structure infinie $\mathscr{M} = (M; <, \cdots)$ est dite *o-minimale* si $<$ est un ordre total sur M et si les parties définissables de M sont les unions finies d'intervalles et de points. L'exemple principale de structure o-minimale est le corps ordonné des nombres réels. Ces structures font l'objet d'une littérature abondante, avec des applications spectaculaires à d'autres domaines comme la géométrie algébrique. Le livre référence concernant ces structures est [55].

Un analogue de la conjecture de Cherlin-Zilber a été démontré dans ce contexte.

Théorème 5.7. – (Peterzil, Pillay et Starchenko [44]) *Soit $\mathscr{G} = (G; \cdot)$ une structure de groupe infini, définissablement simple, et définissable dans une structure o-minimale. Alors $\mathscr{G}$ vérifie l'une des deux assertions suivantes :*

- *il y a un corps réel clos définissable R tel que G est définissablement isomorphe à la composante connexe d'un groupe semi-algébrique $\hat{G}(R)$, où $\hat{G}$ est un groupe algébrique R-simple défini sur R;*
- *il y a un corps algébriquement clos K tel que G est définissablement isomorphe au groupe des points K-rationnels d'un groupe algébrique linéaire défini sur K.*

Un outil majeur de l'étude d'un tel groupe définissable dans une structure o-minimale est la présence d'une topologie; les méthodes utilisées ne sont donc aucunement transférables aux groupes de rang de Morley fini.

6. Quelques perspectives

En plus des questions déjà mentionnées, de très nombreuses questions liées à la conjecture de Cherlin-Zilber restent ouvertes. On peut en avoir un aperçu dans [14, Chapter B] et dans [1, Chapter X].

6.1. **La conjecture de Cherlin-Zilber dans le cas linéaire.** Une intrigante question de Macpherson et Pillay, fortement liée à la conjecture de Cherlin-Zilber et aux mauvais groupes, reste ouverte.

Question 6.1. – (Macpherson et Pillay [37] ou [14, Question B.44]) Soit $(K; +, \cdot, H)$ un corps de rang de Morley fini où H est un sous-groupe simple de $\mathrm{GL}_n(K)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce que H est isomorphe à un groupe algébrique sur K ?

En caractéristique non nulle, une réponse positive a été apportée par Poizat [49] suite à des travaux de Wagner [57]. La caractéristique nulle a notamment été analysée par Macpherson et Pillay [37], Poizat [49, Théorème 3] et Mustafin [40]; le problème est réduit à une question concernant les mauvais groupes.

6.2. **Les sous-groupes de Carter.** Très peu d'outils sont efficaces pour étudier un groupe simple connexe minimal quelconque, notamment lorsqu'un tel groupe peut être sans torsion. Dans ce contexte, des sous-groupes appelés *sous-groupes de Carter* se sont avérés particulièrement utiles. Il s'agit des sous-groupes nilpotents, définissables, connexes et d'indice fini dans leur normalisateur. Ce sont des sous-groupes analogues aux sous-groupes de Cartan des groupes algébriques.

Le rôle des sous-groupes de Carter a été non négligeable dans différentes études de groupes avec involutions, il a été prépondérant dans [2, 3]. Leur existence a été démontrée par F. et Jaligot [27], et leur conjugaison, dans un large contexte incluant les groupes simples connexes minimaux, a été établie dans [24]. Une question ouverte permettrait d'éliminer une configuration pathologique analysée dans [24].

Question 6.2. – [27, Conjecture 1.2] Un groupe de rang de Morley fini et l'union des conjugués d'un de ses sous-groupe de Carter, ont-ils le même rang de Morley ?

Un résultat de Jaligot [30] dit qu'une réponse positive à cette question fournirait la conjugaison des sous-groupes de Carter dans tout groupe de rang de Morley fini.

6.3. **Les actions d'un groupe de rang de Morley fini.** Il s'agit d'une partie de la théorie des groupes de rang de Morley fini actuellement en plein développement. Il s'agit de mieux comprendre les actions possibles d'un groupe de rang de Morley fini sur un ensemble ou sur un groupe abélien. Ces questions sont très anciennes puisque Zilber [63] étudiait déjà les actions d'un groupe abélien sur un autre groupe abélien, et Hrushovski avait analysé dans sa thèse en 1986 les actions d'un groupe de rang de Morley fini sur un ensemble de rang de Morley 1 (voir [47, §3.g]).

Cependant, l'article de Borovik et Cherlin [13] concernant les groupes de permutations en rang de Morley fini a apporté une impulsion nouvelle à ce type de questions. Il s'en est suivi de nombreux travaux traitant des actions d'un groupe de rang de Morley fini sur un ensemble définissable, à laquelle ont notamment participé Altınel, Berkman, Borovik, Cherlin, Wiscons, etc. Ce domaine très actif pourrait jouer un rôle primordial dans une résolution de la conjecture de Cherlin-Zilber.

Sur un plan un peu différent, également suite à l'article de Borovik et Cherlin, Deloro a commencé dans [20] une analyse des actions d'un groupe de rang de Morley fini sur un groupe abélien. Ces études se sont poursuivies avec en plus de Deloro, notamment Borovik, Cherlin et Tindzogho Ntsiri. De plus, Deloro a réussi à étendre certains théorèmes à des domaines bien plus larges.

6.4. **Une nouvelle approche ?** Terminons cet article en signalant le très récent résultat de Karhumäki.

Théorème 6.3. – (Karhumäki [32]) *Soit G un groupe simple et infini de rang de Morley fini admettant un groupe infini A d'automorphismes satisfaisant :*

- $C_G(\alpha)$ *est fini pour tout* $\alpha \in A$;
- *pour tout* $x \in G$*, l'indice du stabilisateur de* x *dans* A *est fini.*

Alors G est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive.

Ce résultat répond partiellement à une question de Hrushovski [28] qui avait proposé une approche de la conjecture de Cherlin-Zilber via certains automorphismes.

References

[1] Tuna Altınel, Alexandre V. Borovik, and Gregory Cherlin. *Simple groups of finite Morley rank*, volume 145 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[2] Tuna Altinel, Jeffrey Burdges, and Olivier Frécon. On Weyl groups in minimal simple groups of finite Morley rank. *Israel J. Math.*, 197(1):377–407, 2013.

[3] Tuna Altinel, Jeffrey Burdges, and Olivier Frécon. Structure of Borel subgroups in simple groups of finite Morley rank. *Israel J. Math.*, 208(1):101–162, 2015.

[4] John T. Baldwin. α_T is finite for $\aleph_1$-categorical T. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181:37–51, 1973.

[5] John T. Baldwin. An almost strongly minimal non-Desarguesian projective plane. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 342(2):695–711, 1994.

[6] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, and M. Ziegler. Red fields. *J. Symbolic Logic*, 72(1):207–225, 2007.

[7] Andreas Baudisch. A new uncountably categorical group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(10):3889–3940, 1996.

[8] Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martin-Pizarro, and Frank O. Wagner. Die böse Farbe. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(3):415–443, 2009.
[9] Walter Baur, Gregory Cherlin, and Angus Macintyre. Totally categorical groups and rings. *J. Algebra*, 57(2):407–440, 1979.
[10] A. V. Borovik and B. P. Poizat. Simple groups of finite morley rank without nonnilpotent connected subgroups. Preprint deposited at VINITI, 1990.
[11] Aleksandr Vasilievich Borovik and Bruno Petrovich Poizat. Tores et p-groupes. *J. Symbolic Logic*, 55(2):478–491, 1990.
[12] Alexandre Borovik, Jeffrey Burdges, and Gregory Cherlin. Involutions in groups of finite Morley rank of degenerate type. *Selecta Math. (N.S.)*, 13(1):1–22, 2007.
[13] Alexandre Borovik and Gregory Cherlin. Permutation groups of finite Morley rank. In *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2*, volume 350 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 59–124. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
[14] Alexandre Borovik and Ali Nesin. *Groups of finite Morley rank*, volume 26 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.
[15] É. Bouscaren. Introduction à la théorie des modèles. *Gaz. Math.*, 149:18–32, 2016.
[16] Jeffrey Burdges. Signalizers and balance in groups of finite Morley rank. *J. Algebra*, 321(5):1383–1406, 2009.
[17] Gregory Cherlin. Groups of small Morley rank. *Ann. Math. Logic*, 17(1-2):1–28, 1979.
[18] Luis Jaime Corredor. Bad groups of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic*, 54(3):768–773, 1989.
[19] Adrien Deloro. Groupes simples connexes minimaux non-algébriques de type impair. *J. Algebra*, 319(4):1636–1684, 2008.
[20] Adrien Deloro. Actions of groups of finite Morley rank on small abelian groups. *Bull. Symbolic Logic*, 15(1):70–90, 2009.
[21] Adrien Deloro and Éric Jaligot. Involutive automorphisms of $N_\circ^\circ$-groups of finite Morley rank. *Pacific J. Math.*, 285(1):111–184, 2016.
[22] Adrien Deloro and Joshua Wiscons. Simple groups of morley rank 5 are bad. J. Symbolic Logic, to appear., 2018.
[23] Erwin Engeler. Äquivalenzklassen von n-Tupeln. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 5:340–345, 1959.
[24] Olivier Frécon. Conjugacy of Carter subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Math. Log.*, 8(1):41–92, 2008.
[25] Olivier Frécon. Splitting in solvable groups of finite Morley rank. *J. Log. Anal.*, 2:1–15, 2010.
[26] Olivier Frécon. Simple groups of Morley rank 3 are algebraic. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(3):643–659, 2018.
[27] Olivier Frécon and Eric Jaligot. The existence of Carter subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory*, 8(5):623–633, 2005.
[28] Ehud Hrushovski. Pseudo-finite fields and related structures. In *Model theory and applications*, volume 11 of *Quad. Mat.*, pages 151–212. Aracne, Rome, 2002.
[29] Eric Jaligot. Full Frobenius groups of finite Morley rank and the Feit-Thompson theorem. *Bull. Symbolic Logic*, 7(3):315–328, 2001.
[30] Eric Jaligot. Generix never gives up. *J. Symbolic Logic*, 71(2):599–610, 2006.
[31] Eric Jaligot and Abderezak Ould Houcine. Existentially closed CSA-groups. *J. Algebra*, 280(2):772–796, 2004.
[32] Ulla Karhumäki. A model theoretic approach to simple groups of finite morley rank with finitary groups of automorphisms. Préprint Modnet no.1359, 2018.
[33] J. Łoś. On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems. *Colloquium Math.*, 3:58–62, 1954.
[34] Leopold Löwenheim. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Math. Ann.*, 76(4):447–470, 1915.
[35] Angus Macintyre. On ω_1-categorical theories of abelian groups. *Fund. Math.*, 70(3):253–270, 1971.
[36] Angus Macintyre. On ω_1-categorical theories of fields. *Fund. Math.*, 71(1):1–25. (errata insert), 1971.
[37] Dugald Macpherson and Anand Pillay. Primitive permutation groups of finite Morley rank. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 70(3):481–504, 1995.

[38] David Marker. *Model theory*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. An introduction.

[39] Michael Morley. Categoricity in power. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:514–538, 1965.

[40] Yerulan Mustafin. Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini. *J. Algebra*, 281(2):753–773, 2004.

[41] Yerulan Mustafin and Bruno Poizat. Sous-groupes superstables de $\mathrm{SL}_2(K)$ et de $\mathrm{PSL}_2(K)$. *J. Algebra*, 297(1):155–167, 2006.

[42] Ali Nesin. Nonsolvable groups of Morley rank 3. *J. Algebra*, 124(1):199–218, 1989.

[43] Ali Nesin. On bad groups, bad fields, and pseudoplanes. *J. Symbolic Logic*, 56(3):915–931, 1991.

[44] Ya'acov Peterzil, Anand Pillay, and Sergei Starchenko. Simple algebraic and semialgebraic groups over real closed fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(10):4421–4450, 2000.

[45] Bruno Poizat. Une théorie de Galois imaginaire. *J. Symbolic Logic*, 48(4):1151–1170 (1984), 1983.

[46] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles*. Bruno Poizat, Lyon, 1985. Une introduction à la logique mathématique contemporaine. [An introduction to contemporary mathematical logic].

[47] Bruno Poizat. *Groupes stables*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah [Light of Logic and Knowledge], 2. Bruno Poizat, Lyon, 1987. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique. [An attempt at reconciling algebraic geometry and mathematical logic].

[48] Bruno Poizat. Autour du théorème de Morley. In *Development of mathematics 1950–2000*, pages 879–896. Birkhäuser, Basel, 2000.

[49] Bruno Poizat. Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner. *J. Symbolic Logic*, 66(4):1637–1646, 2001.

[50] Bruno Poizat. Milieu et symétrie, une étude de la convexité dans les groupes sans involutions. *J. Algebra*, 497:143–163, 2018.

[51] J. Reineke. Minimale Gruppen. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 21(4):357–359, 1975.

[52] C. Ryll-Nardzewski. On the categoricity in power $\leq \aleph_0$. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.*, 7:545–548. (unbound insert), 1959.

[53] Lars Svenonius. $\aleph_0$-categoricity in first-order predicate calculus. *Theoria (Lund)*, 25:82–94, 1959.

[54] Simon Rhys Thomas. *Classification theory of simple locally finite groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1983. Thesis (Ph.D.)–University of London, Bedford College (United Kingdom).

[55] Lou van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*, volume 248 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[56] Robert L. Vaught. Applications to the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **57** = *Indagationes Math.*, 16:467–472, 1954.

[57] Frank Wagner. Fields of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic*, 66(2):703–706, 2001.

[58] Frank Wagner. Bad groups. RIMS kokyuroku, Mathematical Logic and Its Applications, volume 250, to appear. Preprint deposited at: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01482555, 2017.

[59] Frank O. Wagner. *Stable groups*, volume 240 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[60] Frank O. Wagner. Bad fields in positive characteristic. *Bull. London Math. Soc.*, 35(4):499–502, 2003.

[61] Joshua Wiscons. Groups of Morley rank 4. *J. Symb. Log.*, 81(1):65–79, 2016.

[62] B. I. Zil′ber. Groups and rings whose theory is categorical. *Fund. Math.*, 95(3):173–188, 1977.

[63] B. I. Zil′ber. Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields. *Colloq. Math.*, 48(2):173–180, 1984.

Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Poitiers, Téléport 2 - BP 30179, Boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

E-mail address: `olivier.frecon@math.univ-poitiers.fr`