Université de Poitiers, Année 2022-2023

3e année de Licence de Mathématiques, Anneaux

Examen, le mardi 2 mai 2023, 9h-12h

Questions de cours (sur 5 points)

1. Donner la définition d'un anneau euclidien.
2. Démontrer que, dans un anneau euclidien, tous les éléments non nuls se décomposent en un produit d'un élément inversible par un produit d'éléments irréductibles.
3. Soit A un anneau factoriel. Démontrer que tout produit de deux polynômes primitifs de $A[X]$ est un polynôme primitif.

Exercices

Exercice 1 (extrait du DM, sur 2 points)
Soit A un anneau commutatif. Pour tout idéal I de A, on définit

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}.$$

1. Démontrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.
2. Prouver que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Exercice 2 (extrait du TD, sur 4 points)
On désigne par $\mathbb{Z}[i]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par le nombre complexe i.

1. Montrer que les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ sont de la forme $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Trouver les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

   On considère l'application $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi(z) = |z|^2$.
3. Vérifier que, pour tout couple d'éléments non nuls (a, b) de $\mathbb{Z}[i]$, si b divise a, alors $\varphi(b) \leqslant \varphi(a)$.
4. Démontrer que, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z}[i]^2$ avec b non nul, il existe des éléments q et r de $\mathbb{Z}[i]$ tels que $a = bq + r$ et $\varphi(r) < \varphi(b)$.
5. En déduire que la restriction de φ à $\mathbb{Z}[i]^*$ est un stathme euclidien pour $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 3 (sur 9 points)
Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{Z}$ et l'ensemble des polynômes constants de $\mathbb{Z}[X]$: l'ensemble $\mathbb{Z}$ est donc un sous-anneau de $\mathbb{Z}[X]$.
Le but de cet exercice est de montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{Z}[X]$ sont ceux de l'une des formes suivantes :

- *$J = \{0\}$;*
- *$J = p\mathbb{Z}[X]$ pour un nombre premier p ;*
- *$J = (P)$ pour un polynôme primitif $P \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$;*
- *$J = (p, P)$ pour un nombre premier p et $P \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.*

1. (a) Soit A un anneau commutatif. À quelle condition $A[X]$ est-il un anneau intègre ?
   (b) En déduire que $J = \{0\}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$.
2. (a) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme primitif. S'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, pourquoi est-il un élément premier de $\mathbb{Z}[X]$?
   (b) En déduire que, si $J = (P)$ pour un polynôme primitif $P \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors J est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$.
3. (a) Soient B un sous-anneau d'un anneau commutatif A, et I un idéal premier de A. Montrer que $I \cap B$ est un idéal premier de B.
   (b) En déduire que, si J est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$, on a soit $J \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, soit $J \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ pour un nombre premier p.
4. On fixe un idéal premier J non nul de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $J \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. On note d le plus petit entier pour lequel J possède un polynôme de degré d.
   (a) Montrer qu'il y a un polynôme primitif P de degré d qui appartient à J.
   (b) Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (c) Soit $A \in J$. Pourquoi existe-t-il des polynômes Q et R dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $A = QP + R$ et $\deg R < d$?
   (d) Démontrer que $R = 0$.
   (e) En déduire que $J = (P)$.
5. On fixe un idéal J de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $J \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ pour un nombre premier p. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\overline{a} = a + (p)$ la classe modulo (p) de tout $a \in \mathbb{Z}$. On considère le morphisme d'anneaux surjectif $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ qui, à tout polynôme $\sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ associe le polynôme $\sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} X^k \in \mathbb{F}_p[X]$.
   (a) Quel est le noyau de φ ? Pourquoi est-il contenu dans J ?
   (b) En déduire que $p\mathbb{Z}[X]$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$.
   (c) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $J = (p, P)$.
   [*Indication : justifier d'abord l'existence de $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\varphi(J) = (\varphi(P))$.*]
   (d) On suppose $J \neq p\mathbb{Z}[X]$ et on fixe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que, $J = (p, P)$. Montrer que J est premier si et seulement si $\varphi(P)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.