

# Courbes et Surfaces

## Cours de M1

---

**Hassan Emamirad**

*Université de Poitiers*

---



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les courbes</b>	<b>5</b>
1.1	Représentation régulière . . . . .	5
1.2	Changement de paramètre admissible . . . . .	8
1.3	Représentation implicite d'une courbe . . . . .	10
1.4	Longueur d'un arc . . . . .	12
1.5	Courbure . . . . .	18
1.6	Vecteur normal principal et la courbure signée . . . . .	20
1.7	Trièdre de Frenet . . . . .	22
1.8	Torsion . . . . .	24
1.9	Système de Serret-Frenet . . . . .	27
1.10	Développante et développée d'une courbe . . . . .	31
1.11	Théorie de contact . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Les surfaces</b>	<b>37</b>
2.1	Représentation paramétriques des surfaces régulières . . . . .	37
2.2	Plan tangent et vecteur normal . . . . .	44
2.3	Première forme fondamentale . . . . .	49
2.4	L'aire d'une surface . . . . .	52
2.5	Seconde forme fondamentale . . . . .	55
2.6	La courbure de surface . . . . .	61



# Chapitre 1

## Les courbes

Dans ce cours nous désignons par les lettres grasses une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles. Par exemple si  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  est une base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{x}(t)$  est une fonction à valeurs vectorielles  $\mathbf{x}(t)$  s'écrit :

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + \dots + x_n(t)\mathbf{e}_n.$$

Les fonctions scalaires  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  sont les composantes de  $\mathbf{x}(t)$ . De plus si  $\mathbf{x}(t)$  est une fonction à valeurs vectorielles de classe  $C^1$ , la dérivée de  $\mathbf{x}$  sera notée par  $\mathbf{x}'$ . Ainsi pour une fonction  $\mathbf{x}$  de classe  $C^1$  on a

$$\mathbf{x}'(t) = x'_1(t)\mathbf{e}_1 + x'_2(t)\mathbf{e}_2 + \dots + x'_n(t)\mathbf{e}_n.$$

### 1.1 Représentation régulière

#### Définition 1.1.1

Soit  $\mathbf{x}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs vectorielles est appelée une **représentation paramétrique régulière** d'une courbe  $\mathcal{C}$ , si

$$\mathbf{x} : t \in I \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$$

vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\mathbf{x}(t)$  est de classe  $C^1$  dans  $I$  ;
- (ii)  $\mathbf{x}'(t) \neq 0$  pour tout  $t$  dans  $I$ .

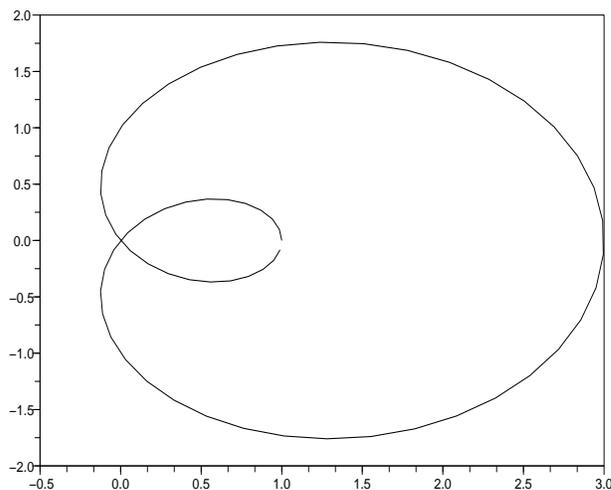


figure 1.1

**Exemple 1.1.1**

Le graphe de l'équation  $r = 2 \cos \theta - 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  dans les coordonnées polaires est donné dans la figure ci-dessus. Comme les coordonnées cartésiennes sont  $x_1 = r \cos \theta$  et  $x_2 = r \sin \theta$ . En substituant  $r$  par sa valeur on obtient la représentation paramétrique suivant

$$x_1 = (\cos \theta)(2 \cos \theta - 1), \quad x_2 = (\sin \theta)(2 \cos \theta - 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ainsi

$$\mathbf{x}(\theta) = (\cos \theta)(2 \cos \theta - 1)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)(2 \cos \theta - 1)\mathbf{e}_2.$$

Cette représentation est régulière, car

$$\mathbf{x}'(\theta) = (-4 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta)\mathbf{e}_1 + (2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - \cos \theta)\mathbf{e}_2$$

qui est continue et si on calcule la norme de  $\mathbf{x}'(\theta)$ , on obtient

$$|\mathbf{x}'| = \sqrt{5 - 4 \cos \theta} \neq 0 \quad \text{pour tout } 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ainsi  $\mathbf{x}' \neq 0$ .

Dans cet exemple on remarque que une courbe paramétrique régulière peut avoir des points multiples, i.e. Il peut y exister  $t_1$  et  $t_2$ ,  $t_1 \neq t_2$  tels que  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ . Dans le théorème suivant on démontre que cela ne peut pas arriver localement.

**Théorème 1.1.1**

Soit  $\mathbf{x}(t)$  une représentation d'une courbe paramétrique régulière sur  $I$ , alors pour chaque point  $t_0 \in I$  il existe un voisinage de  $t_0$  sur lequel  $\mathbf{x}(t)$  est bijective.

Pour démontrer ce théorème on a besoin le lemme suivant.

**Lemme 1.1.1**

Soit  $g(t)$  une fonction scalaire continue au point  $t = t_0$  telle que  $g(t_0) \neq 0$ . Alors il existe  $\delta > 0$  telle que  $g(t) \neq 0$  pour tout  $t \in V_\delta(t_0) = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq \delta\}$ .

*Preuve.* Soit  $\epsilon = \frac{1}{2}|g(t_0)|$ . Comme  $g$  est continue, il existe un  $\delta > 0$  telle que  $|g(t) - g(t_0)| < \epsilon$ , pour tout  $t \in V_\delta(t_0)$ . Ainsi

$$|g(t_0)| = |g(t_0) - g(t) + g(t)| \leq |g(t) - g(t_0)| + |g(t)| < \epsilon + |g(t)| = \frac{1}{2}|g(t_0)| + |g(t)|.$$

En faisant passer  $\frac{1}{2}|g(t_0)|$  de l'autre côté de cette inégalité, on aura  $|g(t)| \geq \frac{1}{2}|g(t_0)|$ . Or,  $g(t_0) \neq 0$  ce qui implique que  $g(t) \neq 0$  pour tout  $t \in V_\delta(t_0)$ .  $\square$

*Preuve du théorème 1.1.1.* Comme  $\mathbf{x}(t)$  est régulière dans  $I$  et que  $t_0 \in I$ , alors la dérivée de l'une des composante, soi-disant  $x'_1(t_0) \neq 0$ . Comme  $x'_1(t)$  est continue en  $t_0$ , le lemme précédent implique qu'il existe un voisinage  $V_\delta(t_0)$  dans lequel  $x'_1(t) \neq 0$ . Alors on peut dire que  $\mathbf{x}(t)$  est bijective dans  $V_\delta(t_0)$ , car sinon on peut trouver deux points  $t_1$  et  $t_2$ ,  $t_1 \neq t_2$  tels que  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$  et dans ce cas, d'après le théorème des accroissements finis, il existerais un réel  $\tau$ ,  $t_1 \leq \tau \leq t_2$ , tel que

$$0 = \frac{\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)}{t_1 - t_2} = \mathbf{x}'(\tau),$$

ce qui est une contradiction, car  $x'_1(t) \neq 0$  dans  $V_\delta(t_0)$   $\square$

**Exemple 1.1.2**

Considérons la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (x_1(t), x_2(t)),$$

avec

$$x_1(t) = t^4, \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ t^4 \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

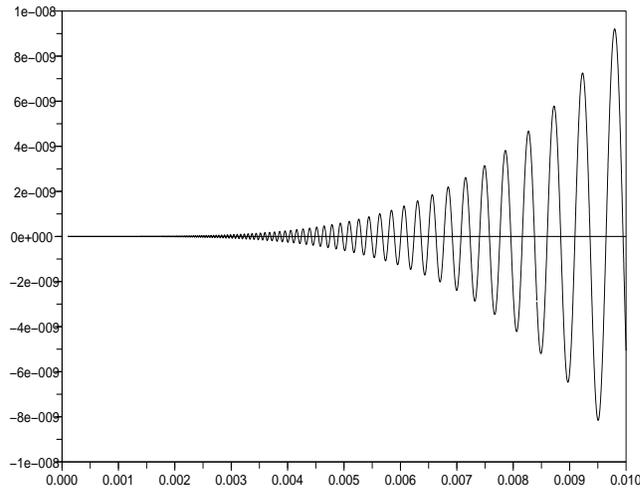


figure 1.2

La figure ci-dessus est le graphe de cette fonction. Cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$ , mais au point  $t = 0$ , on a  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$ , donc ce n'est pas une représentation régulière. Notons que cette fonction a des points multiples dans chaque voisinage de  $t = 0$ , en effet, pour chaque  $\delta > 0$  on peut choisir un entier  $N > 0$ , tel que  $1/2\pi N < \delta$  et en prenant  $t_1 = -(1/2\pi N)$  et  $t_2 = 1/2\pi N$ , on aura

$$x_1(t_1) = \frac{1}{(2\pi N)^4} = x_2(t_2), \quad \text{et} \quad x_2(t_1) = 0 = \frac{\sin 2\pi N}{(2\pi N)^4} = x_2(t_2).$$

De plus  $-\delta < t_1 < t_2 < \delta$ .

## 1.2 Changement de paramètre admissible

### Définition 1.2.1

Une fonction scalaire réelle  $t = t(\theta)$  définie sur un intervalle  $I_\theta$  est dite **changement de paramètre admissible** sur  $I_\theta$  si

- (i)  $t = t(\theta)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $I_\theta$  ;
- (ii)  $dt/d\theta \neq 0$  pour tout  $\theta \in I_\theta$ .

Cette définition nous permet d'appliquer le **Théorème d'inversion** (voir, Théorème 1.3.1) qui s'exprime sous la forme suivante :

**Théorème 1.2.1**

Si  $t = t(\theta)$  est un changement de paramètre admissible sur  $I_\theta$ , alors c'est une application bijective de  $I_\theta$  sur  $I_t = t(I_\theta)$  et son inverse est aussi un changement de variable admissible sur  $I_t$ .

**Preuve.** Comme  $dt/d\theta$  est continue et non nulle sur  $I_\theta$ , alors on a ou bien  $dt/d\theta > 0$  ou bien  $dt/d\theta < 0$ . Supposons  $dt/d\theta > 0$  (le cas de  $dt/d\theta < 0$  se traite de la même façon), alors  $t(\theta)$  est une fonction strictement croissante, donc inversible et son inverse  $\theta = \theta(t)$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  et croissante, car

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}}.$$

Donc,  $\theta = \theta(t)$  est aussi un changement de paramètre admissible sur  $I_t$ . □

**Exemple 1.2.1**

Reprenons l'exemple 1.1.1 et appliquons trois sortes de changement de paramètre

- (a) Si on choisit le changement de paramètre  $\theta = t + \pi$  avec  $-\pi \leq t \leq \pi$ , alors la représentation

$$\mathbf{x}(\theta) = (\cos \theta)(2 \cos \theta - 1)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)(2 \cos \theta - 1)\mathbf{e}_2$$

devient

$$\mathbf{x}(t) = [\cos(t + \pi)][(2 \cos(t + \pi) - 1)\mathbf{e}_1 + [\sin(t + \pi)][2 \cos(t + \pi) - 1]\mathbf{e}_2.$$

C'est un changement de paramètre admissible croissante et il garde le sens positif de variation seul un décalage de  $\pi$  intervient ;

- (b) Si on choisit le changement de paramètre  $\theta = -t$  avec  $-2\pi \leq t \leq 0$ , alors la représentation devient

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t)(2 \cos t - 1)\mathbf{e}_1 - (\sin t)(2 \cos t - 1)\mathbf{e}_2$$

C'est encore un changement de paramètre admissible décroissante et il fait changer le sens de variation ;

- (c) Si on introduit le changement de paramètre

$$\theta(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ -t + 2\pi, & \text{pour } \frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3} \\ t, & \text{pour } \frac{5\pi}{3} \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Cette fois ce n'est plus un changement de paramètre admissible, le parcours commence du point  $(1, 0)$  pour  $t = 0$  dans le sens positif, arriver au point  $(0, 0)$  pour  $t = \pi/3$ , le point  $(x_1, x_2)$  change de sens et parcourt le grand périmètre dans le sens négatif jusqu'au point  $(0, 0)$ , puis il parcourt du point  $(0, 0)$  au  $(0, 1)$  dans le sens positif. Ainsi la courbe  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[\theta(t)]$  est continue mais pas différentiable.

### Définition 1.2.2

Une représentation paramétrique  $\mathbf{x}(t)$  est dite de classe  $C^m$  si la fonction  $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est  $m$ -fois continûment différentiable.

La régularité d'une courbe est indépendante de l'espace image. Autrement dit une courbe peut être très régulière et pour deux points distincts  $t_1$  et  $t_2$ , avoir deux voisinages  $V_1$  et  $V_2$  tels que  $t_1 \in V_1 \subset E_1$  et  $t_2 \in V_2 \subset E_2$  et  $E_1$  et  $E_2$  soient deux sous-espaces vectoriels distincts. Ainsi que l'on montre dans l'exemple suivant :

### Exemple 1.2.2

Considérons la représentation

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} t\mathbf{e}_1 + e^{-1/t^2}\mathbf{e}_3, & \text{pour } t < 0 \\ 0, & \text{pour } t = 0 \\ t\mathbf{e}_1 + e^{-1/t^2}\mathbf{e}_2, & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

Remarquons que  $\mathbf{x}(t)$  est de classe  $C^\infty$ . Attention au point  $t = 0$  la dérivée est différentiable car

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0+} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left( \mathbf{e}_1 + \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2} \right) = \mathbf{e}_2 = \lim_{t \rightarrow 0-} \left( \mathbf{e}_1 + \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2} \right) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0+}$$

D'où

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{cases} \mathbf{e}_1 + \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2} \mathbf{e}_3, & \text{pour } t \leq 0 \\ \mathbf{e}_1 + \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2} \mathbf{e}_2, & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

Cette courbe pour  $t < 0$  est dans le plan  $x_1x_3$  tandis que pour  $t > 0$  elle est dans le plan  $x_1x_2$ .

## 1.3 Représentation implicite d'une courbe

Intuitivement on sait qu'une courbe peut être représentée par l'intersection de deux surfaces. Autrement dit cette courbe peut être donnée par les lieux des points  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  que pour chaque  $t \in I$  vérifient deux relations

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (1.1)$$

Pour savoir quand est-ce que pour  $x_3 \neq 0$  on peut résoudre  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de  $x_3$ , il nous faut rappeler le théorème des fonction implicites qui est une conséquence du théorème d'inversion.

### **Théorème 1.3.1**

**Théorème d'inversion locale.** Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $x_0 \in U$  et on suppose que la matrice jacobienne  $Df(x_0)$  est inversible. Alors il existe  $V = V_{x_0}$  un voisinage de  $x_0$  dans  $U$  et  $W = W_{y_0}$  un voisinage de  $y_0 = f(x_0)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $f(V) = W$  et une application  $f^{-1} : W \mapsto V$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , unique, telle que  $f^{-1}(f(x)) = x$ , pour tout  $x \in V$ . De plus  $Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$  avec  $f(x) = y$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  il en est de même pour  $f^{-1}$ .

Sans entrer dans les détails, on peut montrer que en prenant  $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  définie par  $f(x, y) = (x, F(x, y))$  avec  $F(x, y)$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on obtient :

### **Théorème 1.3.2**

**Théorème des fonctions implicites.** Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et  $F : U \mapsto \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $F(x_0, y_0) = 0$  pour  $(x_0, y_0) \in U$  et que  $\det D_y F(x_0, y_0) \neq 0$ . Alors l'équation  $F(x, y) = 0$  peut être résolue localement par rapport aux variables  $y$ . C'est-à-dire qu'il existe  $V = V_{x_0}$  un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $W = W_{y_0}$  un voisinage de  $y_0$  dans  $\mathbb{R}^m$ , avec  $V \times W \subset U$  et une application  $f : V \mapsto W$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , unique, telle que

$$x \in V, y \in W \text{ et } F(x, y) = 0 \iff x \in V \text{ et } y = f(x).$$

De plus la matrice jacobienne  $D_F(x, y)$  est inversible pour tout  $(x, y) \in V \times W$ .

Pour résoudre (1.1), à l'aide de ce théorème nous allons choisir  $F = (F_1, F_2), y = (x_1, x_2)$  et  $x = x_3$ , alors si

$$\Delta = \det(D_y F) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \neq 0,$$

alors on peut trouver au moins localement

$$x_1 = x_1(x_3), \quad x_2 = x_2(x_3), \quad x_3 = x_3.$$

Finalement, en choisissant  $x_3 = t$  comme paramètre on peut retrouver l'équation paramétrée de la courbe

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = t.$$

**Exemple 1.3.1**

L'intersection de deux surfaces

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3^2 = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x_1, x_2, x_3) = x_3x_1 - x_2^2 = 0$$

est la courbe

$$x_1 = t^3, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = t.$$

En effet,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_3 & -2x_2 \end{vmatrix} = -x_3 \neq 0$$

et en prenant  $x_3 = t$ , on aura  $x_2 = x_3^2 = t^2$  et  $x_1 = x_2^2/x_3 = t^3$ .

**1.4 Longueur d'un arc****Définition 1.4.1**

Soit  $\mathbf{x} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une représentation paramétrique régulière d'une courbe (ce qu'on appellera un **arc paramétré régulier**). A toute  $n$ -subdivision  $\sigma_n$  de  $[a, b]$  par des points  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$  on associe la longueur de la ligne brisée

$$L_{\sigma_n} = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)|,$$

et on appelle longueur de  $\mathbf{x}$  le nombre  $\ell = \sup_n L_{\sigma_n}$ , où la borne supérieure est prise sur toutes les subdivisions  $\sigma_n$ . Dans le cas où  $\ell$  est fini on dira que l'arc de courbe est **rectifiable**.

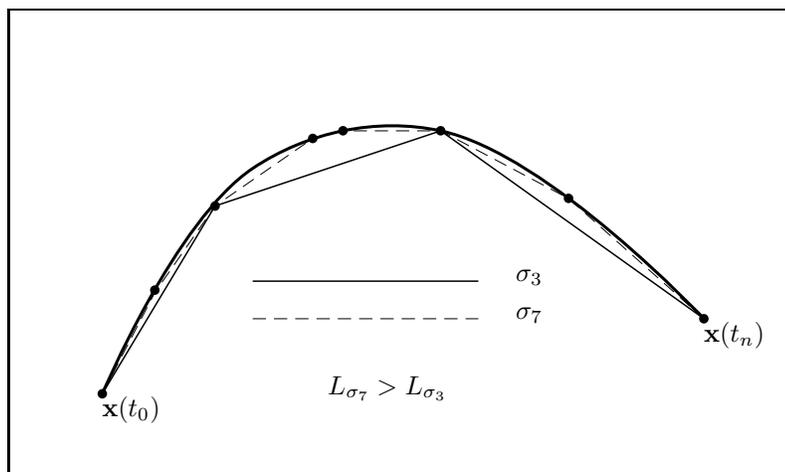


Figure 1.3

Dans la figure ci-dessus on remarque que en prenant 4 points sur la courbe  $\mathbf{x}$  qui correspond à  $\sigma_3$ , on a  $L_{\sigma_3} < L_{\sigma_7}$ , où  $\sigma_7$  correspond à une subdivision plus fine qui contient 8 points.

**Exemple 1.4.1**

Considérons l'arc paramétré  $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2$ . Cet arc est rectifiable, car pour la subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  on a

$$\begin{aligned} L_{\sigma_n} &= \sum_{i=1}^n |(t_i\mathbf{e}_1 + t_i^2\mathbf{e}_2) - (t_{i-1}\mathbf{e}_1 + t_{i-1}^2\mathbf{e}_2)| \\ &= \sum_{i=1}^n |(t_i - t_{i-1})\mathbf{e}_1 + (t_i^2 - t_{i-1}^2)\mathbf{e}_2| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |t_i - t_{i-1}|\|\mathbf{e}_1\| + |t_i^2 - t_{i-1}^2|\|\mathbf{e}_2\| \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) + (t_i^2 - t_{i-1}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})(1 + t_i + t_{i-1}) \\ &\leq 3 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = 3 \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le fait que  $0 \leq t_{i-1} < t_i \leq 1$  donc  $1 + t_{i-1} + t_i \leq 3$  et que  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = 1$ . Ainsi la suite  $\{L_{\sigma_n}\}$  est croissante, bornée, donc convergente, alors  $\mathbf{x}$  est rectifiable.

**Exemple 1.4.2**

Soit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t && \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ x_2(t) &= \begin{cases} t \cos(1/t) & \text{for } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{for } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que cet arc est non-rectifiable, car pour la subdivision  $0 = t_0 < t_1 = \frac{1}{(n-1)\pi} < \dots < t_{n-1} = \frac{1}{\pi} < t_n = 1$ , ( $t_i = \frac{1}{(n-i)\pi}$ ) on a

$$L_{\sigma_n} = \sum_{i=1}^n |(x_1(t_i)\mathbf{e}_1 + x_2(t_i)\mathbf{e}_2) - (x_1(t_{i-1})\mathbf{e}_1 + x_2(t_{i-1})\mathbf{e}_2)|$$

En éliminant le premier et le dernier termes, on obtient

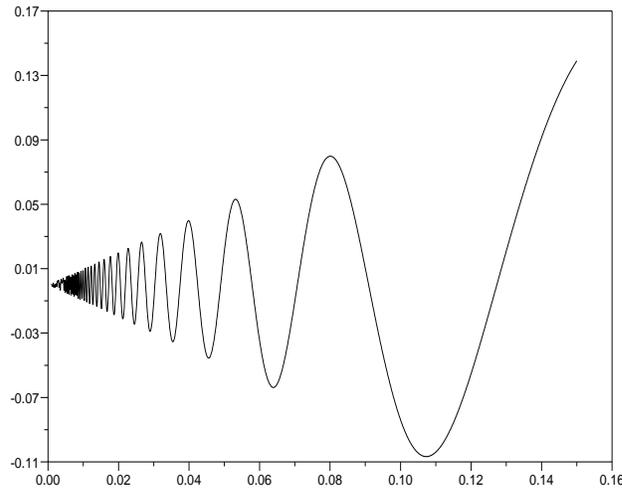


Figure. 1.4

$$\begin{aligned}
 L_{\sigma_n} &\geq \sum_{i=2}^{n-1} \left| \left( \frac{1}{i\pi} - \frac{1}{(i-1)\pi} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{1}{i\pi} \cos(i\pi) - \frac{1}{(i-1)\pi} \cos((i-1)\pi) \right) \mathbf{e}_2 \right| \\
 &\geq \sum_{i=2}^{n-1} \left| \left( \frac{(-1)^i}{i\pi} - \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)\pi} \right) \mathbf{e}_2 \right| \\
 &= \sum_{i=2}^{n-1} \left| \frac{1}{i\pi} + \frac{1}{(i-1)\pi} \right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}
 \end{aligned}$$

Sachant que la série  $\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}$  diverge lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors  $L_{\sigma_n}$  devient arbitrairement grand lorsque  $n \rightarrow \infty$ . c'est pourquoi  $\mathbf{x}$  n'est pas rectifiable.

#### **Théorème 1.4.1**

Soit  $\mathbf{x}$  un arc paramétré régulier défini sur  $[a, b]$ , alors il est rectifiable et sa longueur est donnée par l'intégrale

$$\ell = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt. \quad (1.2)$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin le lemme suivant.

**Lemme 1.4.1**

Pour tout arc rectifiable et tous  $\epsilon > 0$  et  $\delta > 0$  arbitraires, il existe une subdivision  $\sigma_n$  tel que l'on ait

- (i)  $t_i - t_{i-1} < \delta$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$  et
- (ii)  $|\ell - L_{\sigma_n}| < \epsilon$ .

**Preuve.** Puisque  $\ell$  est le supremum des  $L_\sigma$  pour toute subdivision  $\sigma$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une subdivision  $\sigma_m$  telle que  $\ell \geq L_{\sigma_m} > \ell - \epsilon$ , donc elle vérifie  $(\ell - L_{\sigma_m}) < \epsilon$ , c'est-à-dire (ii). Maintenant si  $\sigma_m$  ne vérifie pas (i), en prenant une subdivision plus fine  $\sigma_n, n > m$  elle vérifiera (i) et dans ce cas on a  $\ell \geq L_{\sigma_n} > L_{\sigma_m} > \ell - \epsilon$ , alors on a aussi  $(\ell - L_{\sigma_n}) < \epsilon$ . Donc pour  $\sigma_n$  on a (i) et (ii).  $\square$

**Preuve du théorème 1.4.1** On démontrera ce théorème dans  $\mathbb{R}^3$ , mais le même argument est valable dans tout  $\mathbb{R}^d$ . Tout d'abord nous allons montrer que tout arc paramétré régulier  $\mathbf{x}(t), t \in [a, b]$  est rectifiable. En effet, pour une subdivision arbitraire  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  nous avons

$$\begin{aligned} L_{\sigma_n} &= \sum_{i=1}^n |(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))\mathbf{e}_1 + (x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}))\mathbf{e}_2 + (x_3(t_i) - x_3(t_{i-1}))\mathbf{e}_3| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})| + |x_2(t_i) - x_2(t_{i-1})| + |x_3(t_i) - x_3(t_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x'_1(\theta_i)|(t_i - t_{i-1}) + |x'_2(\theta'_i)|(t_i - t_{i-1}) + |x'_3(\theta''_i)|(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé le théorème des accroissements finis avec  $\theta_i, \theta'_i, \theta''_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Comme  $x'_i(t)$  sont continues dans  $[a, b]$  alors ils y sont bornés, soit disant par  $M_i$ . Ainsi

$$L_{\sigma_n} \leq (M_1 + M_2 + M_3) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \leq (M_1 + M_2 + M_3)(b - a).$$

Donc il est borné et la courbe est rectifiable. Montrons à présent la formule (1.2). Puisque  $x'_i(t)$  sont continues sur  $[a, b]$  alors elles sont uniformément continues, alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta_1 > 0$  tel que

$$|x'_i(t) - x'_i(t')| < \frac{\epsilon}{9(b-a)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

pour tout  $|t - t'| < \delta_1$ . De même d'après la définition de l'intégrale de Riemann, il existe  $\delta_2 > 0$  tel que pour  $|t_i - t_{i-1}| < \delta_2$  on a

$$\left| \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |x'_i(\theta_i)|(t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad t_{i-1} \leq \theta_i \leq t_i. \quad (1.4)$$

Soit  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , d'après le lemme 1.4.1, comme la courbe est rectifiable alors il existe une subdivision  $\sigma_n$  telle que  $(t_i - t_{i-1}) < \delta$  et

$$|\ell - L_{\sigma_n}| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.5)$$

Estimons à présent la quantité

$$\begin{aligned} \left| \ell - \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt \right| &\leq |\ell - L_{\sigma_n}| + \left| L_{\sigma_n} - \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| - \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt \right| \\ &= \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^n |x'_1(t'_i)\mathbf{e}_1 + x'_2(t''_i)\mathbf{e}_2 + x'_3(t'''_i)\mathbf{e}_3| (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt \right| \end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant la quantité  $\sum_{i=1}^n |\mathbf{x}'(t_i)|(t_i - t_{i-1})$  et en utilisant (1.4) on obtient

$$\begin{aligned} \left| \ell - \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt \right| &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^n [|x'_1(t'_i)\mathbf{e}_1 + x'_2(t''_i)\mathbf{e}_2 + x'_3(t'''_i)\mathbf{e}_3| - |\mathbf{x}'(t_i)|] (t_i - t_{i-1}) \right| + \\ &\quad \left| \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt \right| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \sum_{i=1}^n \left| |x'_1(t'_i)\mathbf{e}_1 + x'_2(t''_i)\mathbf{e}_2 + x'_3(t'''_i)\mathbf{e}_3| - |\mathbf{x}'(t_i)| \right| (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$  on obtient

$$\begin{aligned} \left| \ell - \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt \right| &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \sum_{i=1}^n (|x'_1(t'_i) - x'_1(t_i)| + |x'_2(t''_i) - x'_2(t_i)| \\ &\quad + |x'_3(t'''_i) - x'_3(t_i)|) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \epsilon. \end{aligned}$$

Dans la ligne ci-dessus nous avons utilisé l'inégalité (1.3). Comme  $\epsilon$  est arbitraire cette dernière inégalité implique (1.2).  $\square$

### Exemple 1.4.3

*La longueur d'un arc d'une hélice*

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t)\mathbf{e}_1 + (a \sin t)\mathbf{e}_2 + bt\mathbf{e}_3, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

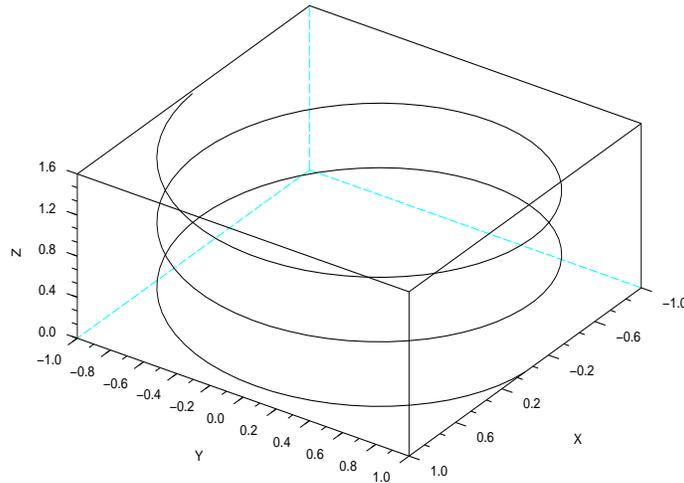


figure 1.5 : Une helice dont la base est le cercle de rayon  $a = 1$  et  $b = 2$  représenté par scilab avec `>param3d`

Nous allons considérer à présent la longueur d'arc comme un paramètre. Pour cela nous prenons  $\mathbf{x}(t)$  un arc paramétré régulier sur un intervalle  $I$ . Nous désignons par  $s(t)$  la fonction

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau, \quad t_0, t \in I. \quad (1.6)$$

Il est clair que si  $t > t_0$  alors  $s(t) > 0$  et si  $t < t_0$  alors  $s(t) < 0$  et ceci présente la longueur de courbe entre  $\mathbf{x}(t_0)$  et  $\mathbf{x}(t)$ . Comme  $\mathbf{x}(t)$  est régulière alors  $s(t)$  définie par (1.6) est de classe  $\mathcal{C}^1$  et on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|. \quad (1.7)$$

Ainsi d'après la définition 1.2.1,  $s(t)$  peut être considéré comme un changement de paramètre admissible.

#### Définition 1.4.2

Soit  $\mathbf{x} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une représentation paramétrique de classe  $\mathcal{C}^2$  d'une courbe. On suppose  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} \neq 0$  pour tout  $t \in I$ . Pour  $t_0$  fixé dans  $I$ , on appellera **abscisse curviligne** sur l'arc  $\mathbf{x}$ ,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right| d\tau.$$

Comme  $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| > 0$ , alors le théorème 1.2.1, l'application  $t \mapsto s(t)$  est un changement de paramètre admissible de  $I$  sur un intervalle  $J$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ . Ainsi on peut considérer la représentation  $s \mapsto \mathbf{x}(s)$  comme une représentation naturelle de la courbe  $\mathbf{x}$ .

## 1.5 Courbure

Dans la suite on peut considérer une courbe  $\mathbf{x} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit avec sa représentation paramétrique  $t \in I$  et dans ce cas nous noterons par

$$\mathbf{x}' := \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad \text{et par} \quad \mathbf{x}'' := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2},$$

soit avec sa représentation en abscisse curviligne  $s \in J$  et dans ce cas nous noterons par

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \text{et par} \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}.$$

### Définition 1.5.1

On appelle **vecteur unitaire tangent** à l'arc  $\mathbf{x}$ , le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}$ . C'est un vecteur qui est tangent à la courbe  $\mathbf{x}$  et sa module est égale à 1.

En effet, comme

$$\dot{\mathbf{x}} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(s + \Delta s) - \mathbf{x}(s)}{\Delta s}$$

et que le vecteur  $\frac{\mathbf{x}(s + \Delta s) - \mathbf{x}(s)}{\Delta s}$  est toujours sécant à la courbe  $\mathbf{x}$ , pour  $\Delta s \neq 0$ , ainsi que montre la figure 1.6.

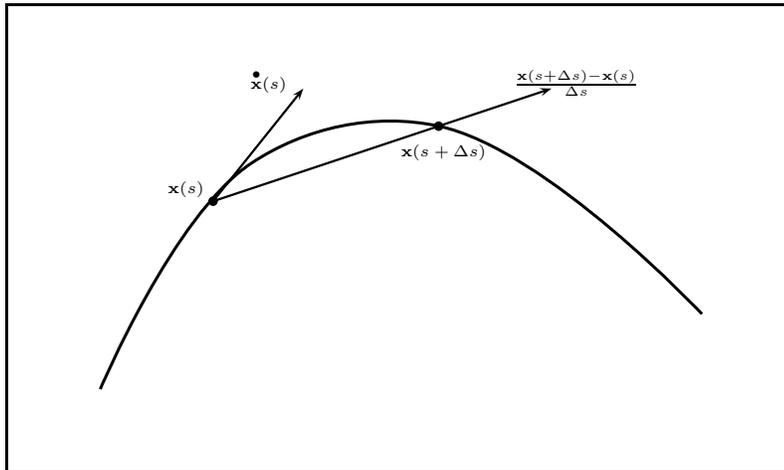


Figure. 1.6

Lorsque  $\Delta s \rightarrow 0$ , ce vecteur tend vers la tangente à la courbe. De plus comme  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(s(t))$ , alors  $\mathbf{x}'(t) = (\dot{\mathbf{x}}(s))ds/dt$  et d'après (1.7), le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}$  qui sera désigné par

$$\mathbf{t} := \dot{\mathbf{x}}(s) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|},$$

est un vecteur unitaire.

Le vecteur  $\mathbf{t}$  peut être considéré soit en variable  $t$ , comme  $\mathbf{t}(t) := \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|}$ , soit en variable  $s$ , comme  $\mathbf{t}(s) := \dot{\mathbf{x}}(s)$ . Dans tous les cas  $\{\mathbf{x}_0 + k\mathbf{t} \mid k \in \mathbb{R}\}$  définit une droite passant par  $\mathbf{x}_0$  qui est colinéaire au vecteur  $\mathbf{t}$ . Le plan perpendiculaire à cette droite au point  $\mathbf{x}_0$  s'appelle **plan normal** à la courbe au point  $\mathbf{x}_0$  et il est défini par l'ensemble des points  $\mathbf{y}$  tels que

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t} = 0.$$

Puisque  $\mathbf{x}'(t)$  est colinéaire avec  $\mathbf{t}$ , alors l'équation du plan normal est

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}' = 0. \quad (1.8)$$

### Définition 1.5.2

Parmi les vecteur du plan normal il existe un qui bénéficie d'une importance particulière. Il appelle **vecteur de la courbure** au point  $\mathbf{x}_0$  et il est défini de la façon suivante : Si  $\mathbf{x}$  est un arc de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors le vecteur de la courbure est défini par

$$\mathbf{k}(s) = \frac{\mathbf{t}(s)}{ds} = \dot{\mathbf{t}}(s) = \ddot{\mathbf{x}}(s). \quad (1.9)$$

La valeur absolue du vecteur de la courbure s'appelle **courbure** de  $\mathbf{x}$  au point  $\mathbf{x}(s)$  et on la désigne par  $|\mathbf{k}(s)|$ . L'inverse de la courbure

$$\rho = |\mathbf{k}(s)|^{-1}. \quad (1.10)$$

s'appelle **rayon de la courbure** et finalement si en un point la courbure est nulle, alors ce point s'appelle **point d'inflexion**.

Le vecteur de la courbure  $\mathbf{k}$  est toujours situé dans le plan normal, car comme le vecteur tangent  $\mathbf{t}$  vérifie  $|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ , en dérivant par rapport à  $s$ , on a

$$\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}} = 2\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}} = 0,$$

d'où  $\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}}$  est orthogonal à  $\mathbf{t}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{k}$  est dans le plan normal.

### Exemple 1.5.1

Reprenons l'Exemple 1.4.3 et calculons la courbure de cet arc.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1.11)$$

d'où

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1/2} (-a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3) \quad (1.12)$$

et

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|} = -\frac{a(\cos t\mathbf{e}_1 + \sin t\mathbf{e}_2)}{a^2 + b^2}.$$

Remarquons que le vecteur  $\mathbf{k}$  est parallèle au plan  $x_1x_2$  et dirigé vers l'origine et la courbure est la constante

$$|\mathbf{k}| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Pour  $b = 0$ , l'hélice devient un cercle et le rayon de sa courbure est exactement le rayon du cercle  $a$ .

### Théorème 1.5.1

Soit  $\mathbf{x}(t)$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^2$  alors sa courbure est égale à  $|\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''|/|\mathbf{x}'|^3$  où  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  est le produit vectoriel de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

*Preuve.* Tout d'abord rappelons que si les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  font un angle de  $\theta$ , i.e.  $\theta = \arccos(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / (|\mathbf{x}||\mathbf{y}|))$ , alors

$$|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \sin \theta. \quad (1.13)$$

Comme

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{\mathbf{x}}s', \quad \mathbf{x}'' = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}s') = \dot{\mathbf{x}}s'' + (s')^2 \ddot{\mathbf{x}}.$$

d'où

$$\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'' = (\dot{\mathbf{x}}s') \wedge (\dot{\mathbf{x}}s'' + (s')^2 \ddot{\mathbf{x}}) = (s')^3 (\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}).$$

Par conséquent, comme  $s' = ds/dt = |\mathbf{x}'|$  on a

$$|\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''| = |\mathbf{x}'|^3 |\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}| = |\mathbf{x}'|^3 |\dot{\mathbf{x}}||\ddot{\mathbf{x}}| \sin \theta,$$

où  $\theta$  est l'angle entre les vecteurs  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{t}$  et  $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{t}}$  qui sont orthogonaux, donc  $\sin \theta = 1$ . Finalement comme  $|\dot{\mathbf{x}}| = 1$  et  $|\ddot{\mathbf{x}}| = |\dot{\mathbf{t}}| = |\mathbf{k}|$ , on obtient

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''|/|\mathbf{x}'|^3.$$

□

## 1.6 Vecteur normal principal et la courbure signée

Considérons  $\mathcal{C}$  une courbe de classe  $\geq 2$  de sorte que le vecteur de courbure  $\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{x}}$  varie continûment le long de la courbe  $\mathcal{C}$ . Si on veut définir le vecteur unitaire dans la direction de  $\mathbf{k}$  à savoir  $\mathbf{u}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , on heurte à un problème : En un point d'inflexion lorsque  $\mathbf{k}$  devient nul, ce vecteur n'est plus défini. Alors pour pallier ce problème on regarde la nature du point d'inflexion. ou bien c'est un point d'inflexion essentiel, c'est-à-dire, si pour  $s = s_0$ ,  $\mathbf{k}(s_0) = 0$ , il n'y a pas de moyen pour raccorder  $\mathbf{u}_k(s_0 - \epsilon)$  avec

$\mathbf{u}_k(s_0 + \epsilon)$ . Comme on verra dans l'exemple suivant, dans ce cas on abandonne le problème et on dit que le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_k$  n'est pas défini en ce point. Mais il existe aussi des cas (comme on verra dans Exemple 1.6.2, où en multipliant  $\mathbf{u}_k$  par un signe  $+$  ou  $-$  dans le côté  $] -\infty, s_0[$  ou  $]s_0, +\infty[$ , on arrive à assurer la continuité de  $\mathbf{u}_k$ . Dans ce cas on définit le *vecteur normal principal*, le vecteur  $\mathbf{n}(s) = \pm \mathbf{u}_k(s)$  selon qu'on a changé le signe de  $u_k$  ou non. Il faut toujours s'assurer que  $\mathbf{n}(s)$  soit continue.

### Exemple 1.6.1

Considérons

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} t\mathbf{e}_1 + e^{-1/t^2}\mathbf{e}_3, & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ t\mathbf{e}_1 + e^{-1/t^2}\mathbf{e}_2, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On a vu que la courbe  $\mathbf{x}(t)$  est non seulement continue mais de classe  $C^\infty$  et de plus comme  $\mathbf{x}''$  et  $\ddot{\mathbf{x}}$  sont colinéaires et  $\mathbf{u}_k$  est unitaire, alors

$$\mathbf{u}_k(t) = \begin{cases} \mathbf{e}_3, & \text{si } t < 0, \\ \mathbf{e}_2, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Alors le point  $t = 0$  est un point d'inflexion essentiel.

### Exemple 1.6.2

Considérons la courbe  $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{e}_2$ ,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \sqrt{1+t^4}, \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \frac{\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2}{\sqrt{1+t^4}}$$

et

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \frac{-2t(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{(1+t^4)^2}.$$

Calculons à présent  $\mathbf{u}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  le vecteur unité de  $\mathbf{k}$  au point  $t = 0$  qui annule  $\mathbf{k}$ , dont c'est un point d'inflexion.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}_k = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{\sqrt{1+t^4}} = \mathbf{e}_2,$$

tandis que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \mathbf{u}_k = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{\sqrt{1+t^4}} = -\mathbf{e}_2,$$

Nous définissons à présent le vecteur  $\mathbf{n}$  par :

$$\mathbf{n} = \begin{cases} -\mathbf{k}/|\mathbf{k}| & \text{si } t < 0 \\ \mathbf{e}_2 & \text{si } t = 0 \\ \mathbf{k}/|\mathbf{k}| & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On remarque que dans tous les cas  $\mathbf{n} = -(1+t^4)^{-1/2}(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$  donc il varie continûment le long de la courbe.

### Définition 1.6.1

Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal principal de la courbe  $\mathbf{x}(s)$ , continue en  $s$ , alors il est possible de trouver une fonction continue  $\kappa(s)$  telle que

$$\mathbf{k}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Cette fonction s'appelle **courbure signée** de  $\mathbf{x}$ . En multipliant scalairement (1.14) par  $\mathbf{n}$  on obtient

$$\kappa(s) = \mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{n}(s). \quad (1.14)$$

Nous remarquons que si le vecteur  $\mathbf{n}$  est dans la direction de  $\mathbf{k}$ , alors  $\kappa(s) = |\mathbf{k}(s)|$  et si  $\mathbf{n}$  est dans la direction opposée, on a  $\kappa(s) = -|\mathbf{k}(s)|$ , ce qui justifie la terminologie courbure signée.

Dans Exemple 1.6.1 la courbure signée de  $\mathbf{x}(t)$  est

$$\begin{aligned} \kappa &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = [-2t(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)(1+t^4)^{-2}] \cdot [-(1+t^4)^{-1/2}(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)] \\ &= 2t(1+t^4)^{-3/2}. \end{aligned}$$

## 1.7 Trièdre de Frenet

Avant de donner la définition du trièdre de Frenet nous allons rappeler quelques notions élémentaires d'algèbre vectorielle. On se place dans  $\mathbb{R}^3$ .

### Définition 1.7.1

On appelle **produit mixte** de trois vecteurs  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$ , noté  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ , défini par :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Soient  $\mathbf{a}$  un point dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs linéairement indépendants. Par une **représentation paramétrique d'un plan** passant par  $\mathbf{a}$  et parallèle à  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  nous désignons un élément d'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x}$  qui peut être représenté par :

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \mathbf{a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

ou bien, si  $\mathbf{n} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  est un vecteur orthogonal au plan, par :

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad [\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0.$$

**Définition 1.7.2**

Soit  $\mathbf{x}(s)$  une courbe  $\mathcal{C}$  régulière de classe  $\geq 2$  donnée en paramètre curviligne. En chaque point de  $\mathcal{C}$  on a défini deux vecteurs unitaires orthonormaux  $\mathbf{t}(s)$  et  $\mathbf{n}(s)$  continus par rapport à  $s$ . Le plan passant par ces deux vecteurs au point  $\mathbf{x}(s)$  s'appelle **plan osculateur** et il est défini par sa représentation paramétrique

$$[\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{n}] = 0.$$

On considère le vecteur  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ , ce vecteur est perpendiculaire au plan osculateur et il est continu et unitaire, car  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{t}||\mathbf{n}| \sin \pi/2 = 1$ . Ce vecteur s'appelle le vecteur **binormal**. Le plan passant par  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{b}$  s'appelle **plan normal** et celui passant par  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{t}$  est appelé **plan rectifiant**. Le triplet  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  définit un repère appelé **trièdre de Frenet** ou **trièdre mobile** et ses trois plans sont donnés par les représentations

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} &= 0 && \text{Plan normal} \\ (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{Plan rectifiant} \\ (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} &= 0 && \text{Plan osculateur} \end{aligned}$$

Remarquons que ce trièdre est orienté en chaque point de  $\mathcal{C}$  d'une manière différente.

**Exemple 1.7.1**

Reprenons l'exemple 1.5.1. Nous avons calculé

$$\mathbf{k} = -\frac{a(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad |\mathbf{k}| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Or,  $|\mathbf{k}|$  ne s'annule jamais sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\mathbf{u}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| = \mathbf{n} = -(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)$ . et l'équation du plan rectifiant au point  $t = t_0$  est  $(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{n}(t_0) = 0$ , c'est-à-dire

$$y_1 \cos(t_0) + y_2 \sin t_0 = a.$$

Le vecteur tangent est donc

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}'/|\mathbf{x}'| = (a^2 + b^2)^{-1/2} ((-a \sin t) \mathbf{e}_1 + (a \cos t) \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3).$$

Ainsi l'équation du plan normal au point  $t = t_0$  est  $(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{t}(t_0) = 0$ , c'est-à-dire

$$-ay_1 \sin t_0 + ay_2 \cos t_0 + by_3 = b^2 t_0.$$

Le vecteur binormal est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & -a(a^2 + b^2)^{-1/2} \sin t & -\cos t \\ \mathbf{e}_2 & a(a^2 + b^2)^{-1/2} \cos t & -\sin t \\ \mathbf{e}_3 & b(a^2 + b^2)^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a^2 + b^2)^{-1/2} ((b \sin t) \mathbf{e}_1 - (b \cos t) \mathbf{e}_2 + a \mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Alors l'équation du plan osculateur au point  $t = t_0$  est  $(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t_0) = 0$ , c'est-à-dire

$$b \sin t_0 y_1 - b \cos t_0 y_2 + a y_3 = a b t_0.$$

## 1.8 Torsion

Supposons  $\mathbf{x}(s)$  une courbe de classe  $\geq 3$ , le long laquelle  $\mathbf{n}(s)$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ . Comme  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$  en le dérivant on a

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \dot{\mathbf{n}}(s) = \kappa(s)[\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{n}(s)] + \mathbf{t}(s) \wedge \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \dot{\mathbf{n}}(s) \quad (1.15)$$

Comme  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire, le vecteur  $\dot{\mathbf{n}}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{n}$ , donc c'est un vecteur parallèle au plan rectifiant, qui s'écrit sous la forme

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \mu(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s).$$

En le substituant dans (1.15), on aura

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge [\mu(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)] = \tau(s)[\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{b}(s)]$$

d'où

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \quad \text{ou bien} \quad \tau = -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n}(s). \quad (1.16)$$

La fonction continue  $\tau$  définie par (1.16) s'appelle *la seconde courbure* ou *torsion*.

La torsion est une propriété intrinsèque de la courbe, c'est-à-dire elle est indépendante du sens de  $\mathbf{n}$  et l'orientation de  $\mathcal{C}$ . En effet, si  $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$ , alors  $\mathbf{b}^* = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}^* = -\mathbf{b}$  et d'après (1.16)

$$\tau^* = -\dot{\mathbf{b}}^* \cdot \mathbf{n}^* = -(-\dot{\mathbf{b}}) \cdot (-\mathbf{n}) = \tau.$$

Ainsi on a démontré que  $\tau$  est indépendante du sens de  $\mathbf{n}$ . Montrons qu'elle est aussi indépendante de l'orientation de  $\mathcal{C}$ . On suppose  $s = -s^* + \text{const.}$ , alors  $\mathbf{t}^* = -\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{b}^* = \mathbf{t}^* \wedge \mathbf{n} = -(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) = -\mathbf{b}$  et

$$\frac{d\mathbf{b}^*}{ds^*} = \frac{d\mathbf{b}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \frac{d\mathbf{b}}{ds}$$

et on obtient de nouveau

$$\tau^* = -\frac{\mathbf{b}^*}{ds^*} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{n} = \tau.$$

Ainsi que la courbure donnée par

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \quad (1.17)$$

mesure la variation du vecteur tangent  $\mathbf{t}$ , la torsion mesure la variation du vecteur binormal  $\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$ . Ceci justifie le théorème suivant

**Théorème 1.8.1**

Si une courbe est de classe  $\geq 3$  pour laquelle  $\mathbf{n} \in \mathcal{C}^1$ , alors cette courbe est plane si et seulement si la torsion est identiquement nulle.

*Preuve.* Comme  $\tau(s) \equiv 0$ , alors  $\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) = 0$ , d'où le vecteur binormal  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$  est un vecteur constant. Considérons

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{b}_0) = \dot{\mathbf{x}}(s) \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}_0.$$

Comme  $\mathbf{t}(s)$  et  $\mathbf{b}_0$  sont orthogonaux,  $\frac{d}{ds}(\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{b}_0) = 0$  et en intégrant on trouve

$$\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{b}_0 = \text{const.} \quad (1.18)$$

C'est-à-dire  $\mathbf{x}(s)$  est dans un plan défini par (1.18).

Réciproquement, si  $\mathbf{x}(s)$  se trouve dans un plan qui va être nécessairement le plan osculateur, on a  $\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0$ . En la dérivant on trouve  $\mathbf{x}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}(s) = 0$ , ou bien  $\tau(s)\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}(s) = 0$  pour tout  $s$ , donc  $\tau(s) = 0$  pour tout  $s$ , car  $|\mathbf{n}(s)| = 1$  et  $\mathbf{x}(s)$  peut être nul quand un nombre fini de points et comme  $\tau(s)$  est continue  $\tau(s) \equiv 0$ . □

**Théorème 1.8.2**

Considérons  $\mathbf{x}(t)$  une courbe paramétrée de classe  $\geq 3$ , alors en un point où  $\kappa \neq 0$ , la torsion de la courbe est donnée par

$$\tau = \frac{[\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''']}{|\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''|^2}. \quad (1.19)$$

*Preuve.* 1<sup>o</sup> *étape* : Montrons que

$$[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}] = \frac{[\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''']}{|\mathbf{x}'|^6}. \quad (1.20)$$

Soit  $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$ , alors

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \mathbf{x}' \dot{t}, \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{x}' \dot{t}) = \mathbf{x}' \ddot{t} + \left(\frac{d}{ds} \mathbf{x}'\right) \dot{t} = \mathbf{x}' \ddot{t} + \mathbf{x}''(\dot{t})^2, \\ \dddot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{x}' \ddot{t} + \mathbf{x}''(\dot{t})^2) = \mathbf{x}' \dddot{t} + 3\mathbf{x}''(\dot{t})(\ddot{t}) + \mathbf{x}'''(\dot{t})^3. \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}] &= (\mathbf{x}' \dot{t}) \cdot \left( (\mathbf{x}' \ddot{t} + \mathbf{x}''(\dot{t})^2) \wedge (\mathbf{x}' \dddot{t} + 3\mathbf{x}''(\dot{t})(\ddot{t}) + \mathbf{x}'''(\dot{t})^3) \right) \\ &= (\dot{t})^6 [\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''] \end{aligned}$$

car  $[\mathbf{x}', \mathbf{x}', \mathbf{a}] = [\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'] = [\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''] = 0$ , pour tout vecteur  $\mathbf{a}$ . Par conséquent on obtient (1.20).

2<sup>o</sup> *étape* : Montrons que

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\kappa^2 \mathbf{t} + \dot{\kappa} \mathbf{n} + \tau \kappa \mathbf{b}. \quad (1.21)$$

Dérivons  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$  par rapport à  $s$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \kappa \dot{\mathbf{n}} + \dot{\kappa} \mathbf{n} = \kappa \frac{d}{ds} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) + \dot{\kappa} \mathbf{n} = \kappa (\mathbf{b} \wedge \dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{t}) + \dot{\kappa} \mathbf{n},$$

comme  $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$  et  $\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$ , on obtient ainsi

$$\ddot{\mathbf{x}} = \kappa^2 (\mathbf{b} \wedge \mathbf{n}) - \kappa \tau (\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) + \dot{\kappa} \mathbf{n},$$

ce qui est équivalent à (1.21).

3<sup>o</sup> *étape* : Montrons que

$$[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}] = \kappa^2 \tau. \quad (1.22)$$

D'après (1.21) on a

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}} &= \kappa \mathbf{n} \wedge (-\kappa^2 \mathbf{t} + \dot{\kappa} \mathbf{n} + \tau \kappa \mathbf{b}) \\ &= -\kappa^3 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) + \kappa \dot{\kappa} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}) + \tau \kappa^2 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{b}) \\ &= \kappa^3 \mathbf{b} + \tau \kappa^2 \mathbf{t}. \end{aligned}$$

En multipliant ceci scalairement par  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{t}$  on obtient (1.22).

**Conclusion** : D'après Théorème 1.5.1,  $|\kappa| |\mathbf{x}'|^3 = |\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''|$ . Donc en utilisant respectivement (1.22) et (1.20), on aura

$$\tau = \frac{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]}{\kappa^2} = \frac{[\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''']}{\kappa^2 |\mathbf{x}'|^6} = \frac{[\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''']}{|\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''|^2}.$$

□

### Exemple 1.8.1

Reprenons Exemple 1.4.3 où

$$\mathbf{x} = (a \cos t) \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3.$$

Nous avons calculé dans Exemple 1.7.1

$$\mathbf{b} = (a^2 + b^2)^{-1/2} ((b \sin t) \mathbf{e}_1 - (b \cos t) \mathbf{e}_2 + a \mathbf{e}_3).$$

Alors l'équation de  $\dot{\mathbf{b}}$  est

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1} ((b \cos t) \mathbf{e}_1 + (b \sin t) \mathbf{e}_2).$$

Ainsi la torsion est une constante

$$\tau = -\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

## 1.9 Système de Serret-Frenet

Le long d'une courbe  $\mathbf{x}(s)$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  les vecteurs d'un repère de Frenet,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{b}$  satisfont le système

$$(SSF) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n} \end{cases}$$

Les première et troisième équations de ce système sont déjà données par (1.17) et (1.16). La seconde équation s'obtient en dérivant  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ ,

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \dot{\mathbf{t}} = -\tau \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b} \wedge \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Si on écrit ce système sous la forme  $\dot{\Phi} = \Omega \Phi$ , avec  $\Phi = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})^t$  et  $\Omega$  la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice  $\Omega$  est anti-symétrique et d'après la proposition suivant on a  $\dot{\Phi} = \Phi \wedge \boldsymbol{\omega}$ , où  $\boldsymbol{\omega} = (\tau, 0, \kappa)^t$ .

### Proposition 1.9.1

Soit  $\Omega$  une matrice anti-symétrique de la forme

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout  $\mathbf{x}$  on a  $\Omega \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}$ , où  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^t$ .

*Preuve.* Il suffit de remarquer que

$$\Omega \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\Omega \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}.$$

□

Le vecteur  $\boldsymbol{\omega} = (\tau, 0, \kappa)^t$ , s'appelle le *vecteur intrinsèque* de la courbe  $\mathbf{x}(s)$ . En effet, si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^*$  sont deux courbes telles que leurs vecteurs  $\boldsymbol{\omega}$  et  $\boldsymbol{\omega}^*$  vérifient  $\kappa(s) = \kappa^*(s)$  et  $\tau(s) = \tau^*(s)$  alors  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^*$  sont identiques sauf peut-être leurs positions dans l'espace.

Les trois vecteurs intrinsèques que l'on connaît jusqu'à présent sont les suivants :

- $\omega = 0$  représente une ligne droite.
- $\omega = (0, 0, \kappa = cte \neq 0)$  représente un cercle de rayon  $1/|\kappa|$ .
- $\omega = (\tau = cte \neq 0, 0, \kappa = cte \neq 0)$  représente une hélice circulaire cylindrique de rayon  $|\kappa|/(\tau^2 + \kappa^2)$  et  $b = \tau/(\tau^2 + \kappa^2)$ .

**Théorème 1.9.1 (Théorème d'existence et unicité pour le système de Serret-Frenet)**

Soient  $\kappa(s)$  et  $\tau(s)$  deux fonctions continues dans  $0 \leq s \leq a$ . Alors il existe une et une seule courbes  $\mathcal{C}$ , sauf peut-être sa position dans l'espace, telle que  $\kappa(s)$  est sa courbure et  $\tau(s)$  est sa torsion avec  $s$  son abscisse curviligne.

**Preuve. Unicité :** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^*$  deux courbes dans l'espace telles que  $\kappa(s) = \kappa^*(s)$  et  $\tau(s) = \tau^*(s)$ . Soient  $\mathbf{x}(s_0)$  et  $\mathbf{x}^*(s_0)$  deux points dans l'espace. Si ces deux points sont distincts par une translation on peut les coïncider et par une rotation on peut faire confondre les trièdres  $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$  et  $(\mathbf{t}_0^*, \mathbf{n}_0^*, \mathbf{b}_0^*)$  de Frenet associés. Montrons d'abord que  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) \equiv (\mathbf{t}^*(s), \mathbf{n}^*(s), \mathbf{b}^*(s))$  en tout point  $s \in [0, a]$ , pour cela dérivons les produits scalaires  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^*$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^*$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^*$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^*) &= \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t}^* + \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}}^* = \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^* + \kappa^* \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}^* \\ &= \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^* + \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}^*). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^*) &= \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}}^* = (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{n} \cdot (-\kappa^* \mathbf{t}^* + \tau^* \mathbf{b}^*) \\ &= -\kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^*) + \tau(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}^*). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^*) &= \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{b}^* + \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{b}}^* = (-\tau \mathbf{n}) \cdot \mathbf{b}^* + \mathbf{b} \cdot (-\tau^* \mathbf{n}^*) \\ &= -\tau(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}^* + \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}^*). \end{aligned}$$

En additionnant ces trois égalités on trouve que

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^*) = 0.$$

Ce qui donne

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* = \text{const.}$$

Comme au point  $s_0$  on a  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0^*$ ,  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_0^*$  et  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0^*$ , alors au point  $s_0$  et tout point  $s$ , on aura

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* = 3. \quad (1.23)$$

Chaque vecteur dans cette identité est unitaire donc chaque terme, par exemple,

$$-1 \leq \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* = \cos \theta_t \leq 1,$$

où  $\theta_t$  est l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{t}^*$ . En utilisant cette propriété dans (1.23), on obtient

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* = 1, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* = 1,$$

ainsi pour tout  $s \in [0, a]$  on aura  $\mathbf{t} = \mathbf{t}^*$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^*$ , et  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$ . Finalement, puisque  $\dot{\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{t}}^* = \dot{\mathbf{x}}^*$ , on en déduit que  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}^*(s) + \text{const.}$  et comme  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}^*(s_0)$ , alors  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}^*(s)$  pour tout  $s \in [0, a]$  ce qui montre que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^*$  coïncident.

**Existence** : Le système de Serret-Frenet est constitué de neuf équations

$$\dot{t}_i = \kappa n_i, \quad \dot{n}_i = -\kappa t_i + \tau b_i, \quad \dot{b}_i = -\tau n_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

avec neuf conditions initiales

$$\mathbf{t}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est un système différentiel linéaire homogène à coefficients continus qui admet d'après la théorie des systèmes linéaires une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $[0, a]$ . Nous devons à présent montrer que cette solution  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  est un système orthonormal direct en tout point  $s \in [0, a]$ . Pour cela nous allons désigner par

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})(s), & \beta(s) &= (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})(s), & \gamma(s) &= (\mathbf{t} \cdot \mathbf{b})(s) \\ \delta(s) &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(s), & \lambda(s) &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})(s), & \mu(s) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})(s) \end{aligned}$$

D'après les équations de **(SSF)**, les six inconnues  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$  et  $\mu$  vérifient le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(s) = 2\kappa\beta, & \dot{\beta}(s) = \kappa\delta - \kappa\alpha + \tau\gamma, & \dot{\gamma}(s) = \kappa\lambda - \tau\beta, \\ \dot{\delta}(s) = -2\kappa\beta + 2\tau\lambda, & \dot{\lambda}(s) = -\kappa\gamma + \tau\mu - \tau\delta, & \dot{\mu}(s) = -2\tau\lambda \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\alpha(0) = 1, \quad \beta(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0, \quad \delta(0) = 1, \quad \lambda(0) = 0, \quad \mu(0) = 1.$$

Encore les coefficients étant continus on a une seule solution dans  $[0, a]$ , comme les fonctions constantes

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1, \quad \lambda \equiv 0, \quad \mu \equiv 1$$

répondent au système d'après l'unicité, c'est la solution du système, ce qui montre que le système  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  est orthonormal. Pour voir le fait qu'il soit direct, on remarque que au point  $s = 0$  il est direct, donc d'après la continuité il est toujours direct. Finalement, d'après la première et la troisième équations du système **(SSF)**,  $\kappa$  et  $\tau$  sont les courbure et torsion du système.  $\square$

Lorsque la courbe  $\mathcal{C}$  est plane, c'est-à-dire  $\tau = 0$ , la résolution du système de Serret-Frenet est beaucoup plus simple. En effet, le vecteur unitaire  $\mathbf{t}$  s'écrit dans les coordonnées cartésiennes comme

$$\mathbf{t} = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2.$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  orthogonal à  $\mathbf{t}$  serait

$$\mathbf{n} = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2.$$

En dérivant ces vecteurs, on obtient

$$\dot{\mathbf{t}} = \dot{\phi} \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{n}} = -\dot{\phi} \mathbf{t}.$$

En les comparant avec les équations du système **(SSF)**, les fonctions de courbure et torsion seront  $\kappa(s) = \dot{\phi}(s)$  et  $\tau \equiv 0$  et ainsi on peut écrire

$$\phi = \int \kappa ds + c_1$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \int \mathbf{t} ds + \mathbf{c}_2 \\ &= \int [\cos \phi(s) \mathbf{e}_1 + \sin \phi(s) \mathbf{e}_2] ds + \mathbf{c}_2 \\ &= \int [\cos \phi(s) \mathbf{e}_1 + \sin \phi(s) \mathbf{e}_2] \frac{ds}{d\phi} d\phi + \mathbf{c}_2 \\ &= \int \frac{1}{\kappa(s)} [\cos \phi(s) \mathbf{e}_1 + \sin \phi(s) \mathbf{e}_2] d\phi + \mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

### Exemple 1.9.1

Résolvons le système de Serret-Frenet avec  $\kappa(s) = 1/s$  et  $\tau = 0$  pour  $s > 0$ . D'après la remarque précédente  $\kappa(s) = \dot{\phi}(s) = 1/s$ , d'où  $\phi = \ln s + c_1$  ou bien  $s = e^{\phi - c_1}$  et  $\kappa = e^{-\phi + c_1}$ .

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \int \frac{1}{\kappa(s)} [\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2] d\phi + \mathbf{c}_2 \\
 &= \int e^{\phi - c_1} [\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2] d\phi + \mathbf{c}_2 \\
 &= \frac{1}{2} e^{\phi - c_1} [(\cos \phi + \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (\sin \phi - \cos \phi) \mathbf{e}_2] + \mathbf{c}_2 \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\phi - c_1} [(\cos(\phi(s) - \pi/4)) \mathbf{e}_1 + (\sin(\phi(s) - \pi/4)) \mathbf{e}_2] + \mathbf{c}_2.
 \end{aligned}$$

En choisissant  $\theta = \phi - \pi/4$ ,  $c_1 = \pi/4$  et  $\mathbf{c}_2 = 0$ , on obtient

$$\mathbf{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\theta} [(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta) \mathbf{e}_2].$$

Ainsi dans les coordonnées polaires cette courbe est donnée par  $r = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\theta}$ , appelée *spirale logarithmique*.

## 1.10 Développante et développée d'une courbe

### Définition 1.10.1

L'ensemble des tangentes à une courbe  $\mathcal{C}$  forme une surface appelée **surface tangente à une courbe**. La courbe  $\mathcal{C}^*$  qui est sur cette surface et qui est orthogonale à toute ces tangentes s'appelle la **développante** à la courbe  $\mathcal{C}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  est la **développée** de la courbe  $\mathcal{C}^*$

Alors si la courbe  $\mathcal{C}$  est donnée par sa représentation curviligne  $\mathbf{x}(s)$  et la courbe  $\mathcal{C}^*$  qui croise la tangente  $\mathbf{t}(s)$  au point  $\mathbf{x}^*$ , le vecteur  $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(s)$  est proportionnel à  $\mathbf{t}(s)$ , autrement dit

$$\mathbf{x}^*(s) = \mathbf{x}(s) + k(s)\mathbf{t}(s).$$

De plus sur une développante le vecteur tangente

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \dot{\mathbf{x}} + \dot{k}\mathbf{t} + k\dot{\mathbf{t}} = (1 + \dot{k})\mathbf{t} + k\kappa\mathbf{n}$$

est orthogonal à  $\mathbf{t}$ . Ce qui implique

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \cdot \mathbf{t} = (1 + \dot{k})\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + k\kappa\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = (1 + \dot{k}) = 0.$$

En intégrant par rapport à  $s$  on a  $k(s) = -s + c$ , ainsi pour chaque valeur de la constante  $c$  on a une développante donnée par

$$\mathbf{x}^*(s) = \mathbf{x}(s) + (c - s)\mathbf{t}(s).$$

La valeur de  $\mathbf{x}^*$  n'est pas définie en un point d'inflexion, en effet

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \dot{\mathbf{x}} + (c-s)\dot{\mathbf{t}} - \mathbf{t} = (c-s)\dot{\mathbf{t}}$$

et comme en un point d'inflexion  $\dot{\mathbf{t}} = 0$  le vecteur unitaire  $\mathbf{t}^*$  n'existe pas. Par ailleurs si on remplace  $\dot{\mathbf{t}}$  par  $\kappa\mathbf{n}$ , on trouve que  $\dot{\mathbf{t}}^* = 0$  lorsque  $\kappa = 0$ .

### Théorème 1.10.1

La courbure d'une développante  $\mathcal{C}^*$  de la courbe  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$(\kappa^*)^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c-s)^2\kappa^2}. \quad (1.24)$$

*Preuve.*

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \dot{\mathbf{x}} + (c-s)\dot{\mathbf{t}} - \mathbf{t} = (c-s)\kappa\mathbf{n}, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = |(c-s)\kappa|,$$

$$\mathbf{t}^* = \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = \text{sign}[(c-s)\kappa]\mathbf{n},$$

$$\frac{d\mathbf{t}^*}{ds} = \text{sign}[(c-s)\kappa]\dot{\mathbf{n}} = \text{sign}[(c-s)\kappa](-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}),$$

$$\frac{d\mathbf{t}^*}{ds^*} = \frac{d\mathbf{t}^*}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = \frac{-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}}{(c-s)\kappa}.$$

Ainsi

$$(\kappa^*)^2 = \left| \frac{d\mathbf{t}^*}{ds^*} \right|^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c-s)^2\kappa^2}.$$

□

L'équation  $\mathbf{x}^*(s) = \mathbf{x}(s) + k(s)\mathbf{t}$  montre que  $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}| = |k(s)\mathbf{t}| = |k(s)|$ , donc  $|k(s)| = |c-s|$  est la distance entre  $\mathbf{x}^*(s)$  où la courbe  $\mathcal{C}^*$  intersecte la tangente  $\mathbf{t}(s)$  au point  $\mathbf{x}(s)$ . Supposons  $\mathcal{C}_1^*$  et  $\mathcal{C}_2^*$  sont deux développantes de  $\mathcal{C}$  des équations  $\mathbf{x}_1^*(s) = \mathbf{x}(s) + (c_1-s)\mathbf{t}$  et  $\mathbf{x}_2^*(s) = \mathbf{x}(s) + (c_2-s)\mathbf{t}$  de sorte que  $c_1-s$  et  $c_2-s$  soient positifs. Alors la distance entre ces deux courbes est une constante égale à

$$|(c_1-s) - (c_2-s)| = |c_1 - c_2|.$$

Nous allons à présent renommer la courbes  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{C}^*$  et la courbe  $\mathcal{C}^*$  par  $\mathcal{C}$  de sorte que  $\mathcal{C}^*$  soit une développée de  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas le vecteur  $\mathbf{x}^*(s) - \mathbf{x}(s)$  sera orthogonal au vecteur tangent  $\mathbf{t}(s)$ , donc dans le plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ . D'où

$$\mathbf{x}^*(s) = \mathbf{x}(s) + \alpha(s)\mathbf{n} + \beta(s)\mathbf{b},$$

sera l'équation de la courbe développée. En dérivant par rapport à  $s$  on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} &= \dot{\mathbf{x}} + \dot{\alpha}\mathbf{n} + \alpha\dot{\mathbf{n}} + \dot{\beta}\mathbf{b} + \beta\dot{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{t} + \dot{\alpha}\mathbf{n} + \alpha(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + \dot{\beta}\mathbf{b} - \beta\tau\mathbf{n} \\ &= (1 - \alpha\kappa)\mathbf{t} + (\dot{\alpha} - \beta\tau)\mathbf{n} + (\dot{\beta} + \tau\alpha)\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Comme  $\frac{d\mathbf{x}^*}{ds}$  est aussi tangent à  $\mathcal{C}^*$  alors il est proportionnel à  $\mathbf{x}^*(s) - \mathbf{x}(s) = \alpha(s)\mathbf{n} + \beta(s)\mathbf{b}$ , alors il existe une fonction  $k(s)$  telle que

$$1 - \alpha\kappa = 0, \quad \dot{\alpha} - \beta\tau = k\alpha, \quad \dot{\beta} + \tau\alpha = k\beta.$$

La première équation donne  $\alpha = 1/\kappa$  et en éliminant  $k$  entre les deux dernières équations, on aura  $\beta(\dot{\alpha} - \beta\tau) - \alpha(\dot{\beta} + \tau\alpha) = 0$ , par conséquent

$$\tau = \frac{\beta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\beta}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Par ailleurs si  $\theta(s)$  est un angle tel que  $\cotan\theta = \beta/\alpha$ , alors en dérivant cette relation par rapport à  $s$ , on aura

$$\left(\frac{\dot{\beta}}{\alpha}\right) = \frac{\dot{\beta}\alpha - \beta\dot{\alpha}}{\alpha^2} = (\cotan\theta)' \dot{\theta} = -(1 + \cotan^2\theta) \dot{\theta} = -\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}\right) \dot{\theta},$$

d'où

$$\tau = \frac{\beta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\beta}}{\alpha^2 + \beta^2} = \dot{\theta} = \frac{d}{ds} \left( \operatorname{arccotan} \frac{\beta}{\alpha} \right);$$

En intégrant on obtient  $\beta = \alpha \cotan \left[ \int \tau ds + c \right]$  et comme  $\alpha = 1/\kappa$  alors l'équation générique d'une développée d'une courbe  $\mathcal{C}$  est

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} + \frac{1}{\kappa} \cotan \left[ \int \tau ds + c \right] \mathbf{b}. \quad (1.25)$$

### Exemple 1.10.1

Reprenons l'Exemple 1.4.3 et d'après (1.11) et (1.12)

$$s = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = (a^2 + b^2)^{1/2} t.$$

et les courbes développantes sont

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= \mathbf{x} + (c - s)\mathbf{t} \\ &= \left[ a \cos t - \frac{a(c - s) \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \mathbf{e}_1 + \left[ a \sin t + \frac{a(c - s) \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \mathbf{e}_2 + \left[ bt + \frac{b(c - s)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Notons  $\gamma = c(a^2 + b^2)^{-1/2}$ , comme  $t = s(a^2 + b^2)^{-1/2}$ ,

$$\mathbf{x}^* = a[(\cos t + t \sin t) - \gamma \sin t] \mathbf{e}_1 + a[(\sin t - t \cos t) + \gamma \cos t] \mathbf{e}_2 + b\gamma \mathbf{e}_3.$$

Remarquons que le coefficient de  $\mathbf{e}_3$  est constant, donc pour chaque valeur de  $\gamma$ , il existe une courbe développante confinée dans le plan  $x_3 = b\gamma$ .

Réciproquement si la courbe  $\mathcal{C}$  est une courbe plane, i.e.  $\tau = 0$ , alors l'équation (1.25), implique que une développée de  $\mathcal{C}$  a comme équation

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} + \frac{c}{\kappa} \mathbf{b}, \quad c = \text{constant.}$$

Comme le vecteur binormal  $\mathbf{b}$  est indépendant de  $s$ , alors la courbe développée de  $\mathcal{C}$  est confinée dans le plan osculateur.

## 1.11 Théorie de contact

Intuitivement il semble que pour une courbe donnée  $\mathcal{C}$  l'ensemble des plans qui coupe  $\mathcal{C}$  au point  $\mathbf{x}$  et ils contiennent aussi le vecteur tangent à la courbe au point  $\mathbf{x}$  ont un degré de *contact* plus grand que ceux qui ne contiennent pas le vecteur tangent et parmi ceux qui contiennent le vecteur  $\mathbf{t}$  le plan osculateur est celui qui a un degré maximum. Pour définir le degré de contact d'une surface  $S$  d'équation  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  qui intersecte la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ , on suppose que cette courbe intersecte la surface  $S$  en  $n - 1$  autres points  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{x}(t_{n-1})$  dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$ . Considérons la fonction  $f(t) = F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ . Il est clair que

$$\begin{aligned} f(t_0) &= F(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)) = 0 \\ f(t_1) &= F(x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)) = 0 \\ &\vdots = \vdots \\ f(t_{n-1}) &= F(x_1(t_{n-1}), x_2(t_{n-1}), x_3(t_{n-1})) = 0 \end{aligned}$$

Si on considère que la fonction  $f$  est de classe  $C^{(n)}$ , le théorème de Rolle implique qu'il existe  $t'_1, t'_2, \dots, t'_{n-1}$  avec  $t_0 \leq t'_1 \leq t_1$ ,  $t_1 \leq t'_2 \leq t_2$ ,  $\dots$ ,  $t_{n-2} \leq t'_{n-1} \leq t_{n-1}$ , tels que

$$f'(t'_1) = f'(t'_2) = \dots = f'(t'_{n-1}) = 0.$$

De nouveau appliquons le théorème de Rolle, alors qu'il existe  $t''_2, t''_3, \dots, t''_{n-1}$  avec  $t'_1 \leq t''_2 \leq t'_2$ ,  $t'_2 \leq t''_3 \leq t'_3$ ,  $\dots$ ,  $t'_{n-2} \leq t''_{n-1} \leq t'_{n-1}$ , tels que

$$f''(t''_2) = f''(t''_3) = \dots = f''(t''_{n-1}) = 0.$$

En continuant de cette façon on trouvera  $t_0, t'_1, t''_2, \dots, t_{n-1}^{n-1}$  tous dans un voisinage de  $t_0$  tels que

$$f(t_0) = f'(t'_1) = f''(t''_2) = \dots = f^{(n-1)}(t_{n-1}^{n-1}) = 0.$$

Supposons à présent que les points  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$ ,  $\dots, \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{x}(t_{n-1})$  s'approchent au point  $\mathbf{x}_0$ , lorsque les paramètres  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  tendent vers  $t_0$ , alors la famille des surfaces  $\{S\}$  converge vers une surface  $S^*$  de l'équation  $F^*(x_1, x_2, x_3) = 0$  et la fonction  $f^*(t) = F^*(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  qui est toujours de classe  $C^n$  vérifie à la limite

$$f^*(t_0) = f^{*'}(t_0) = f^{*''}(t_0) = \dots = f^{*(n-1)}(t_0) = 0.$$

d'où la définition

**Définition 1.11.1**

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de l'équation paramétrique  $\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$  qui est en contact avec la surface régulière  $S$  de l'équation  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  au point  $\mathbf{x}_0$ , alors ce contact est de **degré  $n$**  si la fonction  $f$  de classe  $C^n$  définie par  $f(t) = F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  vérifie

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(t_0) \neq 0.$$

**Théorème 1.11.1**

Le degré de contact d'une courbe avec une surface est indépendant de la paramétrisation de la courbe.

**Preuve.** Considérons

$$\mathbf{x}(\theta) = x_1^*(\theta)\mathbf{e}_1 + x_2^*(\theta)\mathbf{e}_2 + x_3^*(\theta)\mathbf{e}_3, \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$$

soient deux paramétrisations de la courbe  $\mathcal{C}$ , avec

$$x_i^*(\theta) = x_i(t(\theta)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Alors

$$\begin{aligned} g(\theta) &= F(x_1^*(\theta), x_2^*(\theta), x_3^*(\theta)) = F(x_1(t(\theta)), x_2(t(\theta)), x_3(t(\theta))) = f(t(\theta)) \\ g'(\theta) &= t' f'(t(\theta)) \\ g''(\theta) &= (t')^2 f''(t(\theta)) + t'' f'(t(\theta)) \end{aligned}$$

et d'une manière générale  $g^{(k)}(\theta)$  sera une combinaison linéaire de  $f^{(i)}(t(\theta))$ , pour  $i < k$ . Ainsi lorsque  $f^{(k)}(t_0) = f^{(k)}(t(\theta_0)) = 0$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n-1$  et  $f^{(n)}(t_0) = f^{(n)}(t(\theta_0)) \neq 0$ , on a de même  $g^{(k)}(t_0) = 0$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n-1$  et  $g^{(n)}(t_0) \neq 0$ .  $\square$

**Exemple 1.11.1**

Considérons la courbe  $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2 + t^3\mathbf{e}_3$ . Cette courbe est en contact avec la parabolöide  $x_1^2 + x_3^2 - x_2 = 0$  au point  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  et ce contact est de degré 6. En effet  $f(t) = t^2 + (t^3)^2 - t^2 = t^6$  et  $f'(t) = 6t^5$ ,  $f''(t) = 30t^4$ ,  $f^{(3)}(t) = 120t^3$ ,  $f^{(4)}(t) = 360t^2$ ,  $f^{(5)}(t) = 720t$ ,  $f^{(6)}(t) = 720$ . Donc  $f^{(k)}(0) = 0$ , pour  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  et  $f^{(6)}(0) \neq 0$ .

# Chapitre 2

## Les surfaces

### 2.1 Représentation paramétriques des surfaces régulières

Intuitivement une surface régulière ressemble localement à une portion d'un plan. C'est le cas lorsque une surface  $S$  est constituée localement par une fonction suffisamment régulière. Puisque nous voulons utiliser les outils du calcul différentiel, nous allons supposer que cette fonction est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour s'assurer qu'en chaque point de cette surface on peut considérer un plan tangent nous imposons que le rang <sup>1</sup> de la matrice jacobienne de cette fonction est 2 en ce point. D'où la définition suivante :

#### Définition 2.1.1

Une représentation paramétrique de classe  $\mathcal{C}^m$  d'un ensemble des points  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une application  $\mathbf{x} = f(u, v)$  d'un ensemble ouvert  $U$  du plan  $(u, v)$  dans  $S$  telle que

- (i)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^m$  dans  $U$  ;
- (ii) Si  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $f(u, v) = f_1(u, v)\mathbf{e}_1 + f_2(u, v)\mathbf{e}_2 + f_3(u, v)\mathbf{e}_3$ , alors pour tout  $(u, v) \in U$

$$RgJ = Rg \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2.$$

Comme dans le cas des courbes les variables  $u$  et  $v$  sont appelées les paramètres et une représentation paramétrique est notée par  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ . Les dérivées partielles de  $\mathbf{x}$  sont notées

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad \mathbf{x}_{uu} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}, \quad \mathbf{x}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v}, \quad \text{etc.}$$

---

<sup>1</sup>Dire que le rang d'une matrice  $n \times m$ ,  $A$  est  $p$  (qu'on note  $RgA = p$ ), signifie que  $p$  est le plus grand entier  $\leq \min\{n, m\}$  tel qu'on peut extraire de la matrice  $A$  une sous-matrice carrée  $p \times p$ , dont le déterminant est non nul.

L'image de  $U$  par l'application  $\mathbf{x}$  est un ensemble des points  $S$  appelé une surface de classe  $\mathcal{C}^m$ . La ligne  $(u, v_0)$  de coordonnée constante  $v_0$  a pour image dans  $S$  une courbe de paramètre  $u$ , que l'on note  $\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$  et de la même manière la ligne droite  $(u_0, v)$  dans le plan  $(u, v)$  a pour image la courbe paramétrée  $\mathbf{x}(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$ . Dans le plan  $(u, v)$  les deux lignes  $(u, v_0)$  et  $(u_0, v)$  se croisent au point  $(u_0, v_0)$  et  $\mathbf{x}_u(u_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)$  est la dérivée directionnelle dans la direction de  $u$  qui est tangente à la courbe  $\mathbf{x}(u)$  au point  $(u_0, v_0)$  de même  $\mathbf{x}_v(v_0) = \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$  est la dérivée directionnelle dans la direction de  $v$  qui est tangente à la courbe  $\mathbf{x}(v)$  au point  $(u_0, v_0)$ . Ainsi pour pouvoir définir le plan tangent à la surface au point  $(u_0, v_0)$ , il faut et il suffit que  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$  en ce point. Alors que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \mathbf{e}_3 & \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Donc  $Rg J = 2$  est équivalent à  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$  et la condition (ii) de la définition 2.1.1 est équivalent à

(ii)' Pour tout  $(u, v) \in U$  on a  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$ .

### Exemple 2.1.1

La représentation paramétrique

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v)\mathbf{e}_1 + (u - v)\mathbf{e}_2 + (u^2 + v^2)\mathbf{e}_3$$

définit une application du plan  $(u, v)$  sur une parabolôïde elliptique  $x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  et que

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_2 & 1 & -1 \\ \mathbf{e}_3 & 2u & 2v \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 8(u^2 + v^2)} \neq 0.$$

Ainsi cette représentation est régulière, même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En fixant  $v = v_0$  dans le plan  $(u, v)$  et en éliminant  $u$  de  $x_1 = u + v_0$  et  $x_2 = u - v_0$ , on peut affirmer que la courbe  $\mathbf{x}(u) = (u + v_0)\mathbf{e}_1 + (u - v_0)\mathbf{e}_2 + (u^2 + v_0^2)\mathbf{e}_3$  est dans le plans  $x_1 - x_2 = 2v_0$  (c'est d'ailleurs l'intersection de ce plan avec la parabolôïde elliptique) et de même en fixant  $u = u_0$  la courbe  $\mathbf{x}(v) = (u_0 + v)\mathbf{e}_1 + (u_0 - v)\mathbf{e}_2 + (u_0^2 + v^2)\mathbf{e}_3$  est l'intersection de cette parabolôïde elliptique avec le plan  $x_1 + x_2 = 2u_0$ .

### Exemple 2.1.2

La représentation paramétrique

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2 + (\cos \phi)\mathbf{e}_3$$

définit une application du plan  $(\theta, \phi)$  sur une sphère unité, notée  $S^2 : |\mathbf{x}| = 1$ . Cette représentation n'est pas régulière le long des lignes  $\phi = \pm n\pi, n \in \mathbb{N}$ , car

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_\theta \wedge \mathbf{x}_\phi| &= \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \mathbf{e}_2 & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \mathbf{e}_3 & 0 & -\sin \phi \end{pmatrix} \right| \\ &= |(-\cos \theta \sin^2 \phi)\mathbf{e}_1 - (\sin \theta \sin^2 \phi)\mathbf{e}_2 - (\sin \phi \cos \phi)\mathbf{e}_3| = |\sin \phi|. \end{aligned}$$

ce qui est nul pour  $\phi = n\pi$ . Tandis que si on se restreint à la bande  $B = \{(\theta, \phi) \mid -\infty < \theta < \infty, 0 < \phi < \pi\}$ , alors la représentation devient régulière, même  $C^\infty$  et son image est  $S_*^2$ , la sphère  $S^2$  pointée du pôle nord et du pôle sud. Pour chaque  $\phi = \phi_0$  fixé on retrouve un parallèle des latitudes et pour  $\theta = \theta_0$  fixé on retrouve un méridien de longitude. Remarquer que les parallèles de latitude et les méridiens de longitude se croisent à l'angle droit, car

$$\mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = ((-\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2) \cdot ((\cos \theta \cos \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \cos \phi)\mathbf{e}_2 - \sin \phi \mathbf{e}_3) = 0.$$

Supposons que  $\mathbf{x}(u, v)$  est une représentation paramétrique de classe  $C^m$  de la surface  $S$  défini dans un ouvert du plan  $(u, v)$  et considérons deux applications  $p = p(u, v)$  et  $q = q(u, v)$  de classe  $C^m$  de  $U$  dans le plan  $(p, q)^2$  telles que le jacobien

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Il est possible que l'application  $(u, v) \mapsto (p(u, v), q(u, v))$  ne soit pas bijective de l'ouvert  $U$  dans le plan  $(p, q)$ , mais en utilisant le théorème des fonctions inverses, pour chaque  $(u_0, v_0) \in U$  il existe un voisinage  $W$  de ce point et un voisinage  $W^*$  du point  $(p_0, q_0) = (p(u_0, v_0), q(u_0, v_0))$  dans le plan tel que  $(u, v) \mapsto (p, q)$  est une bijection de  $W$  sur  $W^*$  et son inverse  $(p, q) \mapsto (u, v)$  est aussi de classe  $C^m$ . Considérons à présent la composée de ces applications  $\mathbf{x}^*(p, q) = \mathbf{x}(u(p, q), v(p, q))$  c'est une application de  $W^*$  dans  $S$  et on a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p^* \wedge \mathbf{x}_q^* &= (\mathbf{x}_u u_p + \mathbf{x}_v v_p) \wedge (\mathbf{x}_u u_q + \mathbf{x}_v v_q) \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)(u_p v_q - v_p u_q) \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)} \neq 0 \end{aligned}$$

puisque  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$  et le jacobien  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)} = \left[ \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} \right]^{-1} \neq 0$ . Ainsi  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(p, q)$  devient une représentation paramétrique de  $\mathbf{x}$ , inversible, régulière de classe  $C^m$  ainsi que son inverse. L'application  $(u, v) \mapsto (p, q)$  sera notée par  $\Phi$  et dans la figure 2.1 on schématise l'Exemple 2.1.2.

---

<sup>2</sup>Dans l'exemple précédant on a noté  $(p, q)$  par  $(\theta, \phi)$ .

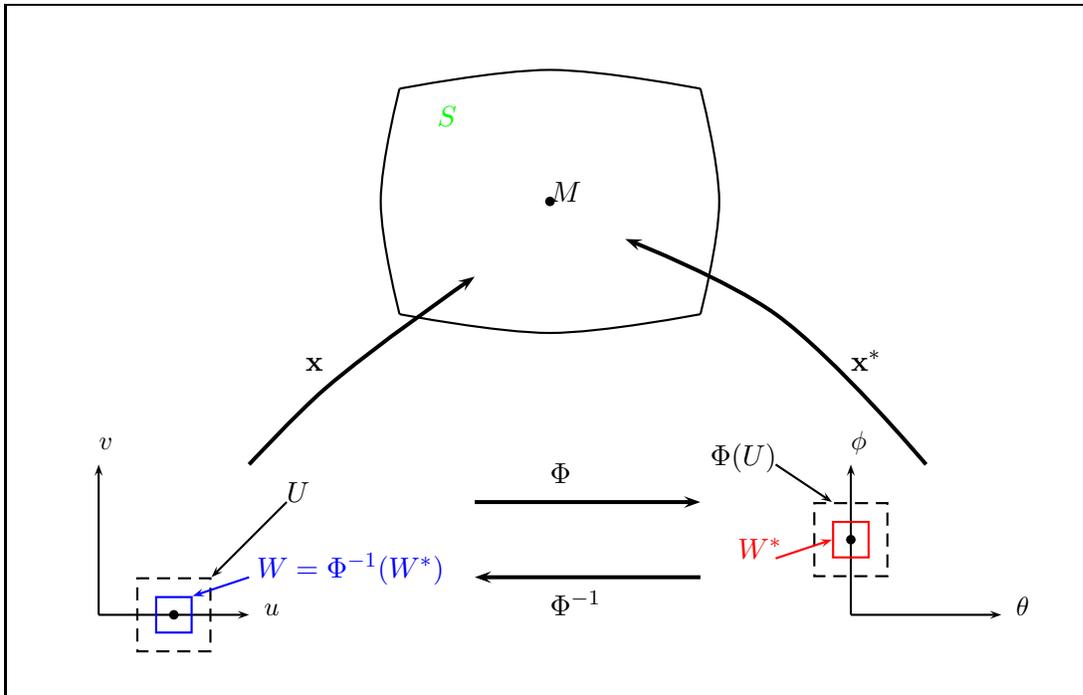


Figure. 2.1

Malheureusement cette représentation est encore plus restrictive que la précédente, elle est définie juste sur un ouvert  $W^*$  plus petit que  $\Phi(U)$ . Notre but à présent est de définir une surface à l'aide d'une famille de telles représentations partielles.

### Définition 2.1.2

Une **coordonnée locale** de classe  $C^m$  sur une surface  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une application  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  d'un ensemble ouvert  $W$  du plan  $(u, v)$  dans  $S$  telle que

- (i)  $\mathbf{x}$  est de classe  $C^m$  dans  $W$  ;
- (ii) Pour tout  $(u, v) \in W$  on a  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$  ;
- (iii)  $\mathbf{x}$  est un homéomorphisme local.

On appelle **carte locale**, l'ensemble  $\omega = \mathbf{x}(W)$  l'image de  $W$  par la représentation paramétrique en coordonnée locale.

### Exemple 2.1.3

Considérons

$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\mathbf{e}_3, \quad u^2 + v^2 < 1. \quad (2.1)$$

C'est une application du disque  $D(0, 1) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ , sur la hémisphère supérieure de  $|\mathbf{x}| = 1$ . Il est clair que  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^\infty$  et que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| &= \left| \left[ \mathbf{e}_1 - u(1 - (u^2 + v^2))^{-1/2} \mathbf{e}_3 \right] \wedge \left[ \mathbf{e}_2 - v(1 - (u^2 + v^2))^{-1/2} \mathbf{e}_3 \right] \right| \\ &= \left| u(1 - (u^2 + v^2))^{-1/2} \mathbf{e}_1 + v(1 - (u^2 + v^2))^{-1/2} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \neq 0 \quad \text{pour tout } u, v \in D(0, 1). \end{aligned}$$

Donc, c'est une représentation paramétrique de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur la hémisphère supérieure, elle est aussi bijective, car si  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u', v')$  alors en comparant les deux premières composantes on a  $u = u'$  et  $v = v'$ , injectivité sur  $\mathbf{x}(D(0, 1))$  implique alors la bijectivité. L'application  $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$  donnée par (2.1) est continue son inverse  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2) = (u, v)$  est une projection donc aussi continue alors cette représentation est une coordonnée locale de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur hemi-sphère.

#### Exemple 2.1.4

Considérons la courbe  $\gamma$  de l'équation  $r = \sin 2\theta$  dans les coordonnées polaires avec  $0 < \theta < \frac{3\pi}{4}$ . Soit  $\mathbf{x}(\theta, \alpha)$  un cylindre dont chaque section parallèle au plan  $(x_1, x_2)$  soit la courbe  $\gamma$ . Ce cylindre est représenté par

$$\mathbf{x}(\theta, \alpha) = \sin 2\theta \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin 2\theta \sin \theta \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{e}_3.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_\theta \wedge \mathbf{x}_\alpha| &= |[(2 \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (2 \cos 2\theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta) \mathbf{e}_2] \wedge \mathbf{e}_3| \\ &= |-(2 \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) \mathbf{e}_2 + (2 \cos 2\theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta) \mathbf{e}_1| \\ &= \sqrt{3 \cos^2 2\theta + 1} \neq 0 \quad \text{pour tout } 0 < \theta < \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il est clair que l'application  $(\theta, \alpha) \mapsto \mathbf{x}(\theta, \alpha)$  est continue et bijective sur  $\mathbf{x}([0, \frac{3\pi}{4}] \times \mathbb{R})$ , car si  $\mathbf{x}(\theta, \alpha) = \mathbf{x}(\theta', \alpha')$  alors en comparant la troisième composante on a  $\alpha = \alpha'$  et les deux premières impliquent

$$\begin{cases} \sin 2\theta \cos \theta = \sin 2\theta' \cos \theta' \\ \sin 2\theta \sin \theta = \sin 2\theta' \sin \theta' \end{cases}$$

ce qui donne

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\theta'} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta'}{\cos \theta}$$

ou bien

$$\cos \theta' \sin \theta - \cos \theta \sin \theta' = \sin(\theta - \theta') = 0$$

et comme  $0 < \theta, \theta' < \frac{3\pi}{4}$ , alors  $\theta = \theta'$ . Mais l'application réciproque n'est plus continue, car la suite  $(\sin \frac{2}{n} \cos \frac{1}{n} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{2}{n} \sin \frac{1}{n} \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{e}_3)$  converge vers  $(\sin \pi \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{e}_1 + \sin \pi \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{e}_3) = \alpha \mathbf{e}_3$  sans que  $(\frac{1}{n}, \alpha)$  converge vers  $(\frac{\pi}{2}, \alpha)$ . Or, cette application n'est pas un homéomorphisme et elle ne présente pas une coordonnée locale.

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^m$ , d'un ouvert du plan  $(u, v)$  dans  $\mathbb{R}$ , alors la représentation paramétrique

$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + f(u, v)\mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

est une représentation de coordonnée locale. En effet,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| &= |[\mathbf{e}_1 + f_u \mathbf{e}_3] \wedge [\mathbf{e}_2 + f_v \mathbf{e}_3]| \\ &= | -f_u \mathbf{e}_1 - f_v \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 | \\ &= \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} \neq 0 \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Donc c'est une représentation paramétrique de classe  $\mathcal{C}^m$  et de plus comme dans Exemple 2.1.3, c'est un homéomorphisme, donc c'est une coordonnée locale.

### Définition 2.1.3

Une coordonnée locale de classe  $\mathcal{C}^m$  du type (2.2), ou  $\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + f(u, v)\mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3$ , ou  $\mathbf{x}(u, v) = f(u, v)\mathbf{e}_1 + u\mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3$  s'appelle une **coordonnée locale de Monge** de classe  $\mathcal{C}^m$  lorsque la fonction  $f \in \mathcal{C}^m(U)$ .

### Théorème 2.1.1

Si  $S$  est une surface admettant une représentation paramétrique de classe  $\mathcal{C}^m$ , alors pour tout point  $M$  de  $S$ , il existe une coordonnée locale de Monge qui contient  $M$ .

**Preuve.** Comme  $S$  admet une représentation paramétrique  $\mathbf{x}(u, v)$  de classe  $\mathcal{C}^m$ , alors si  $M = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , le jacobien de  $\mathbf{x}$  au point  $M$  est de rang 2. Sans perdre de généralité on peut supposer

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$$

au point  $(u_0, v_0)$ . Considérons à présent l'application  $\Phi : (u, v) \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v))$ . Il est clair que cette application est de classe  $\mathcal{C}^m$  et son jacobien est continu différent de zéro au voisinage de  $(u_0, v_0)$ , alors d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage  $W$  du point  $(u_0, v_0)$  et un voisinage  $W^*$  du point  $(x_0, y_0) = (x_1(u_0, v_0), x_2(u_0, v_0))$  tel que  $\Phi$  présente un homéomorphisme de classe  $\mathcal{C}^m$  de  $W$  sur  $W^*$  et que son homéomorphisme réciproque  $\phi^{-1}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^m$  de  $W^*$  sur  $W$ . Comme  $\Phi(u, v) = (x_1, x_2)$  alors  $\Phi^{-1}(x_1, x_2) = (u, v)$  et l'application composée de  $W^*$  dans  $S$  sera

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_1 + x_2(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_2 + x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_3 \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

qui est bien une coordonnée locale de Monge définie dans  $W^*$ , dont l'image contient le point  $M$ .  $\square$

#### Définition 2.1.4

Considérons une surface  $S$  sur laquelle on définit une famille  $\mathcal{A}$  de coordonnées locales de classe  $\mathcal{C}^m$  telle que

- (i)  $\bigcup_{\omega \in \mathcal{A}} \omega$ , où chaque  $\omega$  est une carte locale, couvre  $S$ , c'est-à-dire pour tout point  $M$  de  $S$  il existe une carte  $\omega$  l'image de  $W$  par une représentation paramétrique en coordonnée locale  $\mathbf{x}(u, v)$  de  $\mathcal{A}$  telle qu'elle contient  $M$  ;
- (ii) Pour chaque carte  $\omega$  il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\omega = V \cap S$ .

Dans ce cas  $S$  s'appelle une **surface simple** de classe  $\mathcal{C}^m$ .

Considérons à présent deux cartes  $\mathbf{x}(u, v)$  et  $\mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ , d'une surface simple  $S$  de classe  $\mathcal{C}^m$  qui ont une intersection  $G$  non vide. Soient  $W$  l'ensemble du plan  $(u, v)$  dont l'image par  $\mathbf{x}$  est  $G$  et  $W^*$  l'ensemble dans le plan  $(\theta, \phi)$  dont l'image par  $\mathbf{x}^*$  est  $G$ . Comme  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}^*$  sont les homéomorphismes de  $W$  sur  $G$  et de  $W^*$  sur  $G$ , alors il existe une transformation bijective  $\theta = \theta(u, v)$  et  $\phi = \phi(u, v)$  de  $W$  sur  $W^*$  telle que  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}^*(\theta(u, v), \phi(u, v))$ . On peut démontrer <sup>3</sup> que  $W$  est un ouvert dans le plan  $(u, v)$ , cette transformation est de classe  $\mathcal{C}^m$  et que le jacobien  $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) \neq 0$ . Une telle transformation s'appelle **transformation paramétrique admissible** et il découle du théorème de la fonction inverse que si  $\theta = \theta(u, v)$  et  $\phi = \phi(u, v)$  est une transformation paramétrique admissible alors l'application réciproque est aussi une transformation paramétrique admissible. D'où le théorème suivant :

#### Théorème 2.1.2

Sur l'intersection non vide de deux cartes locales d'une surface simple, les coordonnées paramétriques de classe  $\mathcal{C}^m$ , sur chaque carte est admissible .

#### Exemple 2.1.5

Reprenons l'exemple 2.1.3

- (a) La hémisphère supérieure de la sphère  $|\mathbf{x}| = 1$  est une surface simple de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , car la coordonnée locale de Monge  $\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\mathbf{e}_3$ ,  $u^2 + v^2 < 1$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et elle même couvre la hémisphère et de plus elle est égale à l'intersection d'elle même avec  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) En général une surface simple est une surface sans bord. Par exemple la hémisphère de la sphère  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  avec son équateur n'est pas une surface simple, puisque si  $P((x_1)_0, (x_2)_0, 0)$  est un point de l'équateur et si on suppose que la surface  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \leq 1\}$  est simple, alors il existe d'après

---

<sup>3</sup>à titre d'exercice

*Théorème 2.1.1, une coordonnée locale de Monge de la forme  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\mathbf{e}_3$  telle que  $\omega = \mathbf{x}(W)$  contient  $P$  et  $W$  est un ouvert du plan  $(x_1, x_2)$ . Mais on remarque que tous les points voisins de  $P$  ne sont pas dans  $W$ , ce qui contredit que  $W$  est un ouvert.*

- (c) Remarquons que la sphère enrière  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  est aussi une surface simple car elle peut être couverte par six carte de type Monge

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x} &= \pm \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Les quatre premières couvrent les quatre points cardinaux de la sphère

$$(0, 0, 1) \quad (0, 0, -1) \quad (0, 1, 0) \quad (0, -1, 0)$$

et les deux dernières couvrent les points  $(1, 0, 0)$   $(-1, 0, 0)$  et chaque carte est l'intersection d'un demi espace ouvert approprié avec  $S^2$ .

- (d) Les équations

$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\mathbf{e}_3, \quad u^2 + v^2 < 1$$

et

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2 + (\cos \phi)\mathbf{e}_3, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < \pi$$

définient deux coordonnées locales de classe  $C^\infty$  sur la sphère  $S^2$  telles que leur intersection est le quart de la sphère  $\{x_2 > 0 \mid x_3 > 0\}$  et la transformation

$$\phi = \arccos \sqrt{1 - u^2 - v^2}, \quad \theta = \arccos \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

est admissible sur  $\{u^2 + v^2 < 1 \mid v > 0\}$ .

## 2.2 Plan tangent et vecteur normal

Soit  $\mathbf{x}(u, v)$  une représentation paramétrique d'une surface simple  $S$  dans une coordonnée locale de classe  $C^m$  et  $t \mapsto (u(t), v(t))$  une courbe régulière de classe  $C^m$  dans le plan  $(u, v)$ . Considérons l'image de cette courbe sur la surface  $S$ , notée  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Il est clair que en tant que la composée de deux applications  $C^m$   $\mathbf{y}(t)$  est de classe  $C^m$  et que le vecteur tangent  $d\mathbf{y}/dt \neq 0$ , car sinon,  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} = 0$  et comme  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$  les

vecteurs  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  sont linéairement indépendants et ceci entraîne que  $du/dt = dv/dt = 0$  au point  $t$  ce qui contredit la régularité de la courbe  $t \mapsto (u(t), v(t))$ . Ainsi la courbe  $\mathbf{y}(t)$  est régulière de classe  $\mathcal{C}^m$ .

Réciproquement, si  $\mathbf{y}(t)$  est une courbe sur une surface simple  $S$ . Il est possible qu'on ne puisse pas trouver une carte locale contenant le point  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ , de sorte qu'elle contient entièrement la courbe  $\mathbf{y}(t)$ , mais il existe toujours une partie connexe de la courbe qui sera sur cette carte. Alors en appliquant l'homéomorphisme réciproque de classe  $\mathcal{C}^m$ , il existerait une courbe  $t \mapsto (u(t), v(t))$  régulière de classe  $\mathcal{C}^m$  dans le plan  $(u, v)$  telle que  $\mathbf{y}(t)$  est son image sur  $S$ .

### Définition 2.2.1

Soit  $\mathbf{T}$  un vecteur non nul, on dit que le vecteur  $\mathbf{T}$  est **tangent à la surface**  $S$  au point  $M \in S$ , s'il existe une courbe régulière  $\mathbf{y}(t)$  passant par  $M = \mathbf{y}(t_0)$  telle que  $\mathbf{T} = d\mathbf{y}/dt$  au point  $t_0$ .

Si  $\mathbf{x}(u, v)$  est une représentation de coordonnées locale de  $S$  telle que la carte  $\omega = \mathbf{x}(W)$  contient le point  $M$  et  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , alors  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt}$  et comme les vecteurs  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  sont linéairement indépendants, deux vecteurs  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}^*$  s'ils ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants et s'ils passent tous par le point  $M$ , alors ils forment un plan affine passant par le point  $M$ .

### Définition 2.2.2

Le plan passant par le point  $M$  et parallèle aux vecteurs  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  s'appelle **le plan tangent à la surface**  $S$  au point  $M \in S$  et si le point  $M$  sur la surface  $S$  est noté par  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , le plan tangent peut être représenté par

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v, \quad -\infty < h, k < \infty.$$

### Définition 2.2.3

Soit  $\mathcal{P}$  le plan tangent passant par le point  $M$  et les vecteurs  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  définis par une coordonnée locale qui passent par le point  $M$  de sorte que  $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)$  forment un trièdre direct, alors le vecteur

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \quad (2.3)$$

s'appelle le **vecteur unitaire normal**.

Soit  $\mathbf{x}^*(\theta, \phi)$  une autre représentation paramétrique d'une surface régulière  $S$ , dont la carte

contient aussi le point  $M$ . Sur l'intersection des cartes représentées par  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}^*$  on a

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta^* \wedge \mathbf{x}_\phi^* &= (\mathbf{x}_u u_\theta + \mathbf{x}_v v_\theta) \wedge (\mathbf{x}_u u_\phi + \mathbf{x}_v v_\phi) \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)(u_\theta v_\phi - u_\phi v_\theta) \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^* &= \frac{\mathbf{x}_\theta^* \wedge \mathbf{x}_\phi^*}{|\mathbf{x}_\theta^* \wedge \mathbf{x}_\phi^*|} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} / \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \right| \right) \\ &= \text{sign} \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \right) \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Ainsi  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^*$  ont le même sens si et seulement si  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} > 0$  au point  $M$ . Ceci montre que  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^*$  deux vecteurs normaux unitaires de deux coordonnées locales qui se chevauchent sur une partie contenant le point  $M$  se différent seulement par un signe  $\pm$ . Ainsi la ligne passant par le point  $M$  et perpendiculaire au plan tangent qui s'appelle la **ligne normale** est indépendant au choix des coordonnées locales. Cette ligne est donnée par l'équation

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + k\mathbf{N}, \quad -\infty < k < \infty.$$

#### Définition 2.2.4

Une surface simple  $S$  est dite **orientable**, s'il existe une famille des coordonnées locales  $A$  telle que si  $\mathbf{x}(u, v)$  et  $\mathbf{x}^*(p, q)$  sont deux représentations paramétriques dont les cartes correspondants se chevauchent sur une partie contenant le point  $M$  de  $S$ , alors en tout point de cette partie  $\partial(u, v)/\partial(p, q) > 0$ .

Grosso modo, sur une surface simple orientable le vecteur normal unitaire peut varier continûment sans changer de sens. L'exemple le plus standard d'une surface non orientable est la bande de Möbius <sup>4</sup>. La direction de  $\mathbf{N}$  s'appelle la **direction extérieur à la surface**.

Cette remarque implique qu'une surface régulière  $S$  ne peut pas être toujours globalement orientable, mais par contre on peut toujours se restreindre à une carte locale dans laquelle  $S$  est orientable, en se donnant le vecteur normale  $\mathbf{N}$  sur cette carte locale.  $\mathbf{N}$  s'appelle l'orientation de  $S$  et on peut donner la définition suivante :

#### Définition 2.2.5

Soient  $S$  une surface simple avec une orientation  $\mathbf{N}$  et

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

<sup>4</sup>Pour plus de détail voir sur internet le site <http://www.mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml>

la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . L'application  $\mathbf{N} : S \mapsto S^2$  définie par (2.3) s'appelle **application de Gauss**.

Comme la surface est simple, l'application de Gauss en chaque point  $P \in S$  est différentiable et son différentiel, noté  $d\mathbf{N}_P$  est une application linéaire du plan tangent  $\mathcal{T}_P(S)$  au  $\mathcal{T}_{\mathbf{N}(P)}(S^2)$ . Comme ces deux plans sont parallèles, alors on considère  $d\mathbf{N}_P$  comme une application linéaire de  $\mathcal{T}_P(S)$  dans lui même.

### Théorème 2.2.1

Le différentiel  $d\mathbf{N}_P$  de l'application de Gauss au point  $P$  est une application linéaire auto-adjointe.

**Preuve.** Le différentiel d'une application  $N : S \mapsto S^2$  est toujours une application linéaire de  $\mathcal{T}_P(S) \mapsto \mathcal{T}_{\mathbf{N}(P)}(S^2)$ . Comme nous avons identifié  $\mathcal{T}_P(S) \equiv \mathcal{T}_{\mathbf{N}(P)}(S^2)$ , alors  $d\mathbf{N}_P$  est une application linéaire de  $\mathcal{T}_P(S)$  dans lui même. Pour qu'elle soit auto-adjointe il suffit de montrer que pour une base  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  quelconque de  $\mathcal{T}_P(S)$  on a  $d\mathbf{N}_P(\mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 \cdot d\mathbf{N}_P(\mathbf{w}_2)$ . Si  $\mathbf{x}(u, v)$  est une paramétrisation de  $S$  alors  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  forme une base de  $\mathcal{T}_P(S)$ . Si  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  est une courbe paramétrisée de  $S$ , avec  $\gamma(0) = P$  alors

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_P(\gamma'(0)) &= d\mathbf{N}_P(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) = u'(0)d\mathbf{N}_P(\mathbf{x}_u) + v'(0)d\mathbf{N}_P(\mathbf{x}_v) \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{N}(u(t), v(t))\Big|_{t=0} = \mathbf{N}_u u'(0) + \mathbf{N}_v v'(0). \end{aligned}$$

Ceci implique que  $d\mathbf{N}_P(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u$  et  $d\mathbf{N}_P(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v$ . Par ailleurs comme  $\mathbf{N}$  est perpendiculaire au plan  $\mathcal{T}_P(S)$ , alors  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_v = 0$  et en dérivant respectivement par rapport à  $v$  et  $u$  on aura

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vu} = 0, \quad \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vu} = 0.$$

Ainsi on en déduit

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{x}_u = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vu} = \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_v.$$

□

Concernant les matrices auto-adjoint, il existe un résultat assez connu d'algèbre linéaire qui s'énonce comme suit :

### Théorème 2.2.2

Soit  $A : V \mapsto V$  une application linéaire de  $V^5$  dans lui même. Alors il existe une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  dans  $V$ , telle que dans cette base  $A$  est une matrice diagonale et sur la diagonale il apparaît deux valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tel que si  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , alors ils sont respectivement le maximum et le minimum de la forme quadratique  $Q(v) = Av \cdot v$  lorsque  $v$  parcourt le cercle unité de  $V$ .

---

<sup>5</sup>On prendra par exemple  $V$  de dimension 2.

De ce théorème il suit que la matrice de  $d\mathbf{N}_P$  admet des valeurs propres que l'on va les étudier dans les paragraphes suivants.

### Exemple 2.2.1

Le **tore** est la surface engendrée par la révolution d'un cercle ( $C$ ) autour d'une droite ( $D$ ) de son plan. Supposons que le cercle ( $C$ ) se trouve initialement dans le plan  $(x_1, x_3)$ , avec son centre sur l'axe  $x_1$  à distance  $b$  de l'origine et son rayon est égal à  $a$ , ( $a < b$ ). Après avoir tourné d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $x_3$  son centre se trouve au point  $\mathbf{u} = b \cos \theta \mathbf{e}_1 + b \sin \theta \mathbf{e}_2$  et son vecteur rayon après avoir tourné d'un angle  $\phi$  autour d'axe  $x_3$  peut être représenté par le vecteur  $\mathbf{r} = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + b \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 + a \cos \phi \mathbf{e}_3$ . Ainsi le point générique  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{r}$  sur le tore a comme représentation dans les coordonnées  $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{x} = (b + a \sin \phi) \cos \theta \mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi) \sin \theta \mathbf{e}_2 + a \cos \phi \mathbf{e}_3, \quad (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2.$$

Visiblement  $\mathbf{x}(\theta, \phi)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta &= -(b + a \sin \phi)(\sin \theta) \mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\cos \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_\phi &= (a \cos \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (a \cos \phi \sin \theta) \mathbf{e}_2 - (a \sin \phi) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_\theta \wedge \mathbf{x}_\phi| &= |a(b + a \sin \phi)[-(\sin \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (\sin \phi \sin \theta) \mathbf{e}_2 - \cos \phi \mathbf{e}_3]| \\ &= a(b + a \sin \phi) \neq 0. \end{aligned}$$

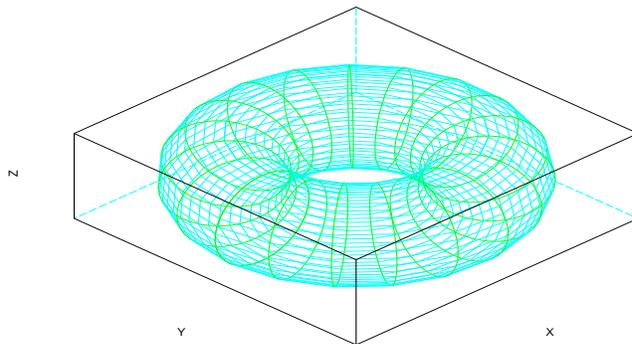


figure 2.1 : un tore avec  $a = 1$  et  $b = 2$  représenté par scilab avec `>plot3d3`

## 2.3 Première forme fondamentale

Dans le chapitre précédent on a vu qu'une courbe dans  $\mathbb{R}^3$ , dépend d'une manière intrinsèque de deux quantités : courbure et torsion. De la même manière chaque surface dans  $\mathbb{R}^3$  est déterminée d'une manière unique par deux quantités qui sont localement invariantes, appelées première et seconde formes fondamentales.

Soit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  les coordonnées locales d'une surface  $\mathcal{S}$  de classe  $\geq 1$ . On appelle le différentiel de  $\mathbf{x}$ , noté  $d\mathbf{x}$  une application bijective du vecteur  $(du, dv)$  dans le plan  $uv$  associe le vecteur

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv,$$

dans le plan tangent. dans la figure suivante on remarque que l'image du vecteur  $(du, dv)$  n'est pas le vecteur  $d\mathbf{x}$  dans le plan tangent, mais c'est un vecteur qui relie le point  $\mathbf{x}(u, v)$  sur  $\mathcal{S}$  au point  $(\mathbf{x}(u + du, v + dv))$  qui est aussi sur cette surface.

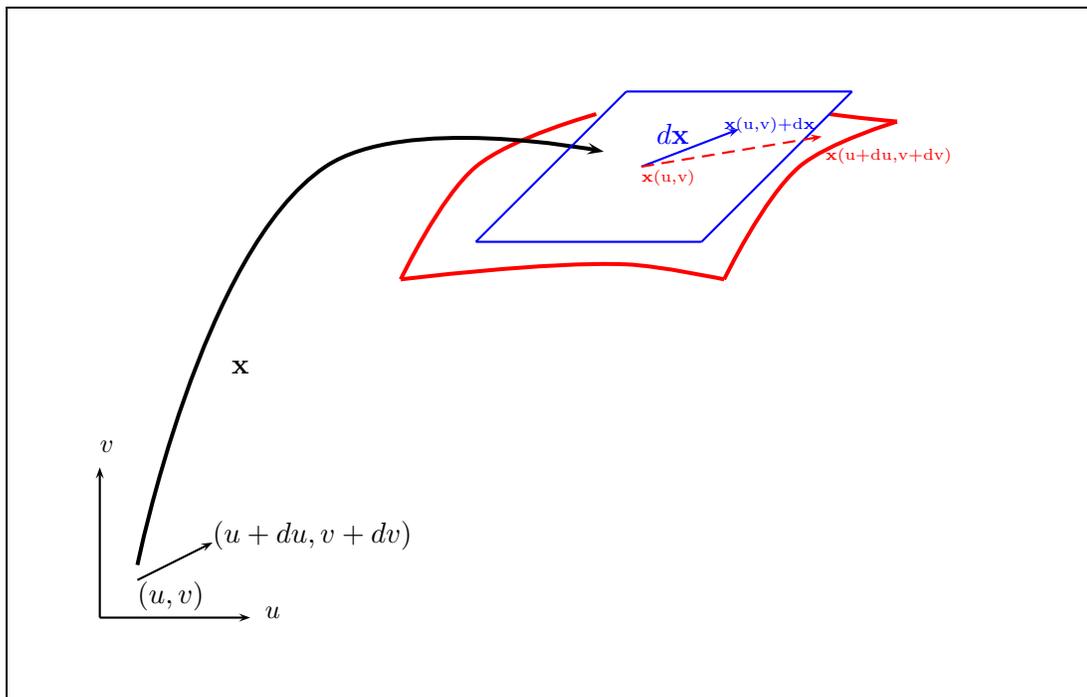


Figure. 2.2

Calculons à présent la quantité

$$\begin{aligned} I &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) du^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) dudv + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

avec les notations

$$E := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G := \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \quad (2.4)$$

La forme quadratique  $I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  s'appelle **première forme fondamentale** de la surface  $\mathbf{x}(u, v)$  et les coefficients  $E, F$  et  $G$  s'appellent **coefficients de la première forme fondamentale**.

### Remarque 2.3.1

La forme  $I(du, dv)$  ne dépend pas de la coordonnée locale choisie. En effet si  $G$  est l'intersection non-vide de deux cartes locales  $\omega$  et  $\omega^*$  par deux transformations paramétriques admissibles  $\mathbf{x}(u, v)$  et  $\mathbf{x}^*(p, q)$ , en tout point  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}^*(p(u, v), q(u, v))$  de  $G$ , on a

$$\begin{aligned} I^*(dp, dq) &= |d\mathbf{x}^*|^2 = |\mathbf{x}_p^* dp + \mathbf{x}_q^* dq|^2 \\ &= |\mathbf{x}_p^*(p_u du + p_v dv) + \mathbf{x}_q^*(q_u du + q_v dv)|^2 \\ &= |(\mathbf{x}_p^* p_u + \mathbf{x}_q^* q_u) du + (\mathbf{x}_p^* p_v + \mathbf{x}_q^* q_v) dv|^2 \\ &= |\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv|^2 = |d\mathbf{x}|^2 = I(du, dv). \end{aligned}$$

### Remarque 2.3.2

Par contre les coefficients de la première forme fondamentale ne sont pas invariants par cette transformation. i.e.

$$(E(u, v), F(u, v), G(u, v)) \neq (E^*(p, q), F^*(p, q), G^*(p, q)).$$

En effet

$$\begin{aligned} E(u, v) &= |\mathbf{x}_u|^2 = (\mathbf{x}_p^* p_u + \mathbf{x}_q^* q_u) \cdot (\mathbf{x}_p^* p_u + \mathbf{x}_q^* q_u) \\ &= |\mathbf{x}_p^*|^2 p_u^2 + 2(\mathbf{x}_p^* \cdot \mathbf{x}_q^*)(p_u q_u) + |\mathbf{x}_q^*|^2 q_u^2 \\ &= E^*(p, q) p_u^2 + 2F^*(p, q)(p_u q_u) + G^*(p, q) q_u^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_p^* p_u + \mathbf{x}_q^* q_u) \cdot (\mathbf{x}_p^* p_v + \mathbf{x}_q^* q_v) \\ &= E^*(p, q) p_u p_v + F^*(p, q)(p_u q_v + p_v q_u) + G^*(p, q) q_u q_v, \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$\begin{aligned} G(u, v) &= |\mathbf{x}_v|^2 = (\mathbf{x}_p^* p_v + \mathbf{x}_q^* q_v) \cdot (\mathbf{x}_p^* p_v + \mathbf{x}_q^* q_v) \\ &= E^*(p, q) p_v^2 + 2F^*(p, q)(p_v q_v) + G^*(p, q) q_v^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

### Théorème 2.3.1

La forme quadratique  $I(du, dv)$  est une forme définie positive.

**Preuve.** On peut présenter la forme  $I(du, dv)$  par une matrice  $2 \times 2$ .

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= (du, dv) \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (du, dv) \begin{pmatrix} Edu + Fdv \\ Fdu + Gdv \end{pmatrix} \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \end{aligned}$$

Alors la forme quadratique  $I(du, dv)$  est définie par la matrice symétrique  $A := \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$  et pour qu'elle soit définie positive il faut et il suffit que  $E > 0$  et  $EG - F^2 > 0$ . On a bien  $E = |\mathbf{x}_u|^2 > 0$  et <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)^2 > 0. \end{aligned}$$

□

### Exemple 2.3.1

Considérons la surface définie par

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v)\mathbf{e}_1 + (u - v)\mathbf{e}_2 + uv\mathbf{e}_3.$$

Il est clair que  $\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3$  et que  $\mathbf{x}_v = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + u\mathbf{e}_3$ . Ainsi les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 2 + v^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = uv, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 2 + u^2$$

et la première forme fondamentale est

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = (2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (2 + u^2)dv^2.$$

Cette forme est définie positive car

$$E > 0, \quad EG - F^2 = (2 + v^2)(2 + u^2) - u^2v^2 = 2(2 + u^2 + v^2) > 0.$$

Faisons à présent un changement de paramètre  $p = u + v$  et  $q = u - v$ . Cette transformation paramétrique est admissible car

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

---

<sup>6</sup>On utilisera la formule  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ .

De plus la nouvelle coordonnée est une coordonnée locale de Monge

$$\mathbf{x}^*(p, q) = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}(p^2 - q^2)\mathbf{e}_3.$$

Comme  $\mathbf{x}_p^* = \mathbf{e}_1 + \frac{p}{2}\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{x}_q^* = \mathbf{e}_2 - \frac{q}{2}\mathbf{e}_3$ , on aura

$$E^* = 1 + \frac{p^2}{4}, \quad F^* = -\frac{pq}{4}, \quad G^* = 1 + \frac{q^2}{4}.$$

Par conséquent aux points  $(u, v) = (1, 1)$  et  $(p, q) = (2, 0)$  on obtient  $\mathbf{x}(1, 1) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{x}^*(2, 0)$  et en ce point de  $\mathcal{S}$ ,  $E = 3$ ,  $F = 1$ ,  $G = 3$  et  $E^* = 2$ ,  $F^* = 0$ ,  $G^* = 1$ . Donc les coefficients de la première forme fondamentale ne sont pas invariant par rapport à la transformation paramétrique admissible.

## 2.4 L'aire d'une surface

Il y a trois entités que l'on peut calculer à l'aide des coefficients de la première forme fondamentale à savoir  $E, F$  et  $G$  :

**(a) La longueur d'un arc sur une surface.** Soit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  et  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  un arc sur la surface de  $\mathbf{x}$ . Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned} \left| \overbrace{\gamma(a)\gamma(b)} \right| &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(u(t), v(t)) \right| dt \\ &= \int_a^b \left[ \left( \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left( \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \right]^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left[ E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \right) + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{I\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)} dt. \end{aligned}$$

### Exemple 2.4.1

Considérons sur la sphère unité

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2 + (\cos \phi)\mathbf{e}_3$$

la courbe  $\gamma(t) = \mathbf{x}(\theta(t), \phi(t))$  où

$$\theta(t) = \ln\left(\cotan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right), \quad \phi(t) = \frac{\pi}{2} - t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cette courbe commence de l'équateur et remonte jusqu'au pôle nord en spirale. Calculons

$$\mathbf{x}_\theta = (-\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_\phi = (\cos \theta \cos \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \cos \phi)\mathbf{e}_2 - (\sin \phi)\mathbf{e}_3$$

Ainsi

$$E = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = \sin^2 \phi, \quad F = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0, \quad G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = 1$$

et

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - t)}, \quad \frac{d\phi}{dt} = -1.$$

Ce qui donne

$$I = E \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right) + G \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2(\pi/2 - t)} + 1 = 2$$

et finalement la longueur de cette courbe sera

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{I \left( \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\phi}{dt} \right)} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

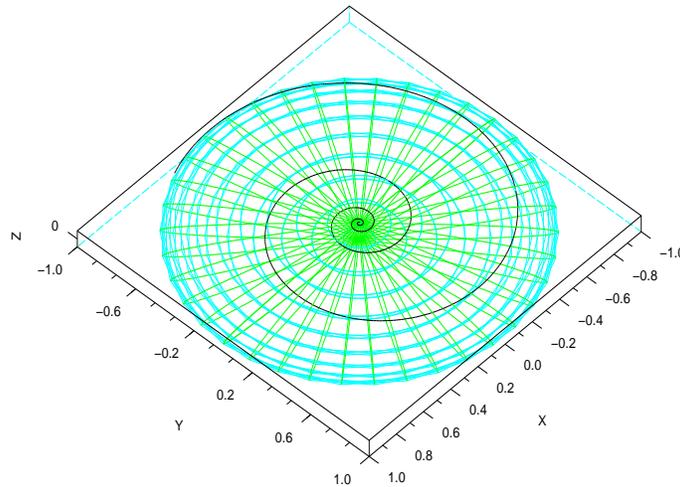


figure 2.3 : la courbe précédente vu d'en haut

(b) L' angle entre  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$ . Calculons  $\cos(\widehat{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v})$

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v}) = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

### Corollaire 2.4.1

Les vecteurs  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  sont orthogonaux si et seulement si  $F = 0$ .

**Exemple 2.4.2**

Reprenons l'Exemple 2.4.1 dans lequel

$$E = \sin^2 \phi, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

donc  $\cos(\widehat{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v}) = 0$ , alors  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  sont orthogonaux.

(c) **Calcul de l'aire d'une surface.** Considérons dans la figure 2.2,  $\Delta s = dudv$  ( $du > 0$  et  $dv > 0$ ) une petite surface dans le plan  $uv$  encadrée par  $du$  et  $dv$  au point  $(u, v)$ .

Soit  $\Delta S$ , l'image de  $\Delta s$  par  $\mathbf{x}$ .

$$\begin{aligned} \Delta S &= |\Delta x_1 \wedge \Delta x_2| = |\mathbf{x}_u du \wedge \mathbf{x}_v dv| \\ &= |(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) dudv| = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv \\ &= \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

Si  $W^*$  est l'image de  $W$  dont l'aire est à calculer, alors cette aire est égale à

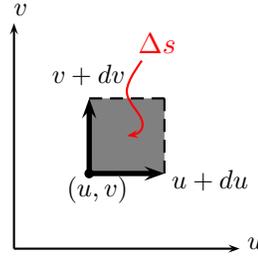


Figure. 2.4

$$A = \int \int_W \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Lorsque  $S$  est une surface orientée (par exemple lorsque  $\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)} > 0$  en tout point de  $W$ ). Alors  $A$  est indépendant du choix de paramétrage admissible. En effet, si  $p = p(u, v)$  et  $q = q(u, v)$  est une transformation paramétrique admissible, en utilisant les formules (2.5), (2.6) et (2.7) on obtient

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (E^* p_u^2 + 2F^* p_u q_u + G^* q_u^2) \cdot (E^* p_v^2 + 2F^* p_v q_v + G^* q_v^2) \\ &\quad - (E^* p_u p_v + F^* (p_u q_v + p_v q_u) + G^* q_u q_v)^2 \\ &= E^* G^* (p_u^2 q_v^2 + q_u^2 p_v^2 - 2p_u p_v q_u q_v) + (F^*)^2 (2p_u p_v q_u q_v - p_u^2 q_v^2 - p_v^2 q_u^2) \\ &= (E^* G^* - (F^*)^2) \left[ \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} \right]^2. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} A &= \int \int_W \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \int \int_W \sqrt{E^* G^* - (F^*)^2} \left[ \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} \right] dudv \\ &= \int \int_{W^*} \sqrt{E^* G^* - (F^*)^2} dpdq = A^*. \end{aligned}$$

**Exemple 2.4.3**

Soit  $S$  la surface d'un tore que nous l'avons étudié dans l'Exercice 2.2.1. Nous avons trouvé

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta &= -(b + a \sin \phi)(\sin \theta)\mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_\phi &= (a \cos \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (a \cos \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 - (a \sin \phi)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Ainsi  $E = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = (b + a \sin \phi)^2$ ,  $F = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0$  et  $G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = a^2$  et pour calculer l'aire de cette surface nous écrivons

$$\begin{aligned}A_S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + a \sin \phi) d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(b + a \sin \phi) d\phi = 2\pi a [b\phi + a \cos \phi]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab.\end{aligned}$$

**2.5 Seconde forme fondamentale**

Soit  $\mathbf{x}(u, v)$  une représentation paramétrique d'une surface de classe  $\geq 2$ . Alors en tout point  $(u, v)$  de cette surface on peut correspondre une carte et un vecteur normal unitaire  $\mathbf{N} = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) / |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|$  qui est une fonction de  $(u, v)$  de classe au moins  $C^1$ . Nous notons par

$$d\mathbf{N} = \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv$$

le différentiel de  $\mathbf{N}$ . Comme  $0 = d(1) = d(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) = 2d\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$ , alors  $\mathbf{N}$  est orthogonal à  $d\mathbf{N}$  au point  $\mathbf{x}(u, v)$  et en ce point  $d\mathbf{N}$  est dans le plan tangent  $\mathcal{T}$ . Nous considérons à présent la quantité

$$\begin{aligned}II(du, dv) &= -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N} = -(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv) \\ &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u du^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u) dudv - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v dv^2 \\ &= L du^2 + M dudv + N dv^2\end{aligned}$$

avec  $L = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$ ,  $M = -(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u)$  et  $N = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$ .

La quantité  $II(du, dv)$  s'appelle la *seconde forme fondamentale* associée à  $\mathbf{x}(u, v)$ . Comme  $I, II$  est aussi une forme quadratique avec les coefficients  $L, M$  et  $N$ , appelés *coefficients de la seconde forme fondamentale*. En fin, comme  $I, II$  est aussi indépendant des coordonnées locales et on peut montrer que si  $\mathbf{x}^*(p, q)$  est une autre représentation paramétrique telle que

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}^*(p(u, v), q(u, v)),$$

alors<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} L &= L^* p_u^2 + 2M^* p_u q_u + N^* q_u^2 \\ M &= L^* p_u q_v + M^* (p_u q_v + p_v q_u) + N^* q_u q_v \\ N &= L^* p_v^2 + 2M^* p_v q_v + N^* q_v^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne d'après un simple calcul

$$LN - M^2 = \left( \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} \right)^2 (L^* N^* - (M^*)^2) \quad (2.8)$$

Comme  $\mathbf{x}_u$  et  $\mathbf{x}_v$  sont orthogonaux à  $\mathbf{N}$  en tout point  $(u, v)$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N})_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u \\ 0 &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N})_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v \\ 0 &= (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N})_u = \mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u \\ 0 &= (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N})_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N}, \quad M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N}, \quad N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N}$$

et par conséquent

$$II(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}, \quad (2.9)$$

où

$$d^2\mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu}du^2 + 2\mathbf{x}_{uv}dudv + \mathbf{x}_{vv}dv^2. \quad (2.10)$$

Considérons à présent  $P$  un point d'une surface de classe  $\geq 2$ , et  $Q$  un autre point de la même surface voisin de  $P$  et  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  une carte contenant  $P$  et  $Q$ . Soit  $d = C$  la projection du vecteur  $\overrightarrow{PQ}$  sur la normal  $\mathbf{N}$ . Il est clair que  $d$  est positif si le point  $Q$  se trouve audessus du plan tangent et négatif si il se trouve en dessous du plan tangent. Supposons que le point  $P = \mathbf{x}(u, v)$  et le point  $Q = \mathbf{x}(u + du, v + dv)$ , dans ce cas la formule de Taylor-Young donne

$$\mathbf{x}(u + du, v + dv) = \mathbf{x}(u, v) + (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu} & \mathbf{x}_{uv} \\ \mathbf{x}_{vu} & \mathbf{x}_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} + \mathbf{o}(du^2 + dv^2)$$

où  $\mathbf{o}(r)$  est un vecteur tel que  $\frac{|\mathbf{o}(r)|}{r} \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$ . Comme  $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ , grâce à la formule (2.10) la formule de Taylor-Young peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}(u + du, v + dv) - \mathbf{x}(u, v) = d\mathbf{x} + \frac{1}{2}d^2\mathbf{x} + \mathbf{o}(du^2 + dv^2).$$

---

<sup>7</sup>On peut calquer la preuve des (2.5), (2.6) et (2.7)

Ainsi

$$\begin{aligned}
 d &= \overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{x}(u + du, v + dv) - \mathbf{x}(u, v)) \cdot \mathbf{N} \\
 &= (d\mathbf{x} + \frac{1}{2}d^2\mathbf{x} + \mathbf{o}(du^2 + dv^2)) \cdot \mathbf{N} \\
 &= \underbrace{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}}_{=II} + \mathbf{o}(du^2 + dv^2) \cdot \mathbf{N} \\
 &= \frac{1}{2}II + \mathbf{o}(du^2 + dv^2) = \delta + \mathbf{o}(du^2 + dv^2).
 \end{aligned}$$

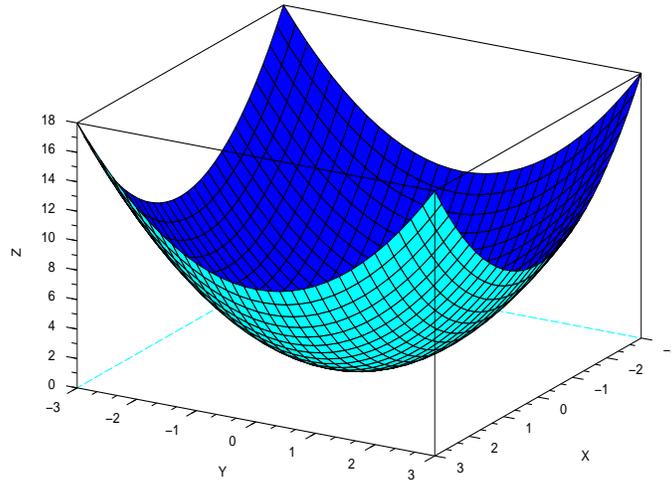
La formule  $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} = 0$  se déduit du fait que  $d\mathbf{x}$  est dans le plan tangent et  $II = d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}$  est donné par (2.9).

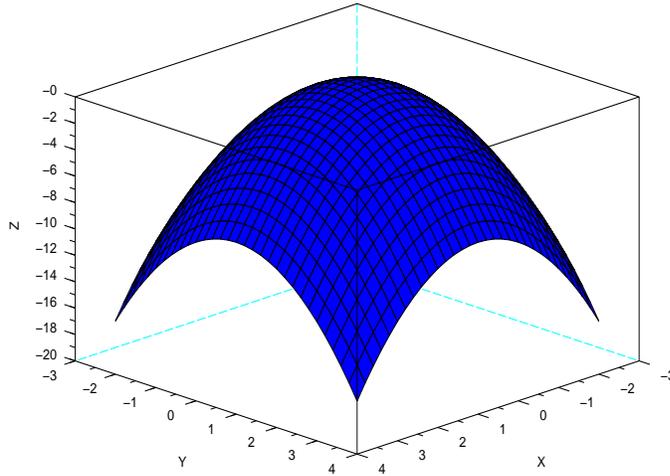
La fonction

$$\delta = \frac{1}{2}II(du, dv) = \frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2) \quad (2.11)$$

s'appelle *paraboloïde osculateur* du point  $P$  et la nature de cette paraboloïde dépend du signe de  $LN - M^2$ . Nous distinguons 4 cas à étudier :

1. **Cas elliptique** ( $LN - M^2 > 0$ ). Un point est dit *elliptique* lorsque  $LN - M^2 > 0$ . En ce point la fonction  $\delta$  définie par (2.11) garde un signe constant dans un voisinage du point  $P$  et l'ensemble de ces points est situé d'un côté du plan tangent au point  $P$ .





### Exemple 2.5.1

Une paraboïde elliptique est la figure d'un bole ou un bole reversé dans les quelles on a

$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 + v^2)\mathbf{e}_3,$$

ou bien

$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 - (u^2 + v^2)\mathbf{e}_3.$$

Dans le premier cas  $\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + 2u\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 + 2v\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_3$ , donc  $L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = 2$ ,  $N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = 2$  et  $M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = 0$  et dans le deuxième cas  $\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 - 2u\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 - 2v\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_3$ , et encore on a  $L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = -2$ ,  $N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -2$  et  $M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = 0$  et de toutes façons on obtient  $LN - M^2 = 4$ .

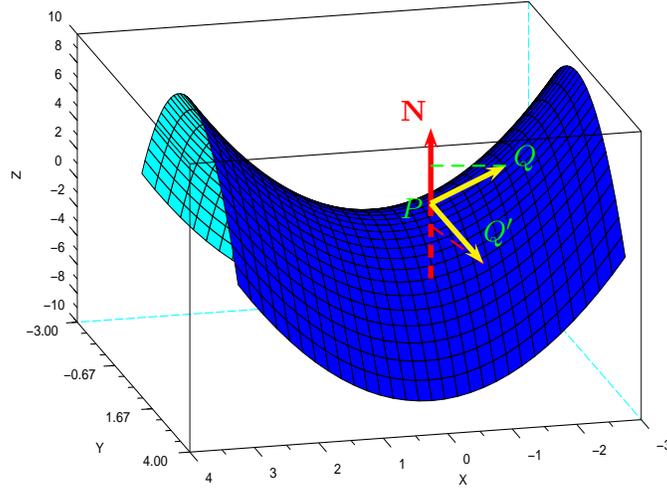
2. **Cas hyperbolique** ( $LN - M^2 < 0$ ). Un point est dit *hyperbolique* si en ce point  $LN - M^2 < 0$ . En ce point il existe deux lignes qui divisent le plan tangent en quatre parties distinctes. Sur chaque parties  $d = \overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{N}$  garde un signe constant.

### Exemple 2.5.2

Une paraboïde hyperbolique est la figure d'une selle de cheval. On a par exemple

$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 - v^2)\mathbf{e}_3.$$

Dans ce cas  $\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + 2u\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 - 2v\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_3$ , donc  $L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = 2$ ,  $N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -2$  et  $M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = 0$ . Ainsi on a  $LN - M^2 = -4$ . Dans cet exemple on remarque que  $\delta = \frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2) = du^2 - dv^2$  et sur les deux lignes  $u = v$  et  $u = -v$  on a  $\delta = 0$ .



La projection de deux points  $Q$  et  $Q'$  sur  $\mathbf{N}$  peuvent être de signe opposé.

3. **Cas parabolique** ( $LN - M^2 = 0$  et  $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$ ). Un point sur une surface est dit *parabolique* si en ce point  $LN - M^2 = 0$  sans que tous les coefficients  $L$ ,  $M$  et  $N$  soient nuls. Ainsi sur le plan tangent au point  $P$  il existe une courbe planaire définie par la fonction  $\delta$  telle que sur cette courbe  $\delta = 0$  et en d'hors de cette courbe le signe de  $d = \overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{N}$  est constant.

### Exemple 2.5.3

Reprenons l'exemple d'un tore 2.2.1 dans lequel

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (b + a \sin \phi) \cos \theta \mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi) \sin \theta \mathbf{e}_2 + a \cos \phi \mathbf{e}_3, \quad (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}_\theta &= -(b + a \sin \phi)(\sin \theta) \mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\cos \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_\phi &= (a \cos \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (a \cos \phi \sin \theta) \mathbf{e}_2 - (a \sin \phi) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_{\theta\theta} &= -(b + a \sin \phi)(\cos \theta) \mathbf{e}_1 - (b + a \sin \phi)(\sin \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_{\phi\phi} &= -(a \sin \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (a \sin \phi \sin \theta) \mathbf{e}_2 - (a \cos \phi) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_{\phi\theta} &= -(a \cos \phi \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (a \cos \phi \cos \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} &= -(\sin \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 - \cos \phi \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Ainsi

$$L = \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{N} = (b + a \sin \phi) \sin \phi, \quad M = \mathbf{x}_{\phi\theta} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad N = \mathbf{x}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{N} = a.$$

Par conséquent  $LN - M^2 = a(b + a \sin \phi) \sin \phi$  est nul pour  $\phi = 0$  ou  $\pi$  ce qui donne deux cercles supérieur et inférieur représentant  $\delta$ . Tous les points de la face extérieure  $\{\mathbf{x}(\theta, \phi) \mid (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times ]0, \pi[ \}$  sont des points elliptiques et tous les points intérieurs  $\{\mathbf{x}(\theta, \phi) \mid (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times ]\pi, 2\pi[ \}$  sont les points hyperboliques.

### Remarque 2.5.1

Dans l'exemple précédent on a utilisé les coordonnées polaire d'un tore, en effet d'après (2.8) on a

$$L^* N^* - (M^*)^2 = \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)} \right)^2 (LN - M^2),$$

c'est-à-dire la nature d'une surface est indépendante du choix de paramétrage.

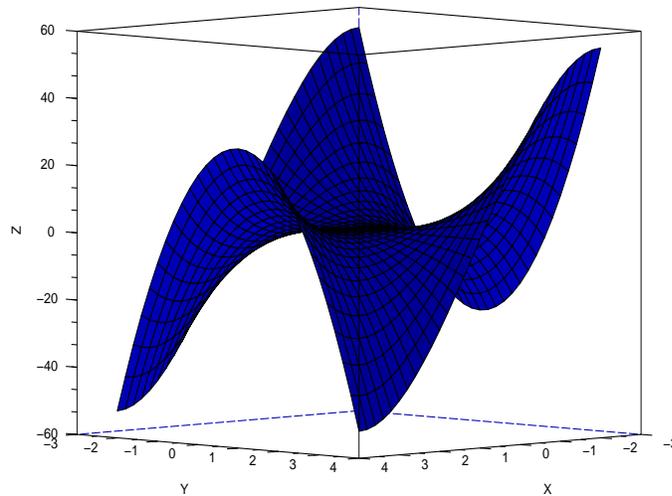
4. **Cas planaire** ( $LN - M^2 = 0$  et  $L^2 + M^2 + N^2 = 0$ ). Dans ce cas si  $L = M = N = 0$ , alors la forme quadratique  $II$  sera identiquement nulle et pour définir  $d$ , il faut aller à l'ordre 3 et écrire

$$d = \frac{1}{2}II + \frac{1}{6}d^3 \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + o\left(\left(du^2 + dv^2\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Alors  $\delta = \frac{1}{6}d^3 \mathbf{x} \cdot \mathbf{N}$  qui sera une forme cubique et par conséquent il existera trois lignes sur les quelles  $\delta$  sera nulle.

### Exemple 2.5.4

(Selle de singe) Pour cette surface l'équation paramétrique est :



$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + u(u^2 - 3v^2)\mathbf{e}_3.$$

Le vecteur normal en un point quelconque est

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = \frac{3(v^2 - u^2)\mathbf{e}_1 + 6uv\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)^2}}$$

et les coefficients de la seconde forme fondamentale sont

$$\begin{aligned} L &= \frac{6u}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)^2}} \\ M &= \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)^2}} \\ N &= \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)^2}}. \end{aligned}$$

On remarque que tous ces coefficients sont nuls au point  $P = (0, 0, 0)$ .

## 2.6 La courbure de surface

Soit  $S$  une surface de classe  $\geq 2$  et  $\mathbf{x}(u, v)$  une carte paramétrée contenant le point  $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ . Soit  $T$  le plan tangent à la surface  $S$  au point  $P$  et  $\mathbf{N}$  la normale unitaire à  $T$  au point  $P$ . Considérons la courbe  $\mathcal{C}$  sur cette carte donnée par  $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  et le vecteur de la courbure de  $\mathcal{C}$

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$$

### Définition 2.6.1

On appelle *vecteur de la courbure normale* au point  $P$ , le vecteur  $\mathbf{k}_n = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}$  et la *courbure normale* le scalaire  $\kappa_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}$ .

On remarque que les deux vecteurs  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{N}$  sont orthogonaux donc,  $\frac{d}{dt}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{N}) = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} = 0$  et par conséquent,

$$\begin{aligned} \kappa_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{t}}{dt} \cdot \mathbf{N} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = -\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \\ &= -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2 = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} / \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= -\left( \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left( \mathbf{N}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{N}_v \frac{dv}{dt} \right) / \left( \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left( \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\kappa_n = \frac{L \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2M \left( \frac{du}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dt} \right) + N \left( \frac{dv}{dt} \right)^2}{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{du}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dt} \right) + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} \quad (2.12)$$

**Théorème 2.6.1**

La courbure normale  $\kappa_n$  dépend seulement de la direction de la tangente au point  $P$  et les coefficients des formes quadratiques  $I$  et  $II$ .

*Preuve.* Comme  $\mathbf{t} = (\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt}) / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$ , la direction de ce vecteur dépend de la quotient  $r = \frac{du}{dt} / \frac{dv}{dt}$ . Alors si on divise le numérateur et le dénominateur de (2.12) par  $(\frac{dv}{dt})^2$ , on trouve

$$\kappa_n = \frac{Lr^2 + 2Mr + N}{Er^2 + 2Fr + G} \quad (2.13)$$

et dans cette expression on remarque que  $\kappa_n$  ne dépend que de  $r, L, M, N, E, F$  et  $G$ .  $\square$

**Théorème 2.6.2**

Toutes les courbes passant par  $P$  et ayant la même plan osculateur ont les mêmes courbure normale, à la condition que le plan tangent ne soit pas confondu avec le plan osculateur au point  $P$ .

*Preuve.* Considérons la courbe régulière  $\mathcal{C}$  passant par le point  $P$ ,  $\gamma$  en paramètre curviligne  $s$ , de sorte que  $\mathbf{t} = \dot{\gamma}(0)$  est automatiquement un vecteur unitaire. Calculons  $II(\dot{\gamma}(0))$ . Comme  $\mathbf{N}(s)$  est orthogonal à  $\dot{\gamma}(s)$ , la relation  $\mathbf{N}(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0$  implique que  $\mathbf{N}(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = -\dot{\mathbf{N}}(s) \cdot \dot{\gamma}(s)$  et par conséquent

$$\begin{aligned} II(\dot{\gamma}(0)) &= -d\mathbf{N}(\dot{\gamma}(0)) \cdot \dot{\gamma}(0) = -\dot{\mathbf{N}}(0) \cdot \dot{\gamma}(0) \\ &= \mathbf{N}(0) \cdot \ddot{\gamma}(0) = \mathbf{N}(0) \cdot \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{N}(0) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Par ailleurs

$$\kappa_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}) = \kappa \cos \alpha, \quad (2.15)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{N}$ . Donc deux courbe qui passent par le même point  $P$  elles ont les mêmes plans tangents et si elles ont les mêmes directions et les mêmes plans osculateurs  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = \cos \alpha$  reste constant  $\square$

Il est clair que d'après ce théorème, si les vecteurs unitaires  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{N}$  coïncident alors  $\kappa = \kappa_n$ . Par ailleurs, en multipliant le numérateur de le dénominateur de (2.12) par  $dt^2$ , on peut écrire

$$\kappa_n = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)}. \quad (2.16)$$

De plus dans la démonstration de ce théorème, on remarque qu' en comparant (2.14) avec (2.15), on obtient

$$\kappa_n(P) = II(\dot{\gamma}(0)). \quad (2.17)$$

**Exemple 2.6.1**

Pour une sphère  $S$  de rayon  $a$ , dans les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\theta, \phi) &= a \sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 + a \cos \phi \mathbf{e}_3, \quad (\theta, \phi) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \\ \mathbf{x}_\theta &= -(a \sin \phi \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (a \sin \phi \cos \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_\phi &= (a \cos \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (a \cos \phi \sin \theta) \mathbf{e}_2 - (a \sin \phi) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_{\theta\theta} &= -(a \sin \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (a \sin \phi \sin \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_{\phi\phi} &= -(a \sin \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (a \sin \phi \sin \theta) \mathbf{e}_2 - (a \cos \phi) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_{\phi\theta} &= -(a \cos \phi \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (a \cos \phi \cos \theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} &= -(\sin \phi \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 - \cos \phi \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Ainsi les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = a^2 \sin^2 \phi, \quad F = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0, \quad G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = a^2.$$

et les coefficients de la seconde forme fondamentale sont

$$L = \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{N} = a \sin^2 \phi, \quad M = \mathbf{x}_{\theta\phi} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad N = \mathbf{x}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{N} = a.$$

Ce qui donne

$$\kappa_n = \frac{II(d\theta, d\phi)}{I(d\theta, d\phi)} = \frac{a \sin^2 \phi d\theta^2 + a d\phi^2}{a^2 \sin^2 \phi d\theta^2 + a^2 d\phi^2} = \frac{1}{a}.$$

Ce résultat a été prévisible, en effet à chaque point  $P$  sur cette sphère on peut faire passer un cercle de rayon  $a$ , considéré comme l'équateur de  $S$ . Au point  $P$  les vecteur  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{N}$  coïncident, donc la courbure du cercle  $\kappa = \frac{1}{a}$  est égale à la courbure normale de la surface  $\kappa_n$ . De même le rayon de courbure normale est le rayon du cercle  $a$ .

Considérons encore la formule

$$d\mathbf{N}(\gamma'(t)) = \mathbf{N}'(u(t), v(t)) = \mathbf{N}_u u'(t) + \mathbf{N}_v v'(t)$$

avec  $\gamma(0) = P$ . Comme  $\mathbf{N}_u$  et  $\mathbf{N}_v$  sont dans le plan  $\mathcal{T}_P$ , en considérant  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  une base de  $\mathcal{T}_P$ , on peut écrire

$$\mathbf{N}_u = w_{11}\mathbf{x}_u + w_{21}\mathbf{x}_v \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_v = w_{12}\mathbf{x}_u + w_{22}\mathbf{x}_v. \quad (2.18)$$

et par conséquent

$$d\mathbf{N}(\gamma'(t)) = (w_{11}u' + w_{12}v')\mathbf{x}_u + (w_{21}u' + w_{22}v')\mathbf{x}_v.$$

Ce qui donne l'expression matricielle de  $d\mathbf{N}$ , à savoir,

$$d\mathbf{N} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = W\gamma.$$

La matrice  $W$  s'appelle la *matrice de Weingarten* et ses valeurs propres et vecteurs propre jouent un rôle important dans l'étude des surfaces.

En effet, d'après la démonstration de Théorème 2.2.1 l'application  $d\mathbf{N}_P$  est auto-adjoint dans la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  et d'après Théorème 2.2.2 il existe une base notée  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ , avec  $|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{w}_2| = 1$  telle que  $d\mathbf{N}_P(\mathbf{w}_1) = -k_1\mathbf{w}_1$  et  $d\mathbf{N}_P(\mathbf{w}_2) = -k_2\mathbf{w}_2$ . Les valeurs  $k_1$  et  $k_2$  s'appellent les *courbures principales* et les vecteurs propres associés, les *directions principales* de la surface  $S$  au point  $P$ .

D'après ce qu'on vient de voir les valeurs  $-k_1$  et  $-k_2$  sont les valeurs propres de la matrice de Weingarten, donc les invariants de cette matrice par rapport de la base choisie sont  $K = \det(W) = k_1k_2$  et  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  la demi-trace de  $W$ . la valeur  $K$  s'appelle la *courbure de Gauss* et  $H$  s'appelle la *courbure moyenne*. Finalement, l'équation du second ordre

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0. \quad (2.19)$$

admet deux racine qui sont exactement les courbures principale  $k_1$  et  $k_2$ . Pour calculer les coefficients de la matrice de Weingarten il suffit d'utiliser les expressions de  $\mathbf{N}_u$  et  $\mathbf{N}_v$  donnée dans (2.18) et écrire

$$\begin{aligned} L &= -\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_u = -(w_{11}E + w_{21}F) \\ M &= -\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_v = -(w_{11}F + w_{21}G) = -\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{x}_u = -(w_{12}E + w_{22}F) \\ N &= -\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{x}_v = -(w_{12}F + w_{22}G), \end{aligned}$$

d'où la relation

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

En remplaçant

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{par sa valeur} \quad \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{MF - LG}{EG - F^2}, & w_{21} &= \frac{NF - MG}{EG - F^2} \\ w_{12} &= \frac{LF - ME}{EG - F^2}, & w_{22} &= \frac{MF - NE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs comme  $W\mathbf{w}_i = -k_i\mathbf{w}_i$  pour  $i = 1, 2$ , en prenant  $A_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{z}_i = A_I^{-1}\mathbf{w}_i$ ,

on a  $A_{II}\mathbf{z}_i = k_i A_I\mathbf{z}_i$ , avec  $A_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ , ce qui est équivalent à dire que

$$\det \begin{pmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & L - \kappa G \end{pmatrix} = 0$$

lorsque  $\kappa = k_i$  pour  $i = 1, 2$ . Ce qui donne immédiatement les valeurs des courbure de Gauss et la courbure moyenne

$$K = \det(W) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{-2FM + EN + LG}{2(EG - F^2)}.$$

Considérons à présent le repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de sorte que le point  $P$  sur la surface de  $S$  soit l'origine du repère. On prend la représentation de la carte locale la représentation de Monge,

$$\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + f(u, v)\mathbf{e}_3,$$

où la fonction  $f$  de classe  $\geq 2$  est telle que  $f_u(0, 0) = f_v(0, 0) = 0$ . Alors dans ce cas au point  $P$ ,  $\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2$ . Ce qui donne,

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1$$

et ainsi

$$\kappa_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{du^2 + dv^2}.$$

Comme  $\kappa_n$  dépend seulement de quotient  $du/dv$ , on peut choisir  $du^2 + dv^2 = r^2$  une constante positive. Ce qui est vraie dans le cas  $du = r \cos \theta d\theta$  et  $dv = r \sin \theta d\theta$  et dans ce cas on a

$$\kappa_n = L \cos^2 \theta + 2M \sin \theta \cos \theta + N \sin^2 \theta.$$

En prenant  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  et  $|\kappa_n| = \frac{1}{r^2}$  on obtient

$$Lx_1^2 + 2Mx_1x_2 + Nx_2^2 = \pm 1 \tag{2.20}$$

### Définition 2.6.2

L'ensemble des points  $(x_1, x_2)$  dans le plan  $uv$  tels que (2.20) soit vérifiée forme une section conique appelée **indicatrice de Dupin** au point  $P$ .

Selon le signe de  $LN - M^2$  on distingue trois types d'indicatrice :

- (1) **Elliptique** si  $LN - M^2 > 0$ .
- (2) **Hyperbolique** si  $LN - M^2 < 0$ .

(3) *Parabolique* si  $LN - M^2 = 0$  et  $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$ .

**Définition 2.6.3**

L'ensemble des points sur  $S$  pour les quels  $k_1 = k_2$  s'appellent les **ombilics** de  $S$ .

Il est clair, ainsi que montre Exemple 2.6.1, que la courbure normale de la sphère est constante, donc son maximum et son minimum coïncident. Ainsi tout point sur la sphère est un ombilic. D'ailleurs la sphère et le plan sont deux surfaces particulières où elles possèdent cette propriété.