

Norme de Dedekind-Hasse

Soit A un anneau intègre. Une application $N : A^* \rightarrow \mathbb{N}$ est dite être une *norme de Dedekind-Hasse* si, pour tout couple (a, b) d'éléments non nuls de A :

- soit b divise a ;
- soit il existe $x, y \in A$ tels que $ax - by \neq 0_A$ et $N(ax - by) < N(b)$.

1. Montrer que tout stathme euclidien sur A est une norme de Dedekind-Hasse.

2. *Tout anneau intègre possédant une norme de Dedekind-Hasse est principal.*

On suppose d'abord que A possède une norme de Dedekind-Hasse.

On fixe I un idéal non nul de A .

- (a) Justifier l'existence de $b \in I$ non nul tel que $N(a) \geq N(b)$ pour tout $a \in I$ non nul.
- (b) Montrer que $I = (b)$.

3. *Réciproquement, tout anneau principal possède une norme de Dedekind-Hasse.*

On suppose que A est un anneau principal.

- (a) Pourquoi tout $x \in A$ non nul se décompose en un produit d'un élément inversible u par un produit d'éléments irréductibles $p_1, \dots, p_r$, et que l'entier r est indépendant de la décomposition choisie de x ? *On note alors $N(x) = r$.*
- (b) Soient (a, b) un couple d'éléments non nuls de A . On suppose que b ne divise pas a .
 - i. Pourquoi a et b admettent-ils un PGCD? *On fixe d un PGCD de a et b .*
 - ii. Justifier l'existence d'éléments x et y de A tels que $ax - by = d$.
 - iii. Démontrer que N est une norme de Dedekind-Hasse.

Application à l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$

4. $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est un anneau principal.

On note $\omega = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $\mathbb{Z}[\omega]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et ω . Aussi, pour tout $z \in \mathbb{Z}[\omega]$, on note $N(z) = z\bar{z}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z .

Soient a et b deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}[\omega]$ tels que b ne divise pas a .

- (a) [Indépendant de la suite] Montrer que 2 est un élément premier de $\mathbb{Z}[\omega]$.
- (b) Montrer qu'il existe des entiers rationnels u et v tels que $\frac{a}{b} = u + v\omega$.
- (c) Pourquoi existe-t-il $t \in \mathbb{Z}$ tel que, soit $|v - t| \leq \frac{1}{3}$ (cas 1), soit $|2v - t| \leq \frac{1}{3}$ (cas 2) ?

Dans le cas 1, on note $X = \frac{a}{b}$, $U = u$ et $V = v$, et dans le cas 2, on note $X = 2\frac{a}{b}$, $U = 2u$ et $V = 2v$. On a alors $X = U + V\omega$.

On note aussi s l'entier relatif le plus proche de U , puis $q = s + t\omega$ et $r = b(X - q)$.

- (d) Montrer qu'on a $N(X - q) < 1$, puis que $N(r) < N(b)$.
- (e) Pourquoi a-t-on $N(a - bq) < N(b)$ dans le cas 1, et $N(2a - bq) < N(b)$ dans le cas 2 ?
- (f) On admet que, dans le cas 2, si on a $2a = bq$, alors il existe x et y dans $\mathbb{Z}[\omega]$ tels que $ax - by = \frac{b}{2}$.

Conclure que $\mathbb{Z}[\omega]$ est un anneau principal.

5. $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ n'est pas un anneau euclidien.

On procède par l'absurde en supposant qu'il existe un stathme euclidien $\varphi : \mathbb{Z}[\omega]^* \rightarrow \mathbb{N}$ et on fixe z un élément non inversible de $\mathbb{Z}[\omega]^*$ pour lequel $\varphi(z)$ est minimal.

- (a) Montrer que 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\omega]$.
- (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Z}[\omega]$, l'élément z divise $x - 1$, x ou $x + 1$.
- (c) En déduire que $N(z)$ divise dans $\mathbb{N}$ à la fois 4 ou 9 et 5 ou 7.

Indication : prendre $x = 2$ puis $x = \omega$.

- (d) Conclure que $\mathbb{Z}[\omega]$ n'est pas un anneau euclidien.