Université de Poitiers

Année scolaire 2009–2010

<u>Licence de Mécanique. L3</u>

Analyse complexe

Feuilles de TD no. 4

Fonctions harmoniques et transformations conformes

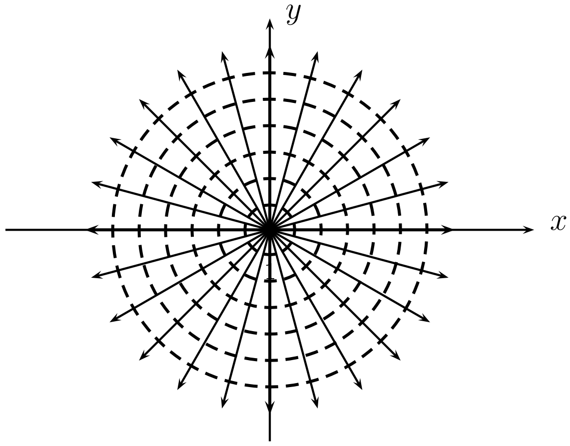
Exercice 1. Une ***Source*** est un écoulement plan qui est représenté par son champ des vitesses $\overrightarrow{V}(u(x,y), v(x,y))$ dont le module est une fonction radiale $|\overrightarrow{V}| = S(r)$.

(a) Calculer le débit D de ce champ à travers d'un cercle de rayon r, ainsi que les composantes de vitesse en fonction de D.

(b) Soit $f(z)$ le poteniel complexe de cet écoulement, montrer que $f'(z)$ dite le fonction vitesse complexe de cet écoulement est donnée par $f'(z) = u - iv$.

(c) Trouver le potentiel réel et la fonction de courant.

(d) Montrer que les lignes de courant sont des demi-droites issues de l'origine (les lignes fléchées) et les lignes équipotentielles sont des cercles centrés en O (les lignes brisées sur la figure).



(e) Vérifier que lorsque le débit est négatif, le sens des flèches change et on obtient un écoulement représentant un puits.
(f) Superposer deux écoulements, le premier une source d'origine placée en A d'affixe $a > 0$ et l'autre un puits d'origine placée en A' d'affixe $-a$. Calculer le potentiel complexe de l'écoulement résultant de cette superposition.
(g) Tracer graphiquement les lignes de courants et les lignes équipotentielles.

Solution de l'exercice 1. (a). Par définition

$$D = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}.\vec{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \vec{V}.\vec{n} r d\theta.$$

Comme $|\overrightarrow{V}| = S(r)$, $\overrightarrow{V} = S(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = S(r)(x+\mathrm{i}y)$, avec $x^2+y^2=1$, et dans le cas $x^2+y^2=r^2$, on écrit

$$\overrightarrow{V}\left(u(x,y), v(x,y)\right) = \overrightarrow{V}(x,y) = S(r)\left[\left(\frac{x}{r}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{x}{r}\right)\right].$$

Par conséquent

$$u(x,y) = \frac{S(r)x}{r}, \qquad v(x,y) = \frac{S(r)y}{r}.$$

Posons $\overrightarrow{n} = (x_n, y_n)$, avec $x_n^2 + y_n^2 = 1$, alors si $x^2+y^2=r^2$, en remplaçant x_n par $\frac{x}{r}$ et y_n par $\frac{y}{r}$ on aura

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{S(r)}{r^2}(x^2+y^2) = S(r).$$

D'où $D = \int_0^{2\pi} rS(r)d\theta = 2\pi r S(r)$ et $S(r) = \frac{D}{2\pi r}$. Ainsi on retrouve

$$u(x,y) = S(r)\left[\frac{x}{r}\right] = \frac{Dx}{2\pi r^2}, \qquad v(x,y) = S(r)\left[\frac{y}{r}\right] = \frac{Dy}{2\pi r^2}.$$

(b). Si $f(z)$ est le potentiel complexe $f(z) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y)$ où φ est le potentiel réel et ψ est la fonction de courant. Ainsi les composantes du champ de vitesse sont

$$\begin{cases} u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = S(r)\left[\frac{x}{r}\right] = \frac{Dx}{2\pi r^2} \\ v &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = S(r)\left[\frac{y}{r}\right] = \frac{Dy}{2\pi r^2}. \end{cases}$$

De sorte que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dz} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz} \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{dx}{dz} = (u - \mathrm{i}v) \\ &= \frac{D}{2\pi r^2}(x - \mathrm{i}y) = \frac{D\overline{z}}{2\pi z\overline{z}} = \frac{D}{2\pi z}. \end{aligned}$$

(c). Puisque $f'(z) = \frac{D}{2\pi z}$, alors $f(z) = \frac{D}{2\pi} \ln z$. On ne s'occupe pas de la constante d'intégration car on s'interessera que de $\varphi = Cte$ et $\psi = Cte$. On prenant la détermination principale de ln dans le plan complexe, on peut écrire

$$f(z) = \frac{D}{2\pi} \left(\ln |z| + \mathrm{i} \arg z \right),$$

d'où

$$\begin{cases} \varphi(x,y) & = \frac{D}{2\pi} \ln(x^2+y^2)^{1/2} = Cte \\ \psi(x,y) & = \frac{D}{2\pi} \arg z = Cte. \end{cases}$$

(d). On remarque que les lignes de courant $\arg z = \theta = Cte$ sont les lignes d'issues d'origine et les lignes équipotentielles $\varphi(x,y) = \frac{D}{2\pi} \ln(x^2+y^2)^{1/2} = Cte$ sont des cercles centrés en 0.

(e). On a montré que

$$u(x,y) = \frac{Dx}{2\pi r^2}, \qquad v(x,y) = \frac{Dy}{2\pi r^2}$$

Donc si $D > 0$ le champ des vecteurs (u,v) est dirigé vers extérieur et si $D < 0$ ce champ est dirigé vers 0.

(f). Soient $f_1(z)$ le potentiel complexe d'une source placée au point $(a,0), a > 0$ et $f_2(z)$ le potentiel complexe d'un puits placée au point $(-a,0), a > 0$. La supperposition sera

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{D}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a}, \qquad (D > 0).$$

Donc le potentiel réel et la fonction de courant seront

$$\varphi = \frac{D}{2\pi} \ln \left| \frac{z-a}{z+a} \right|, \quad \psi = \frac{D}{2\pi} (\arg(z-a) - \arg(z+a)).$$

(f) Question non abordée.