Université de Poitiers

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

Spécialité : **Mathématiques**

préparée au **Laboratoire de Mathématiques et Applications de Poitiers**

dans le cadre de l'École Doctorale

présentée et soutenue publiquement
par

Koléhè Abdoulaye COULIBALY-PASQUIER

le 25 juin 2009

Titre:
Étude d'équations d'évolution en géométrie globale avec des méthodes probabilistes

Directeurs de thèse: **Marc ARNAUDON et Anton THALMAIER**

Jury

Shizan FANG	Professeur, Université de Bourgogne	Rapporteur
Jacques FRANCHI	Professeur, Université de Strasbourg	Rapporteur
Robert O. BAUER	A. Professor, University of Illinois	Examinateur
Pol VANHAECKE	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
Marc ARNAUDON	Professeur, Université de Poitiers	Directeur de thèse
Anton THALMAIER	Professeur, Université du Luxembourg	Directeur de thèse

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, à une famille de métriques sur une variété nous associons un mouvement brownien. Nous construisons un transport parallèle stochastique au-dessus de ce processus. Avec une forme intrinsèque du flot stochastique, nous définissons une notion de transport parallèle déformé au-dessus de ce processus. Nous caractérisons le flot de Ricci comme étant le seul flot sur les métriques garantissant l'égalité du tranport parallèle et du transport parallèle déformé.

Dans ce cas, le transport parallèle déformé est une isométrie. Nous en déduisons des propriétés sur le flot de Ricci. Dans une seconde partie, nous nous intéressons au flot à courbure moyenne d'une hypersurface. Nous construisons ainsi un processus sans naissance et nous montrons son unicité en loi quand la variété de départ est strictement convexe. Quand l'hypersurface de départ n'est pas strictement convexe nous avons néanmoins une famille de martingales dont les points de départ sont sur une "variété" singulière.

Dans la dernière partie, nous construisons une diffusion dans l'espace des courbes sur une variété. Nous en déduisons des conditions suffisantes pour obtenir des propriétés de contraction - pour plusieurs distances de Wasserstein - entre deux mesures de probabilité représentant la densité de deux diffusions d'opérateur elliptique inhomogène quelconque. Ainsi, cette nouvelle construction produit une alternative entièrement probabiliste aux calculs d'Otto utilisés par Lott pour arriver à des résultats similaires.

Abstract

In the first part of this thesis, for a family of metrics on a manifold we associate a Brownian motion. We build a parallel stochastic transport above this process. With a kind of intrinsic stochastic flow, we define a notion of damped parallel transport above this process. We characterize the Ricci flow as the only flow of metrics that guarantees the equality between the parallel transport and the damped parallel transport. We deduce some properties of the Ricci flow.

On the second hand, we study the mean curvature flow of a hypersurface. We build a process without birth and we prove the uniqueness in law of such a process when the initial hypersurface is strictly convex. When it is not strictly convex we obtain a family of martingales that start in a singular "manifold".

In the last part, we build a diffusion in the space of regular curves on some manifold. We deduce sufficient conditions to obtain some contraction properties - for a large class of Wasserstein distances - between two measures of probability that represent the density of two diffusions associated with an inhomogeneous elliptic operator. So this new construction yields a totally probabilistic alternative to the Otto calculus used by Lott to obtain similar results.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La première partie de cette introduction sera informelle, elle présentera le cadre de notre étude. Partant d'exemples naturels et de certains résultats connus sur les liens entre géométrie et probabilité, nous glisserons peu à peu vers le sujet central de notre étude. Dans la deuxième partie, nous présenterons la problématique sur laquelle nous nous sommes attardés. Puis, nous présenterons de façon condensée les résultats que nous avons obtenus. Ces résumés respecteront l'ordre des chapitres.

Il y a de nombreuses équations d'évolutions qui font intervenir la géométrie. Dans un premier cas, on pourrait parler de l'équation de la chaleur, qui est une équation de diffusion modélisant l'évolution de la chaleur sur un objet, disons une variété sans bord que l'on notera M. On le chauffe à une température modélisée par une fonction f_0 à un instant que l'on prendra pour origine. Cette fonction renvoie en tout point la température qu'il y fait. On supposera qu'il n'y a pas d'échange avec l'extérieur. L'équation régissant l'évolution au cours du temps de la température, la bien nommée "équation de la chaleur", est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \frac{1}{2}\Delta f(t,x).$$

On peut, par expérience ou même par intuition, penser que son évolution est très liée à la géométrie de l'objet sur lequel elle évolue. S'il est compact, la température aura tendance à s'uniformiser au cours du temps et si l'on attend assez longtemps, la température sera quasiment uniformément distribuée. Comme il n'y a pas d'échange avec l'extérieur, cette température asymptotique vaudra la moyenne spatiale de la température à l'intant initial.

Mais la géométrie de la variété, que l'on supposera désormais compacte, a aussi son importance, par exemple sur le temps que l'on devrait attendre pour voir la température s'uniformiser. Par exemple, prenons deux os, disons deux fémurs ; le premier sera supposé "normal", le deuxième sera presque comme le premier à la seule

7

différence qu'il sera plus étroit au centre. Si l'on chauffe les deux os uniquement sur leur rotule droite, le temps d'attente vers l'uniformisation de la température sera intuitivement plus court sur le premier os que sur le deuxième. Cette observation montre l'infuence de la géométrie de l'objet considéré, au moins sur l'évolution de la température sur cet objet. On peut aussi considérer que l'équation de la chaleur a une vertu uniformisante.

Cette équation bien connue et très étudiée en analyse a une interprétation probabiliste donnée par le mouvement brownien sur la variété M. Ce mouvement aléatoire trouve son origine dans l'observation de trajectoires de grains de pollen dans un récipient en contenant un très grand nombre, et ces trajectoires sont aléatoires (...). Il permet dans le cadre de l'étude de l'équation de la chaleur de donner une sorte de "ligne caractéristique en moyenne" comme le montre la formule de représentation suivante :

$$f(t,x) = \mathbb{E}[f_0(X_t(x))],$$

où $X_t(x)$ est un mouvement brownien. C'est un point de connexion entre les probabilités et l'analyse. Le comportement du brownien, ses probabilités de transitions entre deux états ont une interprétation en terme de l'équation de la chaleur et comme nous l'avons vu plus haut sont controlés par la géométrie de l'objet sur lequel le brownien évolue. Ces liens étroits entre probabilité, analyse et géométrie sont "bien connus" et occupent toujours une part très importante des recherches actuelles.

Il y a même plus ; les liens entre une topologie sur une variété (disons seulement différentiable) et les géométries (disons riemaniennes) dont on peut la munir sont de plus en plus connus. Donnons comme exemple le cas des variétés différentielles de dimension deux : le théorème de Gauss-Bonnet reliant l'intégrale de la courbure scalaire au genre (au nombre de trous de la variété) donne une obstruction aux géométries envisageables sur une variété différentielle. Ainsi, un tore ne peut être muni d'une métrique à courbure scalaire strictement positive. En dimension quelconque, la cohomologie de de Rham donne des restrictions de nature analytique : par exemple la dimension de l'espace des formes harmoniques est figée par des invariants topologiques.

Ces liens entre topologie et géométrie se retrouvent aussi entre topologie et probabilité, voir par exemple les résultats reliants les moments de stabilités et le groupe fondamental de Elworthy et Rosenberg. L'exemple donné plus haut, sur la vitesse de propagation de la chaleur sur les deux os, est relié au trou spectral du laplacien. La minoration de ce trou spectral se trouve être plus facile à obtenir (dans certains cas) avec des méthodes probabilistes, utilisant des couplages, qu'avec des méthodes analytiques (voir Zhong et Yang pour une minoration du trou spectral grâce à une fonction du diamètre). Ces quelques résultats, donnés de manière non exhaustive, valident si besoin était l'étude du calcul stochastique sur les variétés.

L'équation d'évolution, donnée ici en exemple (l'équation de la chaleur), a de nombreuses généralisations :

– On peut lui rajouter un champ de vecteurs Z, ce qui revient à changer l'opérateur de Laplace Betrami Δ en $\Delta + Z$.
– On peut l'appliquer aux formes différentielles en changeant l'opérateur de Laplace en l'opérateur de Hodge-De Rham-Kodaira pour en déduire des résultats topologiques (du type $Ric \geq r > 0$ entraîne M simplement connexe).
– On peut la généraliser à l'équation de la chaleur entre deux variétés introduite par Eells et Sampson (1964 [ES64]). Cette équation est la première non linéaire que nous rencontrerons. Comme dans le cas de l'équation de la chaleur, elle permet de trouver, lorsqu'elle ne développe pas de singularités, une application harmonique entre deux variétés (c'est une généralisation des géodésiques, au sens d'un minimum d'une certaine fontionnelle d'énergie, sauf que l'espace de départ n'est pas forcément un intervalle de $\mathbb{R}$). Les auteurs découvrent aussi des conditions suffisantes de nature géométrique à l'existence de telles applications.

D'autres équations non linéaires proviennent de façon naturelle en considérant des équations d'évolutions géométriques telles l'équation de flot par courbure moyenne, l'équation de flot par courbure de Gauss ou, de manière plus générale, des équations de flots provenant de polynômes symétriques évalués en les valeurs propres de la seconde forme fondamentale. Par exemple, ces flots sont définis par la déformation d'une hypersurface dans la direction de son vecteur normal, avec pour coéfficients les différentes quantités envisagées précédemment (courbure moyenne i.e. $P(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum X_i$, courbure de Gauss i.e. $P(X_1, ..., X_n) = \prod X_i$ ...). Mais, comme nous pouvons le remarquer, les flots précédents nécessitent un environnement extérieur (un plongement, une notion de vecteur normal afin de définir la seconde forme fondamentale). Ce sont des déformations non intrinsèques mais réalisant, comme dans le cas du flot de courbure moyenne, une descente d'énergie : ici c'est la superficie que l'on souhaite minimiser.

Une autre équation non linéaire devenue célèbre ces dernières années est le flot de Ricci (0.1) ; ce flot déforme la métrique dans la direction de son tenseur de Ricci. C'est un flot intrinsèque, dans le sens où sa définition ne nécessite pas de plongement. Il a été introduit par Hamilton dans les années 1980 ([Ham82]). Dans cet article, l'auteur montre l'existence locale du flot et plus tard, Deturck donne une démonstration plus simple de ce resultat dans [DeT83].

Soit (M, g_0) une variété riemanienne compacte de dimension n et $Ric_{g(0)}$ le tenseur de Ricci associé à la connexion de Levi-Civita, alors le flot de Ricci est défini par :

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)}, \tag{0.1}$$

avec $g(0) = g_0$. On remarque que le caractère symétrique de la courbure de Ricci donne sens à cette équation. On peut voir cette équation, à un terme tronqué près, comme l'équation de flot de gradient d'une fonctionnelle géométrique, à savoir :

$$E(g) = \int R_g d_{vol(g)}, \tag{0.2}$$

où R_g (resp.$d_{vol(g)}$) est la courbure scalaire (resp. est la forme volume) associée à la métrique g.

Soit w_t une courbe dans l'espace des métriques, telle que $\frac{d}{dt}w_t = h_t$. En utilisant le théorème de divergence, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E(w_t) = \int \langle \frac{R_{w_t}}{2} w_t - Ric_{w_t}, h_t \rangle d_{vol(w_t)}.$$

Le flot de gradient associé à (0.2) est donné par :

$$\frac{d}{dt}g_t = \frac{R_{g_t}}{2} g_t - Ric_{g_t}.$$

Comme présenté dans [Top06], ce flot n'admet en général pas de solution, même locale pour $n \geq 3$. Par contre, le flot de Ricci (0.1), qui consiste modulo la constante 2 à tronquer le terme $\frac{R_{g_t}}{2} g_t$ dans l'équation précédente, possède une solution locale et cela sans aucune hypothèse supplémentaire sur la variété compacte. Grâce à ce flot et après normalisation pour avoir un volume constant, Hamilton a démontré [Ham82] le théorème suivant :

Si M est une variété de dimension 3 qui possède une métrique de courbure de Ricci strictement positive alors M peut être munie d'une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive. Si la variété est de plus supposée simplement connexe, alors elle est difféomorphe à la sphère. Plus tard, Perelman utilisera aussi ce flot pour donner une preuve à la conjecture de Poincaré.

Nous allons particulièrement nous intéresser aux deux derniers flots géométriques exposés précédemment : le flot par courbure moyenne d'une hypersurface et le flot de Ricci. Dans un premier temps, nous remarquerons que tous les deux produisent de manière naturelle une famille de métrique $(M, g(t))$ sur la variété. À la donnée d'une famille de métriques suffisamment régulières, nous associons un mouvement brownien, dont l'évolution sera liée à la déformation de la métrique.

Soit ∇^t la connexion de Levi-Civita associée à la métrique $g(t)$ et Δ_t l'opérateur de Laplace-Beltrami (avec la convention $\Delta_t f = tr_t \nabla^t df$, où tr_t désigne la trace relative à la métrique $g(t)$). Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet filtré avec la condition habituelle de continuité à droite et W un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 0.1 *Soit $g(t)_{t\in[0,T[}$ une famille $C^{1,2}$ de métriques sur M. Un processus $X(x)$ à valeurs dans M défini sur $\Omega \times [0,T[$ est appelé $g(t)$-mouvement brownien dans M commençant au point $x \in M$ si $X(x)$ est continu, adapté, et si pour toute fonction f,*

$$f(X_s(x)) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^s \Delta_t f(X_t(x))\,dt$$

est une martingale locale nul en 0. On le notera $g(t)$-MB(x).

Nous introduisons aussi une notion de transport parallèle le long d'un $g(t)$-MB(x) qui sera, modulo une isométrie, solution d'une E.D.S. dans le fibré des repères (1.7 ch.3). Il aura de plus la propriété d'être une isométrie au sens où :

$$//_{0,t} : (T_{X_0}M, g(0)) \to (T_{X_t}M, g(t)).$$

Nous obtenons ainsi une formule de développement stochastique : notons $(v_1, ..., v_n)$ une base orthonormée de $(T_{X_0}M, g(0))$, et $X_t(x)$ un $g(t)$-MB(x) alors :

$$*dX_t(x) = //_{0,t} v_i * dW_t^i,$$

oú $*d$ denote la différentielle de Stratonovitch. Et pour $f \in \mathcal{C}(M)$ on a la formule de Itô :

$$df(X_t(x)) = \langle \nabla^t f, //_{0,t} v_i \rangle_t dW^i + \frac{1}{2}\Delta_t(f)(X_t(x))\,dt.$$

Les $g(t)$-MB(x) sont des diffusions inhomogènes associées à l'opérateur Δ_t. Ces diffusions possèdent des densités C^∞ (c.f. [SV06]). Nous donnons l'équation que satisfait la densité des $g(t)$-MB(x).

Soit $d\mu_t$ la mesure volume associée à $(M, g(t))$ et soit $h^x(t,y) \in C^\infty(]0,T[\times M)$ tels que :

$$\begin{cases} X_t(x) & \stackrel{\mathcal{L}}{=} & h^x(t,y)d\mu_t(y), t > 0 \\ X_0(x) & \stackrel{\mathcal{L}}{=} & \delta_x. \end{cases}$$

alors $h^x(t,y)$ suit l'équation de réaction diffusion suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(h^x(t,y)) + h^x(t,y)tr\left(\dfrac{1}{2}g_{i,j}^{-1}(t,y)\dfrac{d}{dt}g_{i,j}(t,y)\right) = \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)}h^x(t,y) \\ \stackrel{\mathcal{L}}{\lim\limits_{t\to 0}} \quad h^x(t,y)d\mu_t = \delta_x. \end{cases}$$

Ces équations sont naturellement conservatives (i.e. $\int h^x(t,y)d\mu_t(y) = 1$), ce qui n'est pas le cas de l'équation de la chaleur dont le laplacien dépend du temps. Dans le cas du flot de Ricci normalisé “à la probabiliste”(ce qui consiste à enlever le facteur 2 dans (0.1)), on retrouve l'équation conjuguée à l'équation de la chaleur à un retournement de temps près (c.f. (2.3 ch.3) et [Top06]). Récemment, Cao et

Hamilton (c.f. th 2.3 [CH]) ont donné une inégalité de Harnack sous la condition que la courbure de Ricci soit positive au temps 0 - cette condition est préservée le long du flot comme l'a montré le second auteur (dans [Ham82])-. Cette inégalité de Harnack sous forme intégrale donne dans notre cas une majoration des fonctions de transitions de notre processus.

Nous donnons une formule du transport parallèle deformé le long d'un $g(T-t)$-MB, et ce quelle que soit la famille assez régulière de métriques que nous étudions. Ce transport parallèle (noté $\mathbf{W}_{0,t}^T$, dont l'indice supérieur T signifie que l'on retourne le temps dans la métrique) est défini comme solution de l'équation covariante de Stratonovich :

$$*d((//_{0,t}^T)^{-1}(\mathbf{W}_{0,t}^T)) = -\frac{1}{2}(//_{0,t}^T)^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)} - \partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T)\, dt \quad (0.3)$$

avec

$$\mathbf{W}_{0,t}^T : T_xM \longrightarrow T_{X_t^T(x)}M, \quad \mathbf{W}_{0,0}^T = \mathrm{Id}_{T_xM}\,.$$

Nous donnons un premier théorème 3.2 ch.3 qui permet, par exemple, d'étudier l'évolution au cours du temps du gradient de solution d'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_t f(t,x) \\ f(0,x) = f_0(x), \end{cases} \quad (0.4)$$

Nous obtenons ainsi une formule de Bismut reliant le gradient à la fonction modulo une espérance. Lorsque la famille de métriques provient du flot de Ricci (2.2 ch.3), le transport déformé et le transport parallèle coïncident. Dans ce cas, la propriété d'isométrie du transport parallèle rend les formules plus agréables. Nous obtenons par exemple, les corollaires 3.4 ch.3 et 3.5 ch.3 suivants :

Si $\frac{d}{dt}g_{ij} = -Ric_{ij}$ et si f est solution de (0.4), on pose $\mathcal{M}_0 = \sup_M |f_0|$. Soit $T < T_c$ (où T_c est le temps d'explosion du flot de Ricci) ; alors :

$$\sup_{x\in M} \|\nabla^T f(T,x)\|_T \text{ est décroissant en temps}$$

et :

$$\sup_{x\in M} \|\nabla^T f(T,x)\|_T \leq \frac{\mathcal{M}_0}{\sqrt{T}}.$$

Ces résultats sont obtenus sans aucune condition de courbure sur la variété $(M, g(0))$.

Nous utilisons ensuite ces techniques pour retrouver des résultats sur le flot de Ricci en dimension deux. Dans cette partie, nous nous intéressons au flot de Ricci normalisé, de façon à ce que le volume reste constant. Le cas particulier de la dimension deux fournit un invariant topologique le long du flot (théorème de Gauss-Bonnet). Cet invariant simplifie l' équation de renormalisation :

Soit M une variété compacte de dimension deux, $R(t)$ la courbure scalaire pour une métrique $g(t)$ et $r = \int_M R_t d\mu_t/\mu_t(M) = 2\pi\frac{\chi(M)}{cst}$, alors l'équation du flot de Ricci normalisé devient

$$\frac{d}{dt}g_{i,j}(t) = (r - R(t))g_{i,j}(t).$$

Hamilton a démontré que ce flot existe pour tout temps. La courbure scalaire le long du flot suit l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta_t R + R(R - r).$$

C'est une équation de type réaction-diffusion et, sous certaines hypothèses de nature topologique, on obtient le contrôle de son gradient au cours du temps (c.f.3.7 ch.3) :

Si $\chi(M) < 0$, alors il existe $C > 0$ dépendant seulement de $g(0)$, tel que

$$\|\nabla^T R(T, x)\|_T \leq \sup_M \|\nabla^0 R(0, x)\|_0 \, e^{\frac{1}{2}rT} e^{2C(\frac{e^{rT}-1}{r})}.$$

Cet estimé est un ingrédient pour montrer la convergence du flot vers une métrique à courbure scalaire constante quand $\chi(M) < 0$, c.f. [CK04].

Nous abordons maintenant une partie clef de notre travail. Le transport parallèle déformé introduit précédemment (comme solution de 0.3), n'a pas été constuit canoniquement. Il est une condition suffisante pour obtenir le théorème 3.2 ch.3 . Nous proposons une autre construction inspirée de la théorie du flot stochastique. C'est l'objet de la section 4 du chapitre 3. Dans cette partie, nous travaillons dans l'espace temps muni d'une connexion produit dépendant d'une famille de métriques. Nous constuisons par transport parallèle une famille de processus (4.2 ch.3). Cette famille est dérivable au sens de la topologie des semimartingales introduite dans [AT98b]. Après dérivation de cette famille de semimartingales, et à une projection près, nous obtenons de manière canonique l'équation fournissant le flot stochastique (4.2 ch.3). Cette équation dépend de la famille de métriques ; c'est la même que l'équation du transport parallèle déformé. Nous pouvons donc nous poser la question de savoir sous quelle condition le flot stochastique est égal au transport parallèle le long du $g(T-t)$-MB. Le théorème 4.4 ch.3 affirme que le flot stochastique est égal au transport parallèle si et seulement si la famille de métriques est solution du flot de Ricci. C'est une caractérisation probabiliste intrinsèque du flot de Ricci.

Toujours dans le cadre du flot de Ricci, nous terminons le chapitre 3 par la donnée d'une martingale intrinsèque. Elle provient de la dérivée covariante du flot stochastique à valeurs dans TM, dérivée au sens de la topologie des semimartingales. La notion de dérivé covariante d'une famille de processus est introduite dans [AT03]. Nous y puiserons principalement le théorème 4.5 qui est une formule de commutation entre la dérivée covariante et la dérivée covariante de Itô. Nous remarquons, qu'après la prise de la trace, apparaît une simplification dans les calculs : il n'y a plus de dérivée covariante du tenseur de Riemman. Nous obtenons ainsi une martingale : c'est celle du théorème 5.1 dans la section 5 du chapitre 3. Cette martingale peut être notée $L(T, x)$. Elle prend ses valeurs dans l'espace tangent en

x et elle est définie sur un intervalle de temps $[0,T]$. Sa $g(T)$ variation quadratique est donnée par :

$$d[L(T,x),L(T,x)]_t = \parallel \mathrm{Ric}^{T-t}(X_t^T(x)) \parallel_{T-t}^2 \, dt.$$

Cette martingale pourrait permettre de comprendre la nature des singularités, ou du moins, en donner une caractérisation probabiliste. En effet, cette variation quadratique explose en 0 quand T tend vers T_c et quand x est un point de singularité du flot de Ricci (ce sont les points où la courbure scalaire explose, c.f. [CK04]).

Dans le chapitre 4, nous étudions le flot par courbure moyenne, principalement celui d'une hypersurface compacte et sans bord de $\mathbb{R}^n$, avec un formalisme similaire à ce qui a été présenté précédemment.
Soit M une variété compacte sans bord de dimension n plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On notera F_0 ce plongement :

$$F_0 : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Le flot par courbure moyenne est défini par :

$$\begin{cases} \partial_t F(t,x) = -H_\nu(t,x)\overrightarrow{\nu}(t,x) \\ F(0,x) = F_0(x). \end{cases} \tag{0.5}$$

où l'on pose $M_t = F(t,M)$ et on identifie M avec M_0 et F_0 avec Id. Dans cette équation (0.5), $\nu(t,x)$ est le vecteur normal unitaire sortant de M_t en $F(t,x)$, et $H_\nu(t,x)$ est la courbure moyenne en $F(t,x)$ sur M_t relativement à $\nu(t,x)$, (i.e. $H_\nu(x) =$ trace $(S_\nu(x))$ où S_ν est la seconde forme fondamentale). Si l'hypersurface de départ M_0 est strictement convexe (la seconde fondamentale forme est définie positive partout), alors les hypersurfaces M_t convergent vers un point en un temps fini, tout en s'arrondissant. Pour une formulation plus précise voir [Hui84]. Une fois que l'on dispose de la famille de difféomorphismes $F(t,.)$ de M sur M_t, on peut par pull-back de la métrique induite sur M_t définir une famille de métriques sur M, $g(t) = F^*(t,.)(\langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{M_t})$. Avec cette réécriture, l'équation (0.5) devient :

$$\begin{cases} \partial_t F(t,x) = \Delta_t F(t,x) \\ F(0,x) = F_0(x) \end{cases} \tag{0.6}$$

où Δ_t est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique $g(t)$. Cette équation est parabolique et la théorie des équations différentielles paraboliques quasilinéaires donne l'existence de solutions sur un petit intervalle de temps. Nous noterons T_c le premier temps de singularité du flot (nous verrons que ce temps est fini et nous en donnerons un majorant). À cette famille de métriques, nous faisons correspondre naturellement un $g(t)$-MB. La proposition 1.3 ch.4 donne une caractérisation probabiliste du flot par courbure moyenne en terme de mouvements browniens.

Si $T < T_c$, x_0 un point de M et $X^T(x_0)$ un $\frac{1}{2}g_{T-t}$-MB partant de x_0 alors :

$$Y_t^T = F(T-t, X_t^T(x_0))$$

est une martingale locale de $\mathbb{R}^{n+1}$. Cette martingale locale est contrainte à être en tout temps t sur l'hypersurface M_{T-t}. La proposition 1.4 ch.4 permet le calcul de sa variation quadratique. On en déduit grâce au corollaire qui suit une borne supérieure du temps d'explosion :

$$T_c \leq \frac{diam(M_0)^2}{2n},$$

où $diam(M_0)$ est le diamètre de M_0. Cette martingale locale est en fait une vraie martingale pour tout temps $T < T_c$.

La section 2 et 3 du chapitre 4 sont dédiés à l'étude "des objets" limites que l'on obtiendrait en considérant des $g(T-t)$-MB pour un temps T de plus en plus proche du temps singulier T_c. Par des critères de tension dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et en utilisant des raisonnements classiques, nous arrivons à montrer que des objets limites existent (c.f 2.5 ch.4). Nous les appellerons des $g(T_c-t)$ mouvements browniens et ils seront indexés sur l'intervalle de temps $]0, T_c]$. Le cas du flot par courbure moyenne d'une sphère est étudié à titre d'exemple dans la proposition 2.6 ch.4 ; on y démontre l'unicité en loi de l'objet limite. L'étude de cette exemple simple mais instructif, a pu être mené directement parce que le flot déforme la sphère homothétiquement. Les métriques $g(t)$ sont alors conformes à la métrique $g(0)$. Cette remarque nous permet de comparer, à un changement de temps près (déterministe), nos objets limites à un mouvement brownien indexé par $]-\infty, 0]$ pour la métrique $g(0)$ (c.f. [ÉS99a],[Arn99]).

Si la variété M_0 est quelconque, les métriques ne sont pas toujours homothétiques. Le raisonnement précédent, utilisé pour la sphère, n'est plus applicable. Néanmoins, nous verrons que si l'hypersurface M_0 est strictement convexe et compacte, le résultat sur l'unicité en loi du processus limite demeure : c'est le théorème 3.8 ch.4, [Coub]. Nous utiliserons principalement des résultats de Huisken [Hui84] sur le flot de courbure moyenne normalisé $\tilde{F}$. Cette normalisation consiste à modifier le flot de façon à ce que le volume reste constant en opérant des dilatations. Ce nouveau flot a un temps de vie infini. Nous bornerons inférieurement par une constante strictement positive les rayons d'injectivités de $\tilde{g}(t)$ pour des temps assez grands (c.f. la preuve du lemme 3.4 ch.4). En ralentissant le temps et en zoomant l'espace, nous donnons une correspondance entre "nos" $g(T_c - t)$ et des $\tilde{g}$ mouvements browniens. Nous étendrons ensuite la construction de couplage miroir, introduite par Kendall et Cranston dans ([Ken86],[Cra91]), au cas des métriques dépendant du temps. Nous déduirons de cette suite de construction le résultat principal de ce chapitre, à savoir le théoréme 3.8 ch.4. Nous déduisons de ce résultat l'unicité des solutions d'une équation aux dérivés partielles de type réaction diffusion sans point de départ, mais avec une condition sur la moyenne de la solution.

Cette équation aux dérivés partielles est celle de la densité du $g(T_c-t)$-MB , pour $t>0$:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial t}h(t,y)+H^2(T_c-t,y)h(t,y)=\frac{1}{2}\Delta_{g(T_c-t)}h(t,y)\\ \\ \int_M h(T_c,y)d\mu_0=1\end{array}\right. \tag{0.7}$$

La proposition 3.9 ch.4 donne l'unicité de la solution de cette équation, quand (M,g) est une hypersurface compacte, strictement convexe et isométriquement plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La famille de métriques $g(t)$ provient du flot par courbure moyenne et T_c est le temps d'explosion du flot. La condition $\int_M h(T_c,y)d\mu_0=1$ peut être remplacée de manière équivalente par $\int_M h(t,y)d\mu_{T_c-t}=1$ avec $t\in]0,T_c]$.

Nous abordons maintenant le chapitre 5. Soit (M,g) une variété Riemanienne, L un opérateur elliptique sans terme constant et $u\mapsto\varphi(u)$ une courbe C^1 à valeurs dans M. Nous construisons une famille de L-diffusions $X_t(u)$ (continue en les deux paramètres) telle que $X_0(u)=\varphi(u)$, qui pour tout t fixé, soit dérivable en u, et tel que $\partial_u X_t(u)$ soit localement uniformément borné. Par exemple, si $L=\frac{1}{2}\Delta$, où Δ est le Laplacien usuel dans $\mathbb{R}^n$ et $B_t(0)$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, alors $X_t(u)=\varphi(u)+B_t(0)$ convient. Quand l'opérateur L n'est pas constant, la construction d'une telle famille de diffusions paraît moins claire. En découpant la courbe φ en petits morceaux de taille ν et en réalisant des couplages parallèles de diffusions de proche en proche sur chaque morceaux, nous obtenons à la limite, quand $\nu\to 0$, la famille de diffusions $X_t(u)$ avec les propriétés énoncées. Une telle famille sera appelée L diffusion horizontale dans l'espace des courbes C^1, et elle satisfera l'équation suivante :

$$\partial_u X_t(u)=W(X(u))_t(\dot\varphi(u)), \tag{0.8}$$

où $W(X(u))$ est le transport parallèle déformé le long de $X(u)$. Ici la métrique est telle que l'opérateur L s'écrive $L=\frac{1}{2}\Delta_g+Z$, où Z est un champ de vecteurs sur M. On supposera que la variété munie de cette métrique est complète.

De plus , $X(u)$ satisfait l'équation différentielle de Itô suivante :

$$dX_t(u)=P_{0,u}^{X_t(\cdot)}\,d_mX_t^0+Z_{X_t(u)}\,dt, \tag{0.9}$$

où $P_{0,u}^{X_t(\cdot)}:T_{X_t^0}M\to T_{X_t(u)}M$ est le transport parallèle le long de la courbe C^1 :

$$\begin{array}{rcl}[0,u] & \mapsto & M\\ v & \mapsto & X_t(v).\end{array}$$

Pour une formulation plus précise, voir le théorème 2.1 ch.5 ou [ACT]. Cette construction permet de retrouver des formules de type Bismut (sans filtrer les bruits superflu du flot stochastique, voir [EY93], [ELJL99]). Si par exemple la variété de départ (M, g) est compacte à courbure de Ricci strictement positive et que $L = \Delta_g$, on remarque que la longueur de la courbe $u \to X_t(u)$ rétrécit exponentiellement avec le temps.

Puis dans une seconde partie, nous nous intéresserons à la même construction quand l'opérateur elliptique $L(t)$ est inhomogène. On obtient ainsi une famille de L_t-diffusions $X_t(u)$. Elle vérifie les mêmes équations que précédemment, à la seule différence près, que le transport parallèle déformé est celui introduit dans le chapitre 3. La construction se fera aussi par des transports parallèles de proche en proche, mais ces transports parallèles dépendront de la métrique $g(t)$ en chaque temps t, voir le théorème 3.1 ch.5.

Dans la section 4 du chapitre 5, nous donnons une application de la construction précédente. On démontre sous certaines hypothèses la décroissance de la distance de Monge-Kantorovich (avec une bonne classe de fonctions coûts) entre deux mesures de probabilités évoluant suivant l'équation de la chaleur : c'est le théorème 4.1 ch.5.

Notons $L_t = \frac{1}{2}\Delta_t + Z_t$, où Δ_t est l'opérateur de Laplace associé à une famille C^1 de métriques $g(t)$ et Z_t est un champ de vecteurs dépendant du temps. On supposera que la variété $(M, g(t))$ est complète pour tout temps et que les L_t diffusions sont de temps de vie infini. Notons également $\rho(t, ., .)$ la distance Riemanienne pour la métrique $g(t)$, et $c(t, ., .) = \varphi(\rho(t, ., .))$ une fonction coût, où φ est une fonction croissante de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. À cette fonction coût nous associons la distance de Monge-Kantorovich entre deux mesures de probabilité μ et ν sur M, définie par :

$$\mathcal{W}_{c,t}(\mu, \nu) = \inf_{\eta \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{M \times M} c(t, x, y) d\eta(x, y), \tag{0.10}$$

où $\Pi(\mu, \nu)$ est l'ensemble des mesures de probabilités sur $M \times M$ de marginales μ et ν. Dans le cas où la fonction coût est une puissance de la distance, on notera plus simplement la distance de Wasserstein associée à p pour $p > 0$:

$$\mathcal{W}_{p,t}(\mu, \nu) = \left(\mathcal{W}_{\rho^p,t}(\mu, \nu)\right)^{1/p}. \tag{0.11}$$

Nous donnons trois exemples d'illustration de ce théorème :

– *Exemple :* Soit (M, g) une variété telle que $Ric_g \geq kg$ pour une constante $k > 0$, $\rho(., .)$ la distance Riemanienne pour la métrique g et $L = \frac{1}{2}\Delta_g$. Soit deux mesures de probabilité μ et ν sur M, on notera μ_t et ν_t les solutions de l'équation de la chaleur associées à L alors, on a le résultat de contraction :

$$\mathcal{W}_p(\mu_t, \nu_t) \leq e^{-kt/2}\, \mathcal{W}_p(\mu, \nu). \tag{0.12}$$

Dans ce cas, la variété est compacte. Il y a donc une mesure invariante et la convergence pour n'importe quelle mesure de départ vers cette mesure invariante se fait exponentiellement.

– *Exemple :* Soit (M,g) une variété Riemanienne. On supposera que $L = \frac{1}{2}\Delta_g + \nabla V$, où V est une fonction C^1 sur M, et qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $Ric_g + Hess_g V \geq kg$. Soit deux mesures de probabilité μ et ν sur M ; on notera μ_t et ν_t les solutions de l'équation de la chaleur associées à L alors on a le résultat de contraction :

$$\mathcal{W}_p(\mu_t, \nu_t) \leq e^{-kt/2}\, \mathcal{W}_p(\mu, \nu). \tag{0.13}$$

On remarquera que $Ric_g + Hess_g V$ est la courbure de Ricci associée à l'opérateur L au sens de Bakry-Emery [BÉ85]. Là encore il y a convergence vers une mesure invariante et la vitesse est contrôlée.
L'exemple qui suit nécessite entièrement la construction effectuée précédemment. Ici pour faire un lien avec les chapitres précédents, nous nous intéresserons au flot de Ricci rétrograde sur une variété M (i.e. un flot de Ricci suivi par retournement du temps ce qui garantit son existence) :

$$\frac{d}{dt} g(t) = Ric_{g(t)}.$$

Dans ce cas nous disposons d'une famille de métriques $g(t)$ sur M et d'une famille de générateur $L_t = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)}$. Soit deux mesures de probabilité μ et ν sur M. Si nous les développons le long d'un $g(t)$-mouvement brownien, cela produit une équation sur les densités de type réaction diffusion :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} h(t,y) = \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)} h^x(t,y) - \dfrac{1}{2} h(t,y) R(t,y) \\ \overset{\mathcal{L}}{\lim_{t\to 0}} \quad h(t,y) dvol_t = \mu. \end{cases}, \tag{0.14}$$

où $R(t,y)$ est la courbure scalaire au point y pour la métrique $g(t)$ et $dvol_t$ est la forme volume associée à cette métrique. On notera aussi $h(t,y)dvol_t = \mu_t = \mu P_t$ le développement de la mesure μ le long de l'équation de la chaleur, dans le sens où, μ_t suit aussi l'équation de la chaleur sur les n-formes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mu_t = \dfrac{1}{2}\Delta_t \mu_t \\ \mu_0 = \mu. \end{cases} \tag{0.15}$$

De la même façon nous construisons la famille $\nu_t = \nu P_t$. Dans ce cas sans hypothèse sur la courbure de Ricci de la variété $(M, g(0))$, nous obtenons la contraction des distances de Wasserstein pour les fonctions coût rappelées précédemment, à savoir :

$$t \mapsto \mathcal{W}_{c,t}(\mu P_t, \nu P_t) \tag{0.16}$$

est décroissante en temps. Ce résultat est une conséquence du théorème 4.4 ch.3.

On retrouve ainsi, avec des méthodes complètement différentes et entièrement probabilistes, un résultat de Lott [Lot07] (utilisant une extension du calcul de Otto), puis de Topping et McCann [CT] (utilisant l'interpolation déplacement de McCann) sur la contraction des distances de Wasserstein (d'ordre 2). En réalité, nous étendons ce résultat à une plus large gamme de fonction coût. De plus nous obtenons un critère pour des familles de métriques plus générales, en comparant la dérivée de la famille de métriques au tenseur de Ricci. Nous envisageons aussi le cas des opérateurs de la forme $L_t = \frac{1}{2}\Delta_t + Z(t)$ avec $Z(t)$ un champ de vecteurs quelconque (voire théorème 4.1 ch.5).

Chapitre 2

Introduction à l'analyse stochastique sur les variétés

Comme l'a découvert Schwartz, le cadre de la géometrie d'ordre deux est le cadre naturel pour envisager de manière intrinsèque les semimartingales à valeurs dans les variétés. Pour ne pas oublier les sources du fleuve qui sera emprunté, ce court chapitre aura pour vocation de rappeler les fondements de la géometrie stochastique : les vecteurs d'ordre deux, les formes d'ordre deux, les semimartingales à valeurs dans une variété, ainsi que les intégrales de formes d'ordre deux le long de semimartingales. Il est issu en grande partie de [Sch82], [Mey81], [Éme89] et [Eme00]. Le lecteur averti pourra sans peine faire l'impasse de ce chapitre.

1 La géométrie d'ordre deux, cadre de la géométrie stochastique

1.1 Vecteur tangent du second ordre (diffuseur), forme cotangente d'ordre deux (codiffuseur)

Les définitions de variété et d'espace tangent seront supposées connues. Pour plus de détails sur cette section le lecteur pourra se reporter à [Eme00] ; les notations y seront les mêmes, ainsi que les définitions.

Définition 1.1 *Soient V une variété de classe C^p pour $2 \leq p$ de dimension d et x un point de V. Une application L de $C^p(V)$ dans $\mathbb{R}$ est un diffuseur au point x s'il existe une carte locale au voisinage de x, $(v^1, ..., v^d)$ des réels*

21

$L^1, ..., L^d, L^{11}, L^{12}, ..., L^{dd}$ *tels que pour toute* $f \in C^p(V)$*, on ait* $L(f) = L^{ij} D_{ij} f(x) + L^k D_k f(x)$.

Remarque : Il est clair que L caractérise et est caractérisée par $d + \frac{d(d+1)}{2}$ éléments. Les nombres L^k et $\frac{1}{2}(L^{ij} + L^{ji})$ sont appelés les coefficients de L dans la carte.
Soit W^α une autre carte au voisinage de x, la formule de changement de carte est donnée par :

$$L^\gamma = L^{ij} D_{ij} W^\gamma(x) + L^k D_k W^\gamma(x)$$
$$L^{\alpha\beta} = L^{ij} D_i W^\alpha(x) D_j W^\beta(x).$$

À ce stade, il n'y a pas de notion de partie d'ordre un d'un diffuseur (cela nécessitera une notion supplémentaire : les connections, qui seront introduites dans la section suivante), mais comme le montrent les deux formules précédentes, il y a une notion de diffuseur sans partie d'ordre deux, ce sont les vecteurs tangents.
De la même manière que pour les vecteurs tangents, par une application C^p entre deux variétés, on peut définir une notion de push forward de diffusion.

Définition 1.2 *L'ensemble de tous les diffuseurs en* x *sera noté* $\mathbb{T}_x V$ *ou* $\tau_x V$*, et on définira le fibré osculateur* $\mathbb{T}V := \sqcup_{x \in V} \mathbb{T}_x V$*. De même que pour les champs de vecteurs, il y a une notion de champ de diffuseurs qui forme un module sur l'algèbre des fonctions* $C^{p-2}(V)$*.*

Exemple : Si A, B sont deux champs de vecteurs sur V alors AB est un champ de diffuseurs sur V.
De manière analogue à la construction des covecteurs, on définit un codiffuseur en x, comme étant un élément du dual de l'espace des diffuseurs en x. On notera l'ensemble des codiffuseurs $\mathbb{T}_x^* V$. On considèrera le fibré coosculateur qui est la réunion disjointe sur $x \in V$ des $\mathbb{T}_x^* V$. Comme pour les vecteurs tangents, un exemple simple de codiffuseur est donné par l'évaluation en une fonction, i.e. soient $f \in C^p(V)$ et $L \in \mathbb{T}_x V$, on notera $d^2 f(x)(L) = L(f)(x)$. Tout codiffuseur en x s'écrira de cette manière. L'injection de $T_x V$ dans $\mathbb{T}_x(V)$ s'inversera en passant au dual. Il y aura une notion de restriction de codiffuseur à l'espace tangent ; on la notera $\mathcal{R}$. Prenons deux fontions $f, g \in C^p(V)$, alors df et dg sont deux éléments de T^*V. On définit $df.dg \in \mathbb{T}_x V$ à la manière du carré du champ

$$df.dg(x) = \frac{1}{2}(d^2(fg)(x) - f(x) d^2 g(x) - g(x) d^2 f(x)).$$

Cette construction s'étend au produit de deux covecteurs. On a alors :

$$\mathcal{R}(d^2 f(x)) = df(x),$$

$$\mathcal{R}(df.dg(x)) = 0.$$

Le deuxième point se voit aisément par linéarité de la restriction et par la formule $d(fg) = fdg + gdf$.

Il existe aussi une notion de différentielle symétrique de covecteur, et contrairement au diffuseur, il y a une notion de codiffuseur purement d'ordre deux dans le sens où leur restriction est nulle. Le sous espace des codiffuseurs purement d'ordre deux en x ($Ker\mathcal{R}$) est linéairement engendré par les $\rho.\rho$ où $\rho \in T_x^*V$. Il existe une bijection entre le sous espace des codiffuseurs purement d'ordre deux et les formes quadratiques sur T_xM ; on la notera $\mathcal{Q}$ et elle vérifiera $\mathcal{Q}(\rho.\rho) = \rho \otimes \rho$.

La dualité entre codiffuseur et diffuseur s'exprime de la même manière que celle entre vecteur et covecteur.

1.2 Semimartingale à valeurs dans une variété et intégrale de formes d'ordre deux (codiffuseur) le long de semimartingales

Le théorème de Itô donne une caractérisation des semimartingales à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sans utiliser la structure d'espace vectoriel : soient une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $X = (X^1, ..., X^n)$ une semimartingale pour un certain espace probabilisé filtré à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors $f(X)$ est une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on a la décomposition de Doob-Meyer suivante :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t D_k f(X_t) dX_t^k + \frac{1}{2}\int_0^t D_{ij} f(X_t) d[X^i, X^j]_t. \tag{1.1}$$

Ce théorème permet de redéfinir les semimartingales, à la différence très notable que, seule la structure différentielle est utilisée. C'est le premier pas vers une possible extension aux variétés de la notion de semimartingale. La définition suivante est due à Schwartz (1980).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions standards de continuité à droite de la filtration, où $\mathcal{A}$ est supposée complète et les tribus $\mathcal{F}_t$ contiennent les évènements négligeables de $\mathcal{A}$.

Définition 1.3 *Soit V une variété de classe C^2 au moins et X un processus à valeurs dans V. On dira que X est une semimartingale (pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$), si pour toutes fonctions $f \in C^2(V)$, $f(X)$ est une semimartingale réelle.*

On peut réécrire de façon symbolique l'équation ci-dessus (1.1) comme :

$$d(f(X_t) = D_k f(X_t) dX_t^k + \frac{1}{2} D_{ij} f(X_t) d[X^i, X^j]_t,$$

et l'envisager de manière formelle comme l'action du codiffuseur $d^2 f$ en X_t sur le "diffuseur" $\mathcal{D}X := dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}$. L'intégrale d'un codiffuseur le long

d'une semimartingale donnera un sens plus rigoureux à ce "diffuseur".
À partir de maintenant, on désignera par V une variété de classe C^2 au moins et X sera une semimartingale à valeurs dans V.

Définition 1.4 *Un processus θ à valeurs dans $\mathbb{T}^*(V)$ sera dit au-dessus de X si $\theta_t(\omega) \in \mathbb{T}_{X_t(\omega)}(V)$. Cette définition sera étendue pour tout autre processus à valeurs dans un fibré de V.*

Théorème 1.1 *Il existe une et une seule application linéaire $\Theta \mapsto \int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ de tous les processus prévisibles à valeurs dans $\mathbb{T}^*(V)$ (localement bornés) au dessus de X dans l'espace des semimartingales réelles vérifiant :*

- *$\forall f \in C^2(V)$,*

$$\int \langle d^2 f, \mathcal{D}X \rangle = f(X) - f(X_0),$$

- *pour tout processus réel, prévisible localement borné H,*

$$\int \langle H\Theta, \mathcal{D}X \rangle = \int H d(\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle)$$

On appellera $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ l'intégrale du codiffuseur Θ le long de X. Si Θ et Ξ sont deux processus prévisibles localement bornés à valeurs dans $\mathbb{T}^*(V)$ au-dessus de X,

$$\frac{1}{2}[\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle, \int \langle \Xi, \mathcal{D}X \rangle] = \int \langle \mathcal{R}\Theta . \mathcal{R}\Xi, \mathcal{D}X \rangle.$$

Ce théorème a de nombreuses extensions, mais sa première vertu est celle donnée ci-dessus, i.e donner un sens plus rigoureux à ce "diffuseur", car on peut intégrer contre lui un codiffuseur. Il permettra de donner, grâce à la différentielle symétrique d'un covecteur (que l'on notera d^s), une notion d'intégrale de Stratonovitch d'un covecteur le long d'une semimartingale. Le théorème de plongement de Whitney pourrait tout aussi bien permettre de définir cet objet, à la différence que, l'indépendance par rapport au plongement est à écrire.

Définition 1.5 *Soit ρ un champ de covecteurs de classe C^1, on définit :*

$$\int \langle \rho, \delta X \rangle = \int \langle d^s \rho, \mathcal{D}X \rangle.$$

Ce processus sera parfois noté $\int \langle \rho, *dX \rangle$.

Pour $f \in C^2(V)$ et ρ un champ de covecteurs, la différentielle symétrique vérifie $d^s(df) = d^2 f$, $\mathcal{R}(d^s \rho) = \rho$ et $d^s(f\rho) = f d^s \rho + df.\rho$. Cette construction ne se fait pas fibre par fibre, mais nécessite un voisinage afin de dériver.

L'intégrale de Stratonovitch s'étend, dans le cas d'une variété plus régulière C^3, en une unique application linéaire $\Sigma \mapsto \int \langle \Sigma, \delta X \rangle$ de l'ensemble des semimartingales à valeurs dans $T^*(V)$ au dessus de X dans l'espace des semimartingales réelles vérifiant les propriétés :

– extension de la définition précédente,
– associativité, si Z est une semimartingale réelle prévisible localement bornée :

$$\int Z\delta(\int \langle \Sigma, \delta X\rangle) = \int \langle Z\Sigma, \delta X\rangle;$$

où le terme de gauche de l'égalité précédante est l'intégrale de Stratonovitch habituelle.

Dans la formule (1.1) et dans sa forme revisitée dans le cadre des semimartingales à valeurs dans une variété $\int \langle d^2 f, \mathcal{D}(X)\rangle$, il n'a pas été donné la décomposition de Doob-Meyer de $f(X)$ de façon intrinsèque. Cela nécessitera une décomposition canonique d'un diffuseur en une partie d'ordre un et une partie en un sens purement d'ordre 2, ce qui en l'état actuel des choses est impossible ! Une structure supplémentaire est nécessaire ; ce sera celle de connexion.

1.3 Connexion, intégrale de Itô et martingale à valeurs dans une variété

La notion de semimartingale a été étendue aux processus à valeurs dans une variété. La section qui suit définira celle de martingale à valeurs dans une variété, sorte de déplacement aléatoire "uniforme" relative à une géométrie. Dans cette section la variété V sera supposée de classe C^2 au moins.

Définition 1.6 *Soit x un point de V, une connexion en x est une application linéaire de l'espace des diffuseurs $\mathbb{T}_x V$ dans l'espace tangent $T_x V$, dont la restriction à l'espace tangent $T_x V$ est l'identité. On la notera souvent Γ.*

Cette connexion est caractérisée par le choix de coefficients Γ_{ij}^k tels que $\Gamma(D_{ij}) = \Gamma_{ij}^k D_k$. Ce sont les coefficients de Christoffel de la connexion Γ. La symétrie en (i, j) des coefficients de cette connexion est reliée au fait que les connexions considérées ici sont celles de la géométrie différentielle classique qui sont sans torsion. L'application duale de Γ sera notée Γ^*.

Définition 1.7 *Soit Γ une connexion en x sur V et f une fonction C^2 sur V. Le codiffuseur $d^2 f - \Gamma^* df(x)$ est appelé Hessienne de f en x et est noté $Hess_\Gamma f(x)$ pour montrer sa dépendance en la connexion. C'est un codiffuseur purement d'ordre deux, dans le sens où $\mathcal{R} Hess_\Gamma f(x) = 0$, donc identifiable par $\mathcal{Q}$ en une application bilinéaire symétrique sur $T_x V \oplus T_x V$.*

Remarque : Le lien entre cette définition de connexion et la définition usuelle des connexions (celle des connexions sans torsion de la géométrie différentielle), ayant les mêmes symbôles de Christoffel, est le suivant :

– soit A, B deux champs de vecteurs, alors $\nabla_A B(x) = \Gamma(AB)$;
– $\mathcal{Q}Hess_\Gamma f(x)(A,B) = \nabla_A df(B)(x)$.

On omettra souvent $\mathcal{Q}$ dans cette identification.

Soit X une semimartingale à valeurs dans V supposée munie d'une connexion Γ. Le "diffuseur" $\mathcal{D}X$, auquel on a donné sens par intégrale d'un codiffuseur, s'écrit symboliquement :

$$dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}.$$

Toujours symboliquement :

$$\Gamma(\mathcal{D}X) = (dX^k + \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij} d[X^i, X^j]) D_k,$$

est un "vecteur" tangent (qui vérifie les mêmes formules de changement de carte) et pour lequel la décomposition de Doob-Meyer sera intrinsèque. Comme précédemment l'intégration d'un champ de covecteur donnera sens à ce "vecteur". On arrive à l'intégrale de Itô dans une variété.

Définition 1.8 *Soit Σ un processus prévisible à valeurs dans T^*V localement borné et au-dessus de X. On appelle intégrale de Itô de Σ le long de X, notée $\int \langle \Sigma, d^\nabla X\rangle$, la semimartingale $\int \langle \Gamma^* \Sigma, \mathcal{D}X\rangle$. Symboliquement :*

$$d^\nabla X = (dX^k + \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij} d[X^i, X^j]) D_k,$$

est la Γ partie d'ordre un de $\mathcal{D}X$.

Comme pour les intégrales de Stratonovitch, la covariation quadratique de deux intégrales de Itô s'exprime par :

$$\frac{1}{2}[\int \langle \Sigma, d^\nabla X\rangle, \int \langle \Theta, d^\nabla X\rangle] = \int \langle \Sigma.\Theta, \mathcal{D}X\rangle;$$

et si H est un processus réel prévisible localement borné, la formule d'associativité est donnée par :

$$\int \langle H\Sigma, d^\nabla X\rangle = \int H d(\int \langle \Sigma, d^\nabla X\rangle),$$

où d représente la différentielle d'Itô pour un processus réel.

Soit $f \in C^2(V)$ et X une semimartingale à valeurs dans V, la formule d' Itô géométrique dans V peut alors s'écrire :

$$f(X) = f(X_0) + \int \langle df, d^\nabla X\rangle + \int \langle Hess_\Gamma, \mathcal{D}X\rangle. \tag{1.2}$$

Les objets généralisant les martingales locales à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ aux cas des variétés sont les martingales ayant pour définition :

Définition 1.9 *Une semimartingale X à valeurs dans V est une martingale si pour tout processus prévisible Σ localement borné à valeurs dans T^*V et au dessus de X, l'intégrale $\int\langle \Sigma, d^\nabla X\rangle$ est une martingale locale.*

Le fait qu'une semimartingale soit une martingale est une caractéristique locale. Dans la définition précédente, il est nécessaire et même suffisant d'utiliser comme formes tests, les formes déterministes df où f est lisse et a un support compact. Dans le cas des variétés à carte globale ou des sous variétés de $\mathbb{R}^n$, la propriété d'être une martingale s'exprime aisément. Il en est de même des diffusions associées à un opérateur d'ordre deux sans terme constant, i.e. à un champ de diffuseurs.

2 Équations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont une extension naturelle des équations d'évolutions usuelles. On leurs rajoute une évolution aléatoire, afin de pallier le manque de connaissance de tous leurs paramètres, leurs influences, leurs nombres possiblement élevés. Ces équations, dans le cadre où la variété est $\mathbb{R}^n$, permettent de modéliser de nombreux phénomènes. C'est une théorie riche dans laquelle nous puiserons un grand nombre de résultats. Nous renvoyons pour les définitions, résultats d'existence et propriétés à : [IW89], [RY99],[SV06]. La formule de Itô dans $\mathbb{R}^n$ est une forme de lecture d'une semimartingale à travers une fonction C^2 (dans certains cas moins régulière, voire la formule de Tanaka). Elle détermine les coefficients de l'EDS de $f(X)$ quand celle de X est connue (dans une carte globale) et que f est C^2. Pour dire les choses d'une autre manière, une solution X d'une EDS est caractérisée et caractérise les intégrales de df le long de X, à la différence près que seule la structure différentielle de $\mathbb{R}^n$ intervient et non plus sa structure vectorielle. Ce sera le point de départ de la définition d'une solution d'EDS intrinsèque dans une variété.

2.1 Équation différentielle stochastique extrinsèque

Dans le cadre des variétés différentielles, on peut considérer des EDS du type :

$$*dX_t = A_\alpha(X_t) * dZ_t^\alpha, \tag{2.1}$$

où $A_\alpha, \alpha \in [1..m]$ sont des champs de vecteurs sur M et Z^α sont des semimartingales continues à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les solutions de ces équations sont définies à un temps d'explosion près, comme étant celles qui vérifient : pour tout $f \in C^2(M)$

$$\int_0^t \langle df, *dX\rangle = \int_0^t (A_\alpha f)(X) * dZ^\alpha.$$

On peut utiliser le théorème de Whitney : existence d'un plongement de la variété M de dimension n dans un $\mathbb{R}^k$ avec $k \geq 2n+1$ ou bien le théorème de Nash qui garantit l'existence d'un plongement isométrique dans $\mathbb{R}^k$ avec $k \geq n^2+5n+3$ quand M est munie d'une structure Riemmanienne. Ces plongements permettent, après extension à l'espace ambiant des champs de vecteurs, de garantir l'existence de solutions de cette EDS sur M [IW89], [Elw88],[Hsu02]. Dans ces ouvrages, il y a aussi un bon nombre d'exemples et d'applications remarquables de ces constructions (des résultats d'analyse, de géométrie Riemmanienne et de topologie).

Les EDS envisagées dans ce cas dépendent de champs de vecteurs lisses. De plus, il y a une notion de flot de difféomorphisme associé [IW89], [Elw88], [Kun90] dont nous reparlerons plus tard.

2.2 Équation différentielle stochastique intrinsèque

Dans le cadre rappelé plus tôt, c'est à dire celui de la geométrie d'ordre deux, il a été constuit deux notions de différentielle, $\mathcal{D}X$ et $*dX$ où X est une semimartingale sur M, ne dépendant que de la structure différentielle de M. À la donnée d'une connexion sur M (ce qui est toujours possible) une autre différentielle a été considérée : celle de Itô $d^\Gamma X$. À ces trois différentielles sont associés trois types d'équations différentielles stochastiques. Nous renvoyons à [Éme89] et [Éme90a] pour les définitions et les preuves.

Les EDS présentées précédemment (2.1), font correspondre à une semimartingale de $\mathbb{R}^m$, où m est le nombre de champs de vecteurs sur M utilisés dans (2.1), une semimartingale sur M. De plus, Schwartz a montré que toute semimartingale à valeurs dans M est solution d'une EDS de cette forme (en utilisant le plongement de Whitney, le nombre maximal de champs de vecteurs nécessaires correspond à la dimension minimale de plongement). Les EDS que nous allons considérer sont en un certain sens plus intrinsèques. Elles engloberont les précédentes et demanderont dans certains cas moins de régularité sur les "champs" qui pourront dépendre de t et ω. Elles transfèreront des équations différentielles ordinaires (EDO) entre deux variétés tandis que à priori, les précédentes transfèrent des (EDO) de $\mathbb{R}^m$ dans M. Surtout les équations différentielles stochastiques intrinsèques donnent souvent des expressions plus concises et rendent certaines relations plus claires.

Soit M et N deux variétés différentielles et un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions usuelles de continuité à droite et de complétude.

Définition 2.1 *Un opérateur de Schwartz de M dans N est une famille $(f(x,y))_{(x,y)\in M\times N}$ où tous $f(x,y)$ sont des morphismes de Schwartz de $\tau_x M \to \tau_y N$ (opérateur linéaire vérifiant des conditions de compatibilités c.f. page 85 [Éme89]), dépendant de manière lisse de (x,y). On notera $\mathcal{SM}(M,N)$ l'ensemble des opérateurs de Schwartz de M à valeurs dans N.*

Définition 2.2 *Soit X une semimartingale de M et $f \in \mathcal{SM}(M, N)$. Une solution de :*

$$\mathcal{D}Y = f(X, Y)\mathcal{D}X, \tag{2.2}$$

est une semimartingale à valeurs dans N telle que, pour tout codiffuseur Θ dans N (ou forme de second ordre), on ait :

$$\int \langle \Theta, \mathcal{D}Y \rangle = \int \langle f^*(X, Y)\Theta, \mathcal{D}X \rangle, \tag{2.3}$$

où $f^*(x, y) : \tau_x^* N \to \tau_y^* M$ est l'adjoint de $f(x, y) : \tau_x M \to \tau_y N$.

Remarque : Pour une généralisation du théorème qui suit, avec une régularité moindre sur f (localement Lipschitz) et une possible dépendance en t et ω (de façon localement bornée et de manière prévisible), on peut se référer à [Éme90a].

Théorème 2.1 *Soit X une semimartingale de M, $f \in \mathcal{SM}(M, N)$ et Y_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans N. Il existe un temps d'arrêt prévisible $\zeta > 0$ et une semimartingale Y à valeurs dans N définie sur l'intervalle stochastique $[0, \zeta[$ telle que sa valeur initiale soit Y_0 et qui soit solution de (2.2). Cette solution explose (sort de tout compact) au temps ζ sur l'événement $\zeta < \infty$ (c'est l'analogue du temps d'explosion déterministe pour une EDO avec des coefficients localements Lipschitz). De plus cette solution est maximale : si (ζ', Y') est une autre solution de (2.2) dans le sens où ζ' est un temps d'arrêt prévisible et Y' est une solution de (2.2) de valeur initiale Y_0 définie sur $[0, \zeta[$, alors $\zeta' \leq \zeta$ et $Y' = Y$ sur $[0, \zeta'[$ (p.s).*

Remarque : La preuve de ce théorème repose en grande partie sur celle des EDS dans $\mathbb{R}^n$ et le théorème de Whitney. Si nous avons une sous variété N' de N et un opérateur de Schwartz dont l'image en chaque point est contenue dans $\tau N'$, alors la solution de l'EDS correspondante sera dans N', si sa condition initiale Y_0 est dans N', i.e. respecte le même résultat que pour les EDO.

Les EDS considérées précédemment sont d'ordre deux, $\mathcal{D}X$ étant vu comme un "codiffuseur". Nous allons donner des EDS d'ordre un dépendant de la différentielle de Stratonovich $*dX$. Cela nous permettra de transférer les équations différentielles du premier ordre bien connues dans le cadre de la géométrie différentielle, à savoir les équations de transport parallèle le long d'une courbe, de développement et d'antidéveloppement de courbe (lorsque la variété sera munie d'une connexion).

Définition 2.3 *Un opérateur de Stratonovich sera une famille $(e(x, y))_{(x,y)\in M\times N}$, où $e(x, y)$ sera une application linéaire de $T_x M$ dans $T_y N$, qui dépend de manière lisse de (x, y). L'opérateur $e^*(x, y) : T_y^* N \to T_x^* M$ sera l'opérateur dual de $e(x, y)$, il aura la même régularité que $e(x, y)$.*

Définition 2.4 *Soit X une semimartingale à valeurs dans M et $e(x,y)$ un opérateur de Stratonovich. On dira que Y une semimartingale de N est une solution de l'équation de Stratonovich :*

$$*dY = e(X,Y) * dX, \tag{2.4}$$

si pour toutes formes différentielles α sur N, on a :

$$\int \langle \alpha, *dY \rangle = \int \langle e^*(X,Y)\alpha, *dX \rangle. \tag{2.5}$$

L'intégrale de droite a un sens, car $e^*(X,Y)\alpha$ est une semimartingale à valeurs dans T^*M au dessus de X. Le théorème d'existence de solutions précédant a son analogue :

Théorème 2.2 *Soit X une semimartingale de M, $e(x,y)$ un opérateur de Stratonovich et Y_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans N. Il existe un temps d'arrêt prévisible $\zeta > 0$ et une semimartingale Y à valeurs dans N définie sur l'intervalle stochastique $[0, \zeta[$ telle que sa valeur initiale soit Y_0 et qui soit solution de (2.4). Cette solution explose (sort de tout compact) au temps ζ sur l'événement $\zeta < \infty$ (c'est l'analogue du temps d'explosion déterministe pour une EDO avec des coefficients localements Lipschitz). De plus, cette solution est maximale : si (ζ', Y') est une autre solution de (2.4) dans le sens où ζ' est un temps d'arrêt prévisible et Y' est une solution de (2.4) de valeur initiale Y_0 définie sur $[0, \zeta[$, alors $\zeta' \leq \zeta$ et $Y' = Y$ sur $[0, \zeta'[$ (p.s).*

Remarque : On peut généraliser le théorème précédant au cas où $e(x,y)$ est seulement C^1 et de différentielle localement Lipschitz.
Remarque : La différentielle de Stratonovich suit les même règles de calculs que les différentielles premières de la géométrie différentielle, i.e.

$$*d(f(X)) = df_X * dX.$$

Les équations ordinaires du premier ordre entre deux variétés peuvent se transférer au niveau des semimartingales, i.e. une EDO entre deux variétés donne lieu à une EDS (c.f. théorème 8 [Éme90a]). Ainsi, il y a une notion de transport parallèle comme celle sur les courbes dans une variété munie de connexion (c.f. [Éme89], [Elw88],[Éme90a],[Hsu02]). Cette construction permet comme dans le cas des courbes d'avoir un repère mobile ; c'est un outil fondamental en géométrie Riemanienne et sa généralisation aux semimartingales se révèle l'être tout autant. Des résultats d'approximation des solutions de l'EDS (2.4) par interpolation de la semimartingale X sont donnés dans [Éme89]. Leurs utilités ne sont pas que numériques, elles permettront par exemple de démontrer que les équations de développement et antidéveloppement stochastique (dans le cas où les variétés sont munies de connexion) sont les mêmes que l'on utilise les EDS de Stratonovich vues précédemment ou les EDS de Itô que nous allons maintenant définir.

Comme dans le cas du transfert de Stratonovich, le transfert de Itô transformera les EDO en EDS, mais cette fois relativement aux différentielles de Itô. On supposera désormais que M et N sont munies de connexion, respectivement ∇^M et ∇^N, que l'on supposera sans torsion.

Définition 2.5 *Soit X (resp Y) une semimartingale dans M (resp N), pour tout (t, ω), $e_t(\omega) : T_{X_t(\omega)}M \to T_{Y_t(\omega)}N$ une application linéaire et $e_t^*(\omega)$ son application duale. On dira que Y est solution de l'EDS de Itô :*

$$d^{\Gamma^N} Y_t = e_t(\omega) d^{\Gamma^M} X_t \tag{2.6}$$

si pour tout α forme différentielle d'ordre un sur N, on a :

$$\int \langle \alpha, d^{\Gamma^N} Y_t \rangle = \int \langle e^* \alpha, d^{\Gamma^M} X_t \rangle.$$

Remarque : On constatera d'après la définition donnée pour les martingales à valeurs dans les variétés que, si X est une martingale, il en va de même pour Y.

Comme le montre le théorème ci-dessous, la régularité en les coefficients est moindre que pour les autres type d'EDS considérés précédemment, mais cela a nécessité une structure supplémentaire, celle de connexion. Nous omettrons de rappeler la notion d'EDS contrainte, qui pourtant se révèle être une notion importante pour comprendre pourquoi un transport parallèle reste au dessus d'une semimartingale.

Théorème 2.3 *Si le processus e est prévisible et si Y_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable, alors l'EDS de Itô (2.6) admet une unique solution maximale (ζ, Y) valant Y_0 au temps initial.*

Les liens et les différences entre les deux EDS de type 2.4 et 2.6 sont l'objet de la section 6 de [Éme90a]. Nous ferons l'économie (de papier) de les rappeler, bien que leurs importances soient certaines ! Ces liens sont dus à un schéma d'approximation des intégrales de Itô qui, dans certains cas, se retrouve être le même que le schéma d'aproximation des intégrales de Stratonovich. C'est le cas si l'EDO d'où proviennent les EDS (2.4 et 2.6) envoie les géodésiques de (M, ∇_M) sur celles de (N, ∇_N).

3 Quelques applications du calcul stochastique devenues classiques

Soit (M, g) une variété Rimanienne complète de dimension n, ∇ la connexion de Levi-Civita et Δ_g l'opérateur de Laplace-Beltrami associé, c.f. [GHL04], [Jos84], [Jos05]. Il y a plusieurs manières de constuire un mouvement brownien sur M, qui est une diffusion pour l'opérateur elliptique Δ. On pourrait utiliser le théorème de Nash ou celui de Whitney. Nous allons utiliser la construction due à Eells et Elworthy plus économique en browniens directeurs. Elle est présente dans plusieurs ouvrages [Éme89], [Elw88],[Éme90a]. Elle consiste en un développement stochastique d'un brownien B à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Soit OM le fibré des repères orthonormés, $\pi : OM \to M$ la projection usuelle et soit $X : OM \times \mathbb{R}^n \to TOM$ telle que, pour tout $u \in OM$, $X(u, .) : \mathbb{R}^n \to T_u OM$ soit linéaire et vérifie $X(u, e) = H_u^{\nabla}(ue)$ où $H_u^{\nabla}(ue)$ est le relèvement horizontal de (ue) par rapport à la connexion ∇. Soit $u_0 \in OM$ et (ζ, u_t) une solution maximale de l'EDS de Srtatonovich

$$*du_t = X(u_t) * dB_t,$$

alors $x_t = \pi(u_t)$ est un mouvement brownien issu de $x_0 = \pi(u_0)$, avec ζ comme temps de vie.

Supposons de plus que la variété M soit compacte (plus généralement à courbure de Ricci minorée par une constante). Dans ce cas, $\zeta = \infty$ $p.s.$. Comme observé précédemment (avec le théorème de Nash), x_t comme semimartingale est solution avec condition initiale x_0 d'une EDS extrinsèque du type :

$$*dx_t = A_i(x_t) * dW_t^i + A_0(x_t)dt, \tag{3.1}$$

où les A_i sont m champs de vecteurs lisses sur M et W est un mouvement brownien de $\mathbb{R}^m$. Il faut remarquer que $m >> n$.

Soit $v_0 \in T_{x_0}M$, il y a une notion de processus dérivé $v_t \in T_{x_t}M$ provenant du flot stochastique, obtenue en dérivant formellement l'EDS précédente (3.1), c.f. [Kun90], [IW89] et [Elw88]. À la donnée d'une connexion sur M, l'EDS du flot prend une forme plus simple et se représente grâce à une équation covariante (c.f. [Elw88], [Nor92]) :

$$Dv_t := //_{0t} * d(//_{0t}^{-1} v_t) = \nabla_{v_t} A_i * dW_t^i + \nabla_{v_t} A_0 dt \tag{3.2}$$

où $//_{0t} : T_{x_0}M \to T_{x_t}M$ est le transport parallèle au dessus de x_t.

Comme dans [EY93], on définit

$$\mathbb{E}[v_t|\mathcal{F}_t^x] = //_{0t}\mathbb{E}[//_{0t}^{-1} v_t|\mathcal{F}_t^x] \in T_{x_t}M$$

où $\mathcal{F}_t^x$ est la filtration naturelle de x_t. En utilisant le théorème A de [EY93], on obtient une équation covariante plus simple à contrôler. C'est celle du transport parallèle déformé :

$$W_{0t}(v_0) := \mathbb{E}[v_t|\mathcal{F}_t^x].$$

Ce transport suit l'équation différentielle covariante suivante :

$$\frac{D}{dt}W_{0t}(v_0) = -\frac{1}{2}Ric^{\#}(W_{0t}(v_0)) + \nabla_{W_{0t}(v_0)}A_0.$$

On remarque ici que les browniens "superflus" sont éliminés par filtrage. Ils ne sont donc pas en ce sens nécessaires. Il devrait y avoir une construction intrinsèque de ce transport ne nécessitant qu'un nombre de browniens égal à la dimension de M, et c'est bien le cas c.f. [AT98b], [AT98a], [AT03]. Le transport parallèle déformé permet par exemple de mettre en évidence l'importance de la courbure de Ricci dans l'étude des solutions d'équations aux dérivées partielles dans le cadre géométrique.

Ne pouvant faire une liste exhaustive de toutes les conséquences du transport parallèle déformé, nous donnerons comme exemples : le contrôle du gradient au cours du temps de la solution d'une équation de la chaleur (formule à la Bismut) et le calcul explicite des constantes universelles apparaissant dans les estimés ponctuels de gradients de fonction harmonique positive [ADT07] (ces constantes sont exprimées en fonction de la fonction gamma).

Le calcul stochastique produit aussi des outils ("moment de stabilité") qui permettent dans certains cas de donner des renseignements sur la topologie de l'espace considéré [EY93], [Elw88]. Les couplages parallèles ou couplages miroirs, qui sont des constructions purement probabilistes étendues aux variétés par [Ken86], [Cra91], permettent de donner des estimés ponctuels (à la Yau) de gradient de fonction harmonique, des résultats en théorie du potentiel [Ken86] et produisent aussi, après modifications, des inégalités de Harnack [ATW06].

Chapitre 3

Brownian motion with respect to time-changing Riemannian metrics, applications to Ricci flow

35

Brownian motion with respect to time-changing Riemannian metrics, applications to Ricci flow

K.A. Coulibaly

Abstract

We generalize Brownian motion on a Riemannian manifold to the case of a family of metrics which depends on time. Such questions are natural for equations like the heat equation with respect to time dependent Laplacians (inhomogeneous diffusions). In this paper we are in particular interested in the Ricci flow which provides an intrinsic family of time dependent metrics. We give a notion of parallel transport along this Brownian motion, and establish a generalization of the Dohrn-Guerra or damped parallel transport, Bismut integration by part formulas, and gradient estimate formulas. One of our main results is a characterization of the Ricci flow in terms of the damped parallel transport. At the end of the paper we give a canonical definition of the damped parallel transport in terms of stochastic flows, and derive an intrinsic martingale which may provide information about singularities of the flow.

1 $g(t)$-Brownian motion

Let M be a compact connected n-dimensional manifold which carries a family of time-dependent Riemannian metrics $g(t)$. In this section we will give a generalization of the well known Brownian motion on M which will depend on the family of metrics. In other words, it will depend on the deformation of the manifold. Such family of metrics will naturally come from geometric flows like mean curvature flow or Ricci flow. The compactness assumption for the manifold is not essential. Let ∇^t be the Levi-Civita connection associated to the metric $g(t)$, Δ_t the associated Laplace-Beltrami operator. Let also $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a complete probability space endowed with a filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfying ordinary assumptions like right continuity and W be a $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion for this probability space.

Definition 1.1 *Let us take $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and a $C^{1,2}$-family $g(t)_{t\in[0,T[}$ of metrics over M. An M-valued process $X(x)$ defined on $\Omega \times [0, T[$ is called a $g(t)$-Brownian motion in M started at $x \in M$ if $X(x)$ is continuous, adapted, and if* *for every smooth function f,*

$$f(X_s(x)) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^s \Delta_t f(X_t(x))\,dt$$

is a local martingale.

We shall prove existence of this inhomogeneous diffusion and give a notion of parallel transport along this process.

Let $(e_i)_{i\in[1..d]}$ be an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(M)$ the frame bundle over M, π the projection to M. For any $u \in \mathcal{F}(M)$, let $L_i(t,u) = h^t(ue_i)$ be the ∇^t horizontal lift of ue_i and $L_i(t)$ the associated vector field. Further let $V_{\alpha,\beta}$ be the canonical basis of vertical vector fields over $\mathcal{F}(M)$ defined by $V_{\alpha,\beta}(u) = Dl_u(E_{\alpha,\beta})$ where $E_{\alpha,\beta}$ is the canonical basis of $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ and where

$$l_u : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(M)$$

is the left multiplication. Finally let $(\mathcal{O}(M), g(t))$ be the $g(t)$ orthonormal frame bundle.

Proposition 1.2 *Assume that $g(t)_{t\in[0,T[}$ is a $C^{1,2}(t,x)$-family of metrics over M, and*

$$\begin{array}{rcl} A : [0,T[\times\mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (t,U) & \mapsto & (A_{\alpha,\beta}(t,U))_{\alpha,\beta} \end{array}$$

is locally Lipschitz in U unformly in all compact of t. Consider the Stratonovich differential equation in $\mathcal{F}(M)$:

$$\begin{cases} *dU_t = \sum_{i=1}^n L_i(t,U_t) * dW^i + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t,U_t)V_{\alpha,\beta}(U_t)\,dt \\ U_0 \in \mathcal{F}(M) \text{ such that } U_0 \in (\mathcal{O}(M), g(0)). \end{cases} \tag{1.1}$$

Then there is a unique symmetric choice for A such that $U_t \in (\mathcal{O}(M), g(t))$. Moreover:

$$A(t,U) = -\frac{1}{2}\partial_1 G(t,U),$$

where $(\partial_1 G(t,U))_{i,j} = \langle Ue_i, Ue_j\rangle_{\partial_t g(t)}$.

<u>Proof</u>: Let us begin with curves. Let I be a real interval, $\pi : TM \to M$ the projection, V and C two curves in $C^1(I,TM)$ such that

$$x(t) := \pi(V(t)) = \pi(C(t)), \text{ for all } t \in I$$

We want to compute:

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big(\langle V(t), C(t)\rangle_{g(t,x(t))}\Big)$$

We write $\partial_1 g(t,x)$ for $\partial_s g(s,x)$ evaluated at t. Let us express the metric $g(t)$ in a coordinate system; without loss of generality we can differentiate at time 0. Let $(x^1,...,x^n)$ be a coordinate system at the point $x(0)$, in which we have:

$$V(t) = v^i(t)\partial_{x^i}$$

$$C(t) = c^i(t)\partial_{x^i}$$

$$g(t,x(t)) = g_{i,j}(t,x(t))dx^i \otimes dx^j$$

In these local coordinates we get:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}_{|t=0} \langle V(t), C(t)\rangle_{g(t,x(t))} &= \frac{d}{dt}_{|t=0} g_{i,j}(t,x(t))v^i(t)c^j(t) \\
&= (\partial_1 g_{i,j}(0,x)v^i(0)c^j(0) + \frac{d}{dt}_{|t=0}(g_{i,j}(0,x(t))v^i(t)c^j(t)) \\
&= \partial_1 g_{i,j}(0,x)v^i(0)c^j(0) + \left\langle \nabla^0_{\dot{x}(0)}V(t), C(0)\right\rangle_{g(0,x(0))} \\
&\quad + \left\langle V(0), \nabla^0_{\dot{x}(0)}C(0)\right\rangle_{g(0,x(0))} \\
&= \langle V(0), C(0)\rangle_{\partial_1 g(0,x(0))} + \left\langle \nabla^0_{\dot{x}(0)}V(0), C(0)\right\rangle_{g(0,x(0))} \\
&\quad + \left\langle V(0), \nabla^0_{\dot{x}(0)}C(0)\right\rangle_{g(0,x(0))}.
\end{aligned}$$

In order to compute the $g(t)$ norm of a tangent valued process we will use what Malliavin calls "the transfer principle", as explained in [13],[12].

Recall the equivalence between a given connection on a manifold M and a splitting on TTM, i.e. $TTM = H^\nabla TTM \oplus VTTM$ [19]. We have a bijection:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{V}_v : TM_{\pi(v)} & \longrightarrow & V_v TTM \\
u & \longmapsto & \frac{d}{dt}(v+tu)|_{t=0}.
\end{array}$$

For $X, Y \in \Gamma(TM)$ we have:

$$\nabla_X Y(x) = \mathcal{V}^{-1}_{X(x)}((dY(x)(X(x)))^v),$$

where $(.)^v$ is the projection of a vector in TTM onto the vertical subspace $VTTM$ parallely to $H^\nabla TTM$.

For a $T(M)$-valued process T_t, we define:

$$D^{S,t}T_t = (\mathcal{V}_{T_t})^{-1}((*dT_t)^{v,t}), \tag{1.2}$$

where $(.)^{v,t}$ is defined as before but for the connection ∇^t. The above generalization makes sense for a tangent valued process coming from a Stratonovich equation like $U_t e_i$, where U_t is a solution of the Stratonovich differential equation (1.1).

For the solution U_t of (1.1) we get

$$d\left(\langle U_t e_i, U_t e_j\rangle_{g(t,\pi(U_t))}\right) = \langle U_t e_i, U_t e_j\rangle_{\partial_1 g(t,\pi(U_t)))}\, dt \tag{1.3}$$
$$+ \left\langle D^{S,t} U_t e_i, U_t e_j\right\rangle_{g(t,\pi(U_t))} + \left\langle U_t e_i, D^{S,t} U_t e_j\right\rangle_{g(t,\pi(U_t))} \tag{1.4}$$

We would like to find a symmetric A such that the left hand side of the above equation vanishes for all time (i.e. $U_t \in (\mathcal{O}(M), g(t))$). Denote by $\mathrm{ev}_{e_i} : \mathcal{F}(M) \to TM$ the ordinary evaluation, and $d\,\mathrm{ev}_{e_i} : T\mathcal{F}(M) \to TTM$ its differential.
It is easy to see that $d\,\mathrm{ev}_{e_i}$ sends $VT\mathcal{F}(M)$ to $VTTM$ and sends $H^{\nabla^h}T\mathcal{F}(M)$ to $H^{\nabla}TTM$. We obtain:

$$D^{S,t} U_t e_i = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha,i}(t, U_t) U_t e_\alpha\, dt. \tag{1.5}$$

For simplicity, we take for notation: $(\partial_1 G(t,U))_{i,j} = \langle U e_i, U e_j\rangle_{\partial_t g(t)}$ and

$$(G(t,U))_{i,j} = \langle U e_i, U e_j\rangle_{g(t)}\,.$$

It is now easy to find the condition for A:

$$(G(t,U_t)A(t,U_t))_{j,i} + (G(t,U_t)A(t,U_t))_{i,j} = -(\partial_1 G(t,U_t))_{i,j} \tag{1.6}$$

Given orthogonality $G(t,U_t) = \mathrm{Id}$ and so by (1.6) A differs from $-\frac{1}{2}\partial_1 G$ by skew symmetric matrice, therefore will be equal to it if we demand symmetry. Conversely if $A = -\frac{1}{2}\partial_1 G$ then (1.3) and equation (1.2) we see $G(t,U_t) = \mathrm{Id}$.
□

Remark : The SDE in proposition 1.2 does not explode because on any compact time interval all coefficients and their derivatives up to order 2 in space and order 1 in time are bounded.

Remark : The condition of symmetry is linked to a good definition of parallel transport with moving metrics in some sense.

To see where the condition of symmetry comes from we may observe what happens in the constant metric case. It is easy to see that the usual definition of parallel transport along a semi-martingale which depends on the vanishing of the Stratonovich integral of connection form, is equivalent to isometry and the symmetry condition for the drift in the following SDE in $\mathcal{F}(M)$:

$$\begin{cases} d\tilde{U}_t = \sum_{i=1}^{d} L_i(\tilde{U}_t) * dW^i + A(\tilde{U}_t)_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}(\tilde{U}_t)\, dt \\ \tilde{U}_0 \in (\mathcal{O}(M), g) \\ \quad \tilde{U}_t \in (\mathcal{O}(M), g) \quad \text{(isometry)} \\ \quad A(.,.)_{\alpha,\beta} \in S(n) \quad \text{(vertical evolution).} \end{cases}$$

Remark: Isometry of U_t forces A to be skeew symmetric by (1.6), the symmetry of A give $A = 0$. We get the usual stochastic differential equation of the parallel transport in constante metric case.

The next proposition is a direct adaptation of a proposition in [15], page 42; hence the proof is omitted.

Proposition 1.3 *Let $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ and $F_\alpha : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}^d$, $F^i_\alpha(u) = \alpha_{\pi(u)}(ue_i)$ its scalarization. Then, for all $A \in \Gamma(TM)$,*

$$(\nabla_A \alpha)_{\pi(u)}(ue_i) = h(A_{\pi(u)})F^i_\alpha.$$

Consequently, for all $u \in \mathcal{F}(M)$,

$$(\nabla^{g(t)}_A df)_{\pi(u)}(ue_i) = h^{g(t)}(A_{\pi(u)})F^i_{df}$$

and for $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} L_i(t)(f \circ \pi)(u) &= d(f \circ \pi)L_i(t,u) \\ &= F^i_{df}(u). \end{aligned}$$

Hence we have the formula:

$$\begin{aligned} L_i(t)L_j(t)(f \circ \pi)(u) &= h^{g(t)}(ue_i)F^j_{df} \\ &= (\nabla^{g(t)}_{ue_i} df)(ue_j) \\ &= \nabla^{g(t)} df(ue_i, ue_j). \end{aligned}$$

Proposition 1.4 *Take $x \in M$ and the SDE in $\mathcal{F}(M)$:*

$$\begin{cases} *dU_t = \sum_{i=1}^n L_i(t,U_t) * dW^i - \frac{1}{2}\partial_1 G(t,U_t)_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}(U_t)\, dt \\ U_0 \in \mathcal{F}(M) \text{ such that } U_0 \in (\mathcal{O}_x(M), g(0)). \end{cases} \tag{1.7}$$

Then $X_t(x) = \pi(U_t)$ is a $g(t)$-Brownian motion, which we note $g(t)$-BM(x).

<u>*Proof*</u>: For $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} d(f \circ \pi \circ U_t) &= \sum_{i=1}^n L_i(t)(f \circ \pi)(U_t) * dW^i \\ &= \sum_{i=1}^n L_i(t)(f \circ \pi)(U_t) dW^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n L_i(t)L_j(t)(f \circ \pi) dW^i dW^j \\ &\overset{d\mathcal{M}}{\equiv} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \nabla^{g(t)} df(U_t e_i, U_t e_i)\, dt \\ &\overset{d\mathcal{M}}{\equiv} \frac{1}{2}\Delta_t f(\pi \circ U_t)\, dt. \end{aligned}$$

The last equality comes from the fact that $U_t \in (\mathcal{O}(M), g(t))$. $\square$

Remark: Recall that in the compact case the lifetime of equation (1.7) is deterministic and the same as the lifetime of the metrics family.

Let U_t be the solution of (1.7). We will write $//_{0,t} = U_t \circ U_0^{-1}$ the $g(t)$ parallel transport over a $g(t)$-Brownian motion (we call it parallel transport because it is a natural extention of the usual parallel transport in the constante metric case). As usual it is an isometry:

$$//_{0,t} : (TM_{X_0}, g(0)) \to (TM_{X_t}, g(t)).$$

We also get a development formula. Take an orthonormal basis $(v_1, ..., v_n)$ of $(TM_{X_0}, g(0))$, and $X_t(x)$ a $g(t)$-Brownian motion of proposition 1.4; then

$$*dX_t(x) = //_{0,t} v_i * dW_t^i.$$

For $f \in C^2(M)$ we get the Itô formula:

$$df(X_t(x)) = \langle \nabla^t f, //_{0,t} v_i \rangle_t dW^i + \frac{1}{2} \Delta_t(f)(X_t(x))\, dt.$$

We will now give examples of $g(t)$-Brownian motion. Let $(S^n, g(0))$ be a sphere and the solution of the Ricci flow: $\frac{\partial}{\partial_t} g(t) = -2 \operatorname{Ric}_t$ that is $g(t) = (1-2(n-1)t)g(0)$ with explosion time $T_c = \frac{1}{2(n-1)}$. We will use the fact that all metrics are conformal to the initial metric to express the $g(t)$-Brownian motion in terms of the $g(0)$-Brownian motion. Let $f \in C^2(S^n)$, $X_t(x)$ be a $g(t)$-Brownian motion starting at $x \in S^n$, B_t some real-valued Brownian motion, and $\mathbb{B}_t(x)$ a S^n valued $g(0)$-Brownian motion. Then:

$$df(X_t(x)) = \| \nabla^t f(X_t(x)) \|_{g(t)} \, dB_t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-2(n-1)t} \right) \Delta_0 f(X_t(x))\, dt.$$

We have:

$$\| \nabla^t f \|_t^2 = \frac{1}{1-2(n-1)t} \| \nabla^0 f \|_0^2 .$$

Let

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{1}{1-2(n-1)s}\, ds,$$

then

$$\tau(t) = \frac{\ln(1-2(n-1)t)}{-2(n-1)}, \quad \tau^{-1}(t) = \frac{e^{-2(n-1)t} - 1}{-2(n-1)}.$$

We have the equality in law:

$$(X_.(x)) \overset{\mathcal{L}}{=} (\mathbb{B}_{\tau(.)}(x)).$$

We have a similar result for the hyperbolic case: Let $(H^n(-1), g(0))$ be the hyperbolic space with constant curvature -1. Then $g(t) = (1 + 2(n-1)t)g(0)$ is the solution of the Ricci flow. Let $X_t(x)$ be a $g(t)$-Brownian motion starting at $x \in S^n$,and $\mathbb{B}_t(x)$ an H^n-valued $g(0)$-Brownian motion. Then:

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + 2(n-1)s}\, ds,$$

and in law:

$$(X_.(x)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\mathbb{B}_{\tau(.)}(x)).$$

Let us look at what happens for some limit of the Ricci flow, the so called Hamilton cigar manifold. Let on $\mathbb{R}^2$, $g(0,x) = \frac{1}{1+\|x\|^2}\, g_{\mathrm{can}}$ be the Hamilton cigar ([5]), where $\| \ . \ \|$ is the Euclidean norm. Then the solution to the Ricci flow is given by $g(t,x) = \frac{1+\|x\|^2}{e^{4t}+\|x\|^2} g(0,x)$. Let $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $X_t(x)$ be a $g(t)$-Brownian motion starting at $x \in \mathbb{R}^2$, B_t a real-valued Brownian motion, and $\mathbb{B}_t(x)$ some $\mathbb{R}^2$ valued $g(0)$-Brownian motion. Then:

$$df(X_t(x)) = \| \nabla^t f(X_t(x)) \|_{g(t)} \, dB_t + \frac{1}{2} \frac{e^{4t} + \| X_t(x) \|^2}{1 + \| X_t(x) \|^2} \Delta_0 f(X_t(x))\, dt.$$

We have:

$$\nabla^t f(x) = \frac{e^{4t} + \| x \|^2}{1 + \| x \|^2} \nabla^0 f(x),$$

$$\| \nabla^t f(x) \|_t^2 = \frac{e^{4t} + \| x \|^2}{1 + \| x \|^2} \| \nabla^0 f(x) \|_0^2,$$

$$\Delta_t f = \frac{e^{4t} + \| x \|^2}{1 + \| x \|^2} \Delta_0 f.$$

We set:

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{e^{4s} + \| X_s(x) \|^2}{1 + \| X_s(x) \|^2}\, ds.$$

Then in law:

$$(X_.(x)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\mathbb{B}_{\tau(.)}(x))$$

Remark: If $X_t(x)$ is a $g(t)$-Brownian motion associated to a Ricci flow started at $g(0)$ then $X_{t/c}(x)$ is a $cg(t/c)$-Brownian motion associated to a Ricci flow started at $cg(0)$ so it is compatible with the blow up.

2 Local expression, evolution equation for the density, conjugate heat equation

We begin this section by expressing a $g(t)$-Brownian motion in local coordinates.

Proposition 2.1 *Let $x \in M$, $(x^1, ..., x^n)$ be local coordinates around x, and $X_t(x)$ a $g(t)$-Brownian motion. Before the exit time of the domain of coordinates, we have:*

$$dX_t^i(x) = \sqrt{g^{-1}(t, X_t(x))_{i,j}}dB^j - \frac{1}{2}g^{k,l}\Gamma_{kl}^i(t, X_t(x))\, dt$$

where we denote $\sqrt{g^{-1}(t, X_t(x))_{i,j}}$ the unique positive square root of the inverse to the matrix $(g(t, \partial_{x^i}, \partial_{x^j}))_{i,j}$; here $\Gamma_{kl}^i(t, X_t(x))$ are the Christoffel symbols associated to $\nabla^{g(t)}$, and B^i are n independent Brownian motion.

Proof: Recall equation (1.7), we shall express it in local coordinates of $\mathcal{F}(M)$. For $u \in \mathcal{F}(M)$ and $x = \pi(u)$, we write $ue_i = e_i^j(u)\partial_{x^j}$. We get a coordinates system for the frame bundle as (x^l, e_i^j) and:

$$L_i(t, u) = e_i^j \partial_{x^j} - e_i^j e_m^l \Gamma_{jl}^k(t, x)\partial_{e_m^k}.$$

In these coordinates, we write the solution of (1.7) as $U_t = (X_t^i, e_i^j(t))$. We obtain:

$$\begin{cases} dX_t^i &= e_j^i(t) * dW^j \\ de_m^k(t) &= -\Gamma_{jl}^k(t, X_t)e_i^j(t)e_m^l(t) * dW^i - \frac{1}{2}\partial_1 g(t, U_t)_{\alpha,k}e_\alpha^m(t)\, dt. \end{cases}$$

The Itô equation for X_t^i is

$$dX_t^j = e_i^j(t)dW^i + \frac{1}{2}d\langle e_i^j, W^i\rangle.$$

We also have:

$$\delta_{l,m} = \langle U_t e_l, U_t e_m\rangle_{g(t)} = e_l^i(t)g(t)_{i,j}e_m^j(t).$$

so $e^\dagger(t)e(t) = g(t)^{-1}$, where $e^\dagger$ is the transposition. We note the martingale part of X_t^i as $M^i = e_i^j(t)dW^j$. By the above computations, we get

$$d\langle M^i, M^j\rangle = g^{i,j}(t, X_t)\, dt.$$

Let us also write $\sigma = \sqrt{g^{-1}}$. By Lévy's theorem, we find an $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion:

$$B_t = \int_0^t (\sigma(X_s))^{-1} dM_s.$$

Also:

$$\begin{aligned} de_i^j(t)dW_t^j &= -e_i^k(t)e_i^l(t)\Gamma_{kl}^j(t, X_t)\, dt \\ &= -g^{k,l}(t, X_t)\Gamma_{kl}^j(t, X_t)\, dt. \end{aligned}$$ 43

Hence:

$$dX_t^j = \sigma_{i,j}(X_t)dB^i - \frac{1}{2}g^{k,l}(t,X_t)\Gamma_{kl}^j(t,X_t)\,dt.$$

□

Remark: The above equation is similar to the equation in the fixed metric case.

Now we shall study the evolution equation for the density of the law of the $g(t)$-Brownian motion. Let $X_t(x)$ be a $g(t)$-BM(x), and $d\mu_t$ the Lebesgue measure over $(M,g(t))$. $X_t(x)$ is a diffusion with generator Δ_t, we have the smoothness of the density (e.g. [22]). Let $h^x(t,y) \in C^\infty(]0,T[\times M)$ such that:

$$\begin{cases} X_t(x) & \overset{\mathcal{L}}{=} & h^x(t,y)d\mu_t(y), t>0 \\ X_0(x) & \overset{\mathcal{L}}{=} & \delta_x. \end{cases}$$

By the continuity of $X_t(x)$ and the dominated convergence theorem we get the convergence in law:

$$\overset{\mathcal{L}}{\lim_{t\to 0}} \quad X_t(x) = \delta_x.$$

We write in a local chart the expression of $d\mu_t$ in terms of $d\mu_0$, i.e.,

$$d\mu_t = \frac{\sqrt{\det(g_{i,j}(t))}}{\sqrt{\det(g_{i,j}(0))}}\sqrt{\det(g_{i,j}(0))}|dx^1\wedge dx^2\wedge ...\wedge dx^n|$$

and we note:

$$\mu_t(dy) = \psi(t,y)\mu_0(dy).$$

Proposition 2.2

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(h^x(t,y)) + h^x(t,y)\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(g^{-1}(t,y))\frac{d}{dt}g(t,y)\right) = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)}h^x(t,y) \\ \overset{\mathcal{L}}{\lim_{t\to 0}} \quad h^x(t,y)d\mu_t = \delta_x. \end{cases}$$

Proof: For $f\in C^\infty(M)$, $t>0$, by definition of $X_t(x)$ we have:

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}[f(X_t(x))] - f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \Delta_{g(s)}f(X_s(x))\,ds\right] \\ \frac{d}{dt}\mathbb{E}[f(X_t(x))] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\Delta_{g(t)}f(X_t(x))], \end{array}$$

i.e.:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\int_M h^x(t,y)f(y)\mu_t(dy) & = & \frac{1}{2}\int_M \Delta_{g(t)}f(y)h^x(t,y)\mu_t(dy) \\ & = & \frac{1}{2}\int_M f(y)\Delta_{g(t)}h^x(t,y)\mu_t(dy). \end{array}$$

The last equality comes from Green's theorem and the compactness of the manifold. By changing $\mu_t(dy) = \psi(t,y)\mu_0(dy)$ in the left hand side, we have:

$$\int_M f(y)\frac{d}{dt}(h^x(t,y)\psi(t,y))\mu_0(dy) = \frac{1}{2}\int_M f(y)(\Delta_{g(t)}h^x(t,y))\psi(t,y))\mu_0(dy)$$

so:

$$\frac{d}{dt}(h^x(t,y)\psi(t,y)) = \frac{1}{2}(\Delta_{g(t)}h^x(t,y))\psi(t,y)) \tag{2.1}$$

We also have by determinant differentiation:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi(t,y) &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{i,j}(0))}}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{i,j}(t))}}\det(g_{i,j}(t))\ \mathrm{Tr}\left(g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\psi(t,y)\,tr\left(g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right).
\end{aligned}$$

The part $\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\,g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right)$ is intrinsic, it does not depend on the choice of the chart. Hence (2.1) gives the following inhomogeneous reaction-diffusion equation:

$$\frac{d}{dt}(h^x(t,y)) + h^x(t,y)tr\left(\frac{1}{2}g^{-1}(t,y)\frac{d}{dt}g(t,y)\right) = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)}h^x(t,y).$$

□

We will give as example the evolution equation of the density in the case where the family of metrics comes from the forward (and resp. backward) Ricci flow. From now Ricci flow will mean (probabilistic convention):

$$\tfrac{d}{dt}g_{i,j} = -\operatorname{Ric}_{i,j}. \tag{2.2}$$

(respectively)

$$\tfrac{d}{dt}g_{i,j} = \operatorname{Ric}_{i,j}. \tag{2.3}$$

Remark: Hamilton in [14], and later DeTurck in [7] have shown existence in small times of such flow. In this section we don't care about the real existence time.

For $x \in M$, we will denote by $S(t,x)$ the scalar curvature at the point x for the metric $g(t)$.

Corollary 2.3 *For the backward Ricci flow* (2.3)*, we have:*

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}(h^x(t,y)) + \dfrac{1}{2}h^x(t,y)S(t,y) = \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)}h^x(t,y) \\
\overset{\mathcal{L}}{\lim\limits_{t\to 0}}\quad h^x(t,y)d\mu_t = \delta_x.
\end{cases}$$

For the forward Ricci flow (2.2)*, we have:*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(h^x(t,y)) - \dfrac{1}{2}h^x(t,y)S(t,y) = \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)}h^x(t,y) \\ \overset{\mathcal{L}}{\lim_{t\to 0}} \quad h^x(t,y)d\mu_t = \delta_x. \end{array}\right.$$

Remark: These equations are conservative. This is not the case for the ordinary heat equation with time depending Laplacian i.e. $\Delta_{g(t)}$. They are conjugate heat equations which are well known in the Ricci flow theory (e.g. [24]).

3 Damped parallel transport, and Bismut formula for Ricci flow, applications to Ricci flow for surfaces

In this section, we will be interested in the heat equation under the Ricci flow. The principal fact is that under forward Ricci flow, the damped parallel transport or Dohrn-Guerra transport is the parallel transport defined before. The deformation of geometry under the Ricci flow compensates the deformation of the parallel transport (i.e. the Ricci term in the usual formula for the damped parallel transport in constant metric case see ([9], [23], [10])). The isometry property of the damped parallel transport turns out to be an advantage for computations. In particular, for gradient estimate formulas, everything looks like in the case of a Ricci flat manifold with constant metric. We begin with a general result independent of the fact that the flow is a Ricci flow. Let $g(t)_{[0,T_c[}$ be a $C^{1,2}$ family of metrics, and consider the heat equation:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_t f(t,x) \\ f(0,x) = f_0(x), \end{array}\right. \tag{3.1}$$

where f_0 is a function over M. We suppose that the solution of (3.1) exists until T_c. For $T < T_c$, let X_t^T be a $g(T-t)$-Brownian motion and $//_{0,t}^T$ the associated parallel transport.

Definition 3.1 *We define the damped parallel transport* $\boldsymbol{W}_{0,t}^T$ *as the solution of:*

$$*d((//_{0,t}^T)^{-1}(\boldsymbol{W}_{0,t}^T)) = -\frac{1}{2}(//_{0,t}^T)^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)} - \partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(\boldsymbol{W}_{0,t}^T)\,dt$$

with

$$\boldsymbol{W}_{0,t}^T : T_xM \longrightarrow T_{X_t^T(x)}M,\ \boldsymbol{W}_{0,0}^T = \mathrm{Id}_{T_xM}\,.$$

Theorem 3.2 *For every solution $f(t,.)$ of (3.1), and for all $v \in T_xM$,*

$$df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(\boldsymbol{W}_{0,t}^T v)$$

is a local martingale.

<u>*Proof*</u>: Recall the equation of a parallel transport over the $g(T-t)$-Brownian motion $X_t^T(x)$:

$$\begin{cases} *dU_t^T = \sum_{i=1}^d L_i(T-t,U_t^T) * dW^i - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(U_t^T e_\alpha, U_t^T e_\beta)V_{\alpha,\beta}(U_t^T)\,dt \\ U_0^T \in (\mathcal{O}_x(M), g(T)). \end{cases} \tag{3.2}$$

For $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, its scalarization:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{df} : \mathcal{F}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ U & \longmapsto & (df(Ue_1), ..., df(Ue_n)), \end{array}$$

yields the following formula in $\mathbb{R}^n$:

$$df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v) \quad = \quad \langle \widetilde{df}(T-t,U_t^T), (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

for every $v \in T_xM$. To recall the notation let:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ev}_{e_i} : \mathcal{F}(M) & \longrightarrow & TM \\ U & \longmapsto & Ue_i \end{array}$$

and recall that U_t^T, solution of (3.2), is a diffusion associated to the generator

$$\frac{1}{2}\Delta^H_{T-t} - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{ei}(.), \mathrm{ev}_{ej}(.))V_{i,j}(.)$$

where Δ^H_{T-t} is the horizontal Laplacian in $\mathcal{M}$, associated to the metric $g(T-t)$. In the Itô sense, we get:

$$\begin{aligned}
& d(df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(\mathbf{W}_{0,t}^T)v) = d\langle \widetilde{df}(T-t,U_t^T), (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
& \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} \langle -(\frac{d}{dt}\widetilde{df})(T-t,.)(U_t^T)dt + [\frac{1}{2}\Delta^H_{T-t}\widetilde{df}(T-t,.) \\
& - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{ei}\,., \mathrm{ev}_{ej}\,.)V_{i,j}(.)\widetilde{df}(T-t,.)](U_t^T)\,dt, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
& + \langle (\widetilde{df}(T-t,U_t^T)), (U_0^T)^{-1} d((//_{0,t}^T)^{-1}(\mathbf{W}_{0,t}^T))v\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
& \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} -(\frac{d}{dt}df)(T-t,.)((\mathbf{W}_{0,t}^T))v)\,dt + \langle [\frac{1}{2}\Delta^H_{T-t}\widetilde{df}(T-t,.) \\
& - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{ei}\,., \mathrm{ev}_{ej})V_{i,j}(.)\widetilde{df}(T-t,.)](U_t^T)\,dt, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
& - \frac{1}{2}\langle (\widetilde{df}(T-t,U_t^T)), (U_0^T)^{-1}(//_{0,t}^T)^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)} - \partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T)v\,dt\rangle_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

We shall make separate computations for each term in the previous equality. Using the well known formula (e.g. [15], page 193)

$$\Delta^H \widetilde{df} = \widetilde{\Delta df},$$

we first note that:

$$\begin{aligned}
&\langle \tfrac{1}{2}\Delta^H_{T-t}\widetilde{df}(T-t,.)(U_t^T), (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}^T_{0,t}v\,dt\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&= \tfrac{1}{2}\langle \widetilde{\Delta_{T-t}df}(T-t,.)(U_t^T), (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}^T_{0,t}v\rangle_{\mathbb{R}^n}\,dt\\
&= \tfrac{1}{2}\Delta_{T-t}df(T-t,.)(\mathbf{W}^T_{0,t}v)\,dt,
\end{aligned}$$

By definition:

$$\begin{aligned}
V_{i,j}\widetilde{df}(u) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\widetilde{df}(u(\mathrm{Id}+tE_{ij}))\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(df(u(\mathrm{Id}+tE_{ij})e_s))_{s=1..n}\\
&= (df(u\delta_i^s e_j))_{s=1..n}\\
&= (0,...,0,df(ue_j),0,...,0) \quad i\text{-th position},
\end{aligned}$$

so that:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{ij}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{ei}\,.,\mathrm{ev}_{ej}\,.)V_{i,j}(.)\widetilde{df}(T-t,.)(U_t^T)\,dt\\
&= \textstyle\sum_{ij}\partial_t(g(T-t))(U_t^Te_i,U_t^Te_j)df(U_t^Te_j)e_i\,dt\\
&= (\langle\nabla^{T-t}f(T-t,.),\textstyle\sum_j\partial_t(g(T-t))(U_t^Te_i,U_t^Te_j)U_t^Te_j\rangle_{T-t}\,dt)_{i=1..n}\\
&= (df(T-t,\partial_t(g(T-t))^{\#T-t}(U_t^Te_i))\,dt)_{i=1..n}.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
&d(df(T-t,.)_{X_t^T(x)}((\mathbf{W}^T_{0,t})v))\\
&\overset{d\mathcal{M}}{\equiv} -\tfrac{d}{dt}df(T-t,.)((\mathbf{W}^T_{0,t}v)\,dt\\
&-\tfrac{1}{2}\langle(df(T-t,\partial_t(g(T-t))^{\#T-t}(U_t^Te_i)))_{i=1..n},(U_t^T)^{-1}\mathbf{W}^T_{0,t}v\rangle_{\mathbb{R}^n}\,dt\\
&+\tfrac{1}{2}\Delta_{T-t}df(T-t,.)(\mathbf{W}^T_{0,t}v)\,dt\\
&-\tfrac{1}{2}\langle(\widetilde{df}(T-t,U_t^T)),(U_0^T)^{-1}(//^T_{0,t})^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)}-\partial_t(g(T-t))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}^T_{0,t})v\,dt\rangle_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

By the fact that U_t^T is a $g(T-t)$-isometry we have:

$$\begin{aligned}
&\langle(df(T-t,\partial_t(g(T-t))^{\#T-t}(U_t^Te_i)))_{i=1..n},(U_t^T)^{-1}\mathbf{W}^T_{0,t}v\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&= \langle\textstyle\sum_i\partial_t(g(T-t))(U_t^Te_i,\nabla^{T-t}f(T-t,.))e_i,(U_t^T)^{-1}\mathbf{W}^T_{0,t}v\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&= \langle\textstyle\sum_i\partial_t(g(T-t))(U_t^Te_i,\nabla^{T-t}f(T-t,.))U_t^Te_i,\mathbf{W}^T_{0,t}v\rangle_{T-t}\\
&= \langle\partial_t(g(T-t))^{\#T-t}(\mathbf{W}^T_{0,t}v),\nabla^{T-t}f(T-t,.)\rangle_{T-t},
\end{aligned}$$

Consequently:

$$
\begin{aligned}
& d(df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)) \\
& \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} -\frac{d}{dt} df(T-t,.)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\, dt \\
& - \frac{1}{2}\langle \nabla^{T-t} f(T-t,.), \partial_t (g(T-t))^{\#T-t}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\rangle_{T-t}\, dt \\
& + \frac{1}{2}\Delta_{T-t} df(T-t,.)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\, dt \\
& - \frac{1}{2}\langle (\widetilde{df}(T-t, U_t^T)), (U_t^T)^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)} - \partial_t (g(T-t)))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T) v\, dt\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
& \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} -\frac{d}{dt} df(T-t,.)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\, dt + \frac{1}{2}\Delta_{T-t} df(T-t,.)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\, dt \\
& - \frac{1}{2} df(T-t, \mathrm{Ric}_{g(T-t)}^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\, dt.
\end{aligned}
$$

But recall that f is a solution of:

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{1}{2}\Delta_t f,$$

so that

$$-\frac{\partial}{\partial t} df(T-t,.) = -\frac{1}{2} d\Delta_{T-t} f(T-t,.).$$

We shall use the Hodge-de Rham Laplacian $\square_{T-t} = -(d\delta_{T-t} + \delta_{T-t} d)$ which commutes with the de Rham differential, and we shall use the well-known Weitzenböck formula ([16, 17]), which says that for θ a 1-form, $\square_{T-t}\theta = \Delta_{T-t}\theta - \mathrm{Ric}_{T-t}\theta$. We get:

$$
\begin{aligned}
d\Delta_{T-t} f(T-t,.) &= d\square_{T-t} f(T-t,.) \\
&= \square_{T-t} df(T-t,.) \\
&= \Delta_{T-t} df(T-t,.) - \mathrm{Ric}_{T-t} df(T-t,.).
\end{aligned}
$$

Finally:

$$
\begin{aligned}
d(df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)) &\overset{d\mathcal{M}}{\equiv} \tfrac{1}{2}\mathrm{Ric}_{T-t} df(T-t,.)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\, dt \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\langle \nabla^{T-t} f(T-t,.), \mathrm{Ric}_{T-t}^{\#T-t}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\rangle_{T-t}\, dt \\
&\overset{d\mathcal{M}}{\equiv} 0,
\end{aligned}
$$

by duality; for a 1-form θ and for $v \in TM$:

$$\mathrm{Ric}(\theta)(v) = \mathrm{Ric}(\theta^{\#}, v.)$$

where$\langle \theta^{\#}, v\rangle = \theta(v)$. $\square$

Remark : For the forward Ricci flow, we have:

$$//^T_{0,t} * d((//^T_{0,t})^{-1}\mathbf{W}^T_{0,t}) = 0.$$

For the backward Ricci flow, we have:

$$//^T_{0,t} * d((//^T_{0,t})^{-1}\mathbf{W}^T_{0,t}) = -\operatorname{Ric}^{\# T-t}_{T-t}(\mathbf{W}^T_{0,t})\, dt.$$

When the family of metrics is constant, we have the usual damped parallel transport, wich satifies:

$$//_{0,t} * d((//_{0,t})^{-1}\mathbf{W}_{0,t}) = -\frac{1}{2}\operatorname{Ric}^{\#}(\mathbf{W}_{0,t})\, dt.$$

Remark : Roughly speaking, the result says that the deformation of the metric under Ricci flow makes the damped parallel transport behaves like the damped parallel transport in the case of a constant metric with flat Ricci curvature.

For the heat equation under the forward Ricci flow, we take the probabilistic convention:

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_t f(t,x) \\ \frac{d}{dt} g_{i,j} = -\operatorname{Ric}_{i,j} \\ f(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

We shall give a Bismut type formula and a gradient estimate formula for the above equation. For notation, let T_c be the maximal life time of the forward Ricci flow $g(t)_{t\in[0,T_c[}$, solution of (2.2). For $T < T_c$, X^T_t is a $g(T-t)$-Brownian motion and $//^T_{0,t}$ the associated parallel transport. In this case, for a solution $f(t,.)$ of (3.3), $f(T-t, X^T_t(x))$ is a local martingale for any $x \in M$. When going back in time, one has to remember all deformations of the geometry.

We now recall a well known lemma giving a Bismut type formula (e.g. [8]). Let $f(t,.)$ and $g(t)$ be solution of (3.3), $T < T_c$, and $X^T_t(x)$ a $g(T-t)$-Brownian motion.

Lemma 3.3 *For all $\mathbb{R}^n$-valued process k such that $k \in L^2_{loc}(W)$ where W is some $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion, and for all $v \in T_xM$,*

$$\begin{aligned} N_t &= df(T-t,.)_{X^T_t(x)}(U^T_t)[(U^T_0)^{-1}v - \textstyle\int_0^t k_r dr] \\ &+ f(T-t, X^T_t(x)) \textstyle\int_0^t \langle k_r, dW\rangle_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

is a local martingale.

Proof: The first remark after theorem 3.2 yield that the first term is a semi-martingale. By Itô calculus we get:

$$d(f(T-t, X_t^T(x))) = df(T-t,.)_{X_t^T(x)} U_t e_i dW^i.$$

With $(l_i)_{i=1..n}$ a $g(T)$-orthonormal frame of T_xM, we write N_t as:

$$\begin{array}{rcl} N_t & = & \sum_i (df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(U_t^T(U_0^T)^{-1})l_i)(v_i - \int_0^t \langle U_0^T(k_r), l_i\rangle_T dr) \\ & + & f(T-t, X_t^T(x)) \int_0^t \langle k_r, dW\rangle_{\mathbb{R}^n} \end{array}$$

with 3.2:

$$\begin{array}{rcl} dN_t & \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} & \sum_i (df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(U_t^T(U_0^T)^{-1})l_i)(-\langle U_0^T(k_t), l_i\rangle_T dt) \\ & & +d(f(T-t, X_t^T(x)))\langle k_t, dW\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ & \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} & \sum_i (df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(U_t^T(U_0^T)^{-1})l_i)(-\langle U_0^T(k_t), l_i\rangle_T dt) \\ & & +\sum_i df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(U_t^T l_i) dW^i (\sum_j k_t^j dW^j) \\ & \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} & 0. \end{array}$$

□

Remark: Since T is smaller than the explosion time T_c, and by the compactness of M, N_t is clearly a true martingale, so we could use the martingale property for global estimate, or the Doob optional sampling theorem for local estimate (e.g. [23]).

Corollary 3.4 *Let $v \in T_xM$, and take for example $k_r = \frac{(U_0^T)^{-1}v}{T} \mathbb{1}_{[0,T]}(r)$ then:*

$$df(T,.)_x v = \frac{1}{T} \sum_i \mathbb{E}[f_0(X_T^T(x)) \langle (U_0^T)^{-1} v, e_i\rangle_{\mathbb{R}^n} W_i(T)].$$

Proof: With the above remark, N_t is a martingale. The choice of k_r gives $(U_0^T)^{-1}v - \int_0^T k_r dr = 0$; the result follows by taking expectation at time 0 and T.
□

We can give the following estimate for the gradient of the solution of (3.3):

Corollary 3.5 *Let $\|f\|_\infty = \sup_M |f_0|$. For $T < T_c$:*

$$\sup_{x \in M} \|\nabla^T f(T,x)\|_T \text{ is decreasing in time}$$

and:

$$\sup_{x \in M} \|\nabla^T f(T,x)\|_T \le \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{T}}.$$

Proof: Take $x \in M$ such that $\| \nabla^T f(T,x) \|_T$ is maximal. Using the damped parallel transport 3.2 we obtain that for all $v \in T_x M$:

$$df(T-t, X_t^T(x))\mathbf{W}_{0,t}^T v,$$

is a local martingale. By compactness, this is a true martingale. Taking $v = \nabla^T f(T,x)$ and averaging the previous martingale at time 0 and t we get:

$$\| \nabla^T f(T,x) \|_T^2 = \mathbb{E}[\langle \nabla^{T-t} f(T-t, X_t^T(x)), \mathbf{W}_{0,t}^T v\rangle_{T-t}].$$

Using 3.2, we get the first result.

If we choose $k_r = \frac{(U_0^T)^{-1}v}{T}\mathbb{1}_{[0,T]}(r)$ in 3.3, then N_t is a martingale. Taking expectations at times 0 and T, we obtain

$$df(T,.)_x v = \frac{1}{T}\mathbb{E}[f_0(X_T^T(x))\int_0^T \langle (U_0^T)^{-1}v, dW\rangle_{\mathbb{R}^n}].$$

For $x \in M$ and $v = \nabla^T f(T,x)$, Schwartz inequality gives

$$\| \nabla^T f(T,x) \|_T^2 \leq \frac{\mathcal{M}_0}{T}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \langle (U_0^T)^{-1}v, dW\rangle_{\mathbb{R}^n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

We have:

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \langle (U_0^T)^{-1}v, dW\rangle_{\mathbb{R}^n}\right|^2\right] = T \| v \|_T^2 .$$

The result follows. □

For geometric interpretation, let us give an example of normalized Ricci flow for surfaces (which is completely understood e.g. [5]). We are interested in this example because the equation for the scalar curvature under this flow is a reaction-diffusion equation which is quite similar to the heat equation under Ricci flow. We will give a gradient estimate formula for the scalar curvature under normalized Ricci flow which gives in the case $\chi(M) < 0$ (the easiest case) the convergence of the metric to a metric of constant curvature.

The normalized Ricci flow of surfaces comes from normalizing the metric by some time dependent function to preserve the volume. Let M be a 2-dimensional manifold, $R(t)$ the scalar curvature, $r = \int_M R_t d\mu_t/\mu_t(M)$ its average (which will be constant in time, as topological constant, e.g. Gauss-Bonnet). We get the following equation for normalized Ricci flow:

$$\frac{d}{dt}g_{i,j}(t) = (r - R(t))g_{i,j}(t).$$

Remark: Hamilton gives a proof of the existence of solutions to this equation, defined for all time (e.g. [5])).

Recall that (e.g. [5]) the equation for the scalar curvature R is:

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta_t R + R(R-r).$$

Proposition 3.6 *Let $T \in \mathbb{R}$, $X_t^T(x)$ be a $\frac{1}{2}g(T-t)$-BM(x), $//_{0,t}^T$ the parallel transport, $v \in T_xM$ and $\varphi_t v$ the solution of the following equation:*

$$//_{0,t}^T d\left((//_{0,t}^T)^{-1}\varphi_t v\right) = -\left(\frac{3}{2}r - 2R\left(T-t, X_t^T(x)\right)\right)\varphi_t v\, dt$$

$$\varphi_0 = \mathrm{Id}_{T_xM}\,.$$

Then $dR(T-t,.)_{X_t^T(x)}\varphi_t v$ is a martingale and:

$$\|\nabla^T R(T,x)\|_T \leq \sup_M \|\nabla^0 R(0,x)\|_0 e^{-\frac{3}{2}rT}\mathbb{E}[e^{\int_0^T 2R(T-t,X_t^T(x))\,dt}]. \tag{3.4}$$

<u>*Proof*</u>: The proof is similar to the one in 3.2, the difference is the reaction term: $R(R-r)$. For notations and some details see the proof of 3.2. Take $F : x \mapsto x(x-r)$, then:

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta_t R + F(R).$$

We write:

$$dR(T-t,.)\mid_{X_t^T(x)} \varphi_t v = \langle \tilde{d}R(T-t,U_t^T), (U_t^T)^{-1}\varphi_t v\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

where U_t^T is a diffusion on $\mathcal{F}(M)$ with generator

$$\Delta_{T-t}^H + \frac{1}{4}(r - R(T-t,\pi.))g(T-t)(\mathrm{ev}_{ei}\,.,\mathrm{ev}_{ej}\,.)V_{i,j}(.).$$

Using theorem 3.2, we have:

$$\begin{aligned}
&d\langle \tilde{d}R(T-t,U_t^T), (U_t^T)^{-1}\varphi_t v\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= \langle d(\tilde{d}R(T-t,U_t^T)), (U_t^T)^{-1}\varphi_t v\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&+ \langle \tilde{d}R(T-t,U_t^T), d((U_t^T)^{-1}\varphi_t v)\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&\overset{d\mathcal{M}}{\equiv} \left[\frac{\partial}{\partial_t}(dR(T-t,.)) + \Delta_{T-t}dR(t-t,.) + \frac{1}{2}(r - R(T-t,\pi.))dR(T-t,.)\right](\varphi_t v)\, dt\\
&+ \langle \tilde{d}R(T-t,U_t^T), d((U_t^T)^{-1}\varphi_t v)\rangle_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}$$

Using Weitzenböck formula and the equation for R we get:

$$\frac{\partial}{\partial t}dR(T-t,.) = -[\Delta_{T-t}dR(T-t,.) - \mathrm{Ric}_{T-t}\, dR(T-t,.) + F'(R(T-t,.))dR(T-t,.)]$$ 53

Recall that for the surface:

$$\mathrm{Ric}_{T-t}\, dR(T-t,.) = \frac{1}{2}R(T-t,.)dR(T-t,.),$$

consequently

$$\begin{aligned}
& d\langle \tilde{d}R(T-t,U_t^T),(U_t^T)^{-1}\varphi_t v\rangle_{\mathbb{R}^2} \\
& \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} (\frac{1}{2}r - F^{'}(R(T-t,.))dR(T-t,.))(\varphi_t v)\, dt + \langle \tilde{d}R(T-t,U_t^T), d((U_t^T)^{-1}\varphi_t v)\rangle_{\mathbb{R}^2} \\
& \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} (\frac{1}{2}r - 2R(T-t,.)+r)dR(T-t,.))(\varphi_t v)\, dt \\
& + \langle \tilde{d}R(T-t,U_t^T),(U_t^T)^{-1}(-\frac{3}{2}r + 2R(T-t,.))\varphi_t v)\rangle_{\mathbb{R}^2} \\
& \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} 0,
\end{aligned}$$

where we used the equation of $\varphi_t v$ in the last step.

For the second part of the proposition, with the equation for $\varphi_t v$ we have:

$$d(\| \varphi_t v \|_{T-t}^2) = (4R(T-t, X_t^T(x) - 3r) \| \varphi_t v \|_{T-t}^2 \; dt,$$

so that

$$\| \varphi_T v \|_0^2 = \| \varphi_0 v \|_T^2 \; e^{-3rT} e^{\int_0^T 4R(T-s,X_s^T(x))\,ds}.$$

Take $v = \nabla_T R(T,x)$ and average at time 0 and T (it is a true martingale because all coefficients are bounded) to get:

$$\|\nabla^T R(T,x)\|_T \leq \sup_M \|\nabla^0 R(0,x)\|_0 e^{-\frac{3}{2}rT}\mathbb{E}[e^{\int_0^T 2R(T-s,X_s^T(x))\,ds}].$$

□

Remark: For reaction-diffusion equations we can find by this calculation the correction to the parallel transport leading to a Bismut type formula for the gradient of the equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \Delta_t f + F(f), \tag{3.5}$$

where Δ_t is a Laplace Beltrami operator associated to a family of metrics $g(t)$. Let $X_t^T(x)$ be a $\frac{1}{2}g(T-t) - BM(x)$, $//_{0,t}^T$ the associated parallel transport and $v \in T_x M$. Consider the covariant equation:

$$//_{0,t}^T d(//_{0,t}^T)^{-1}\Theta_t v = -\Big(\mathrm{Ric}^{\#,T-t} - \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial t}(g(T-t))\Big]^{\#,T-t} - F^{'}(f)\Big)\Theta_t v\, dt$$

Then for f a solution of (3.5) and $v \in T_x M$ we obtain that:

$$df(T-t,.)\Theta_t v$$

is a local martingale.

Corollary 3.7 *For $\chi(M) < 0$, there exists $C > 0$ depending only on $g(0)$, such that:*

$$\|\nabla^T R(T,x)\|_T \leq \sup_M \|\nabla^0 R(0,x)\|_0 \, e^{\frac{1}{2}rT} e^{2C(\frac{e^{rT}-1}{r})}.$$

Proof: We use proposition 5.18 in [5]. In this case we have $r < 0$ and a constant $C > 0$ depending only on the initial metric such that $R(t,.) \leq r + Ce^{rt}$ and the estimate follows from previous proposition. $\square$

Remark: For the case $\chi(M) < 0$ we obtained an estimate which decreases exponentially. For the case $\chi(M) > 0$ one could control the expectation in (3.4).

4 The point of view of the stochastic flow

Let $g(t)_{[0,T_c[}$ be a $C^{1,2}$ family of metrics, and consider the heat equation:

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_t f(t,x) \\ f(0,x) = f_0(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

where f_0 is a function over M. We suppose that the solution of this equation exists until T_c. For $T < T_c$, let X_t^T be a $g(T-t)$-Brownian motion and $//_{0,t}^T$ the associated parallel transport.

The family of martingales $f(T-t, X_t^T(x_0))_{x_0 \in M}$, which arise from Itô calculus, will be differentiated with respect to the parameter x_0. However, in this section, we will not do it directly using stochastic flows in the sense of [20]. Instead, we will use differentiation of families of martingales defined as limit in some semi-martingale space (the topology is as in [11] which has been extended by Arnaudon, Thalmaier to the manifold case [4], [3], [1], [2]).

We work in the space-time $I \times M$, its tangent bundle being identified to $TI \times TM$ endowed with the cross connection $\tilde{\nabla} = \overline{\nabla} \otimes \nabla_{T-t}$ where $\overline{\nabla}$ is the flat connection. Let $X_t^T(x_0)$ be a $g(T-t)$-BM started at x_0, and define $Y_t(x_0) = (t, X_t^T(x_0))$ a $I \times M$-valued semi martingale. From now on $P_{X,Y}^{\tilde{\nabla}}$ stands for the parallel transport along the shortest $\tilde{\nabla}$-geodesic between nearby points $X \in I \times M$ and $Y \in I \times M$ for the connection $\tilde{\nabla}$.

Let $\tilde{c}$ a curve in $I \times M$, we write $P_{\tilde{c}}^{\tilde{\nabla}}$ for the $\tilde{\nabla}$ parallel transport along $\tilde{c}$ and for a curve c in M we denote by $//_c^{T-s})$ the ∇^{T-s} parallel transport along c. We also denote $\pi : I \times M \rightarrow M$ the natural projection.

For a curve $\gamma : t \longrightarrow (s, x_t)$ in $I \times M$, where s is a fixed time, we have the following observation:

$$P_\gamma^{\tilde{\nabla}} = (\mathrm{Id}, //_{\pi(\gamma)}^{T-s}).$$

Define the Itô stochastic equation in the sense of [13]:

$$d^{\tilde{\nabla}} Y_t(x) = P^{\tilde{\nabla}}_{Y_t(x_0),Y_t(x)} d^{\tilde{\nabla}} Y_t(x_0) \tag{4.2}$$

Remark : The above equation is well defined, for x sufficiently close to x_0, because $d_{T-t}(X_t(x), X_t(x_0))$ is a finite variation process, with bounded derivative (by a short computation and [18], [6]).

Let $\tilde{//}_{0,t}$ be the parallel transport, associated to the connection $\tilde{\nabla}$, over the semi martingale $Y_t(x_0)$.

In the next lemma, we will explain the relationship between the two parallel transport $\tilde{//}_{0,t}$ and $//^T_{0,t}$.

Lemma 4.1 *Let $(e_i)_{i=1..n}$ be a orthonormale of $(TM_{x_0}, g(T))$ then*

$$d((//^T_{0,t})^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t})(0, e_i) = \frac{1}{2} (//^T_{0,t})^{-1} (\frac{\partial}{\partial_t} g(T-t))^{\#T-t} (d\pi \tilde{//}_{0,t}(0, e_i))\, dt.$$

Proof: The parallel transport $\tilde{//}_{0,t}$ does not modify the time vector, i.e.,

$$\tilde{//}^{-1}_{(t,X_t)}(0, ...) = (0, ...),$$

as can be shown for every curves, and hence for the semi-martingale Y_t by the transfer principle.

We can identify $T_{(0,x_0)} I \times M$ and $T_{x_0} M$ with the help of $(0, v) \longmapsto v$. Hence

$$(//^T_{0,t})^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t} : T_{(0,x_0)} I \times M \to T_{x_0} M$$

becomes an element in $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Recall that $//^T_{0,t} = U^T_t U^{T,-1}_0$. By definition of $D^{S,t}$ given in (1.2). We get using the shorthand $e_i = U^T_0 \tilde{e}_i$, with $(\tilde{e}_i)_{i=1..n}$ an orthonormal frame of $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
*d((//^T_{0,t})^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t}) &= *d(\langle (//^T_{0,t})^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t} e_i, e_j \rangle_T)_{i,j} \\
&= *d(\langle d\pi \tilde{//}_{0,t} e_i, //^T_{0,t} e_j \rangle_{T-t})_{i,j} \\
&= \Big(\langle D^{S,T-t} d\pi \tilde{//}_{0,t} e_i, U^T_t \tilde{e}_j \rangle_{T-t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial_t} (g(T-t))(d\pi \tilde{//}_{0,t} e_i, U^T_t \tilde{e}_j)\, dt \\
&\quad + \langle d\pi \tilde{//}_{0,t} e_i, D^{S,T-t} U^T_t \tilde{e}_j \rangle_{T-t} \Big)_{i,j}.
\end{aligned}$$

56

We also have:

$$\begin{aligned}
D^{S,T-t} d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i &= \mathcal{V}^{-1}_{d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i}\left((*d(d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i))^{v_{T-t}}\right) \\
&= \mathcal{V}^{-1}_{d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i}\left((dd\pi d\,\mathrm{ev}_{e_i}(*d\tilde{/\!/}_{0,t}))^{v_{T-t}}\right) \\
&= \mathcal{V}^{-1}_{d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i}\left(dd\pi(d\,\mathrm{ev}_{e_i}(*d\tilde{/\!/}_{0,t}))^{\tilde{v}}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Where we have used in the last equality the fact that $\tilde{/\!/}_{0,t}$ is the $\tilde{\nabla}$ horizontal lift of Y_t. The third one may be seen for curves, it comes from the definition of $\tilde{\nabla}$.

Following computations similar to one in the first section, we have by (1.5):

$$\begin{aligned}
*d((/\!/^T_{0,t})^{-1} d\pi \tilde{/\!/}_{0,t})_{i,j} &= \tfrac{\partial}{\partial_t} g(T-t)(d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, U_t^T \tilde{e}_j)\,dt \\
&+ \langle d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, D^{S,T-t} U_t^T \tilde{e}_j\rangle_{T-t} \\
&= \tfrac{\partial}{\partial_t} g(T-t)(d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, U_t^T \tilde{e}_j)\,dt \\
&+ \langle d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\alpha=1}^d \tfrac{\partial}{\partial_t} g(T-t)(U_t^T \tilde{e}_j, U_t^T \tilde{e}_\alpha) U_t^T \tilde{e}_\alpha\rangle_{T-t}\,dt \\
&= \tfrac{\partial}{\partial_t} g(T-t)(d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, U_t^T \tilde{e}_j)\,dt \\
&- \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\alpha=1}^d \tfrac{\partial}{\partial_t} g(T-t)(U_t^T \tilde{e}_j, U_t^T \tilde{e}_\alpha)\langle d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, U_t^T \tilde{e}_\alpha\rangle_{T-t}\,dt \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial_t} g(T-t)(d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, U_t^T \tilde{e}_j)\,dt.
\end{aligned}$$

In the general case, and by previous identification:

$$\begin{aligned}
d((/\!/^T_{0,t})^{-1} d\pi \tilde{/\!/}_{0,t})(0,e_i) &= \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial_t} g(T-t)(d\pi \tilde{/\!/}_{0,t} e_i, U_t^T \tilde{e}_j) e_j\,dt \qquad (4.3) \\
&= \frac{1}{2}(/\!/^T_{0,t})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial_t} g(T-t)\right)^{\# T-t}(d\pi \tilde{/\!/}_{0,t}(0,e_i))\,dt. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

.

□

Differentiating (4.2) along a geodesic curve beginning at $(0, x_0)$ with velocity (v_t, v) and using corollary 3.17 in [3] we get:

$$\tilde{/\!/}_{0,t} d\big(\tilde{/\!/}^{-1}_{0,t} TY_t(v_t, v)\big) = -\frac{1}{2}\tilde{R}(TY_t(v_t,v), dY_t(x_0))dY_t(x_0),$$

where $\tilde{R}$ is the curvature tensor.

Let $v \in T_x M$ we write:

$$TX_t v := d\pi TY_t(0, v).$$

In a more canonical way than theorem 3.2, we have the following proposition.

Proposition 4.2 *For all $v \in T_xM$ we have:*

$$d((//_{0,t}^T)^{-1} TX_t v) = \frac{1}{2}(//_{0,t}^T)^{-1}((\frac{\partial}{\partial_t} g(T-t)) - \mathrm{Ric}_{T-t})^{\#,T-t}(TX_t v)\,dt.$$

<u>*Proof*</u>: For a triple of tangent vectors $(L_t, L), (A_t, A), (Z_t, Z) \in TI \times TM$, we have:

$$\tilde{R}((L_t, L), (A_t, A))(Z_t, Z) = (0, R_{T-t}(L, A)Z).$$

Hence, according to the relation $dY(x_0) = (dt, *dX_t) = (dt, //_{0,t}^T e_i * dW^i)$ and the definition of the Ricci tensor:

$$\tilde{//}_{0,t} d\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v) = -\frac{1}{2}(0, \mathrm{Ric}^{\#T-t}(TX_t v))\,dt. \tag{4.5}$$

In order to compute in $\mathbb{R}^n$, we write:

$$(//_{0,t}^T)^{-1} TX_t v = ((//_{0,t}^T)^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t})(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v)). \tag{4.6}$$

By (4.5), we have $d\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v) \in d\mathcal{A}$ where $\mathcal{A}$ is the space of finite variation processes. We get:

$$d((//_{0,t}^T)^{-1} TX_t v) = d((//_{0,t}^T)^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t})(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v)) + ((//_{0,t}^T)^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t}) d(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v)).$$

By (4.6) and lemma 4.1 we get:

$$\begin{array}{rcl} d((//_{0,t}^T)^{-1} TX_t v) & = & *d((//_{0,t}^T)^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t})(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v)) \\ & + & ((//_{0,t}^T)^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t}) * d(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v)) \\ & = & *d((//_{0,t}^T)^{-1} d\pi \tilde{//}_{0,t})(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0, v)) \\ & - & \frac{1}{2}((//_{0,t}^T)^{-1} d\pi)(0, \mathrm{Ric}^{\#,T-t}(TX_t v)\,dt \\ & = & \frac{1}{2}(//_{0,t}^T)^{-1}(\frac{\partial}{\partial_t} g(T-t))^{\#T-t}(TX_t v)\,dt \\ & - & \frac{1}{2}(//_{0,t}^T)^{-1} \mathrm{Ric}^{\#,T-t}(TX_t v)\,dt. \end{array}$$

□

For all $f_0 \in C^\infty(M)$, and $f(t,.)$ a solution of (3.3), $f(T-t, X_t^T(x))$ is a martingale for all $x \in M$.

Corollary 4.3 *For all $v \in T_xM$:*

$$df(T-t, X_t^T(x))v = df(T-t,.)_{X_t^T(x)} //_{0,t}^T v,$$

is a martingale.

Proof: By differentiation under x of $f(T-t, X_t^T(x))$, we get a local martingale. According to [3] and by chain rule for differential we get the corollary. This result matches 3.2 after using the above proposition. $\square$

In an canonical way, we have the following result.

Theorem 4.4 *The following conditions are equivalent for a family $g(t)$ of metrics:*

i) $g(t)$ evolves under the forward Ricci flow.

ii) For all $T < T_c$ we have $//_{0,t}^T = \boldsymbol{W}_{0,t}^T = TX_t$.

iii) For all $T < T_c$, the damped parallel transport $\boldsymbol{W}_{0,t}^T$ is an isometry.

Proof: By 4.2 and 3.2, for the forward Ricci flow, the result follows by the equation of $g(t)$. $\square$

5 Second derivative of the stochastic flow

We take the differential of the stochastic flow in order to obtain a intrinsic martingale. We take the same notation as the previous section, and $g(t)$ is a family of metrics coming from a forward Ricci flow. Let $X_t^T(x)$ be the $g(T-t)$-BM started at x, constructed as in the previous section by the parallel coupling of a $g(T-t)$-BM started at x_0, $\tilde{\nabla}$ and $Y_t(x) = (t, X_t^T(x))$ as before, define the intrinsic trace (that do not depend on the choice of E_i as below):

$$\operatorname{Tr} \nabla_. TX_t(x_0)(.) := d\pi \Bigg(\sum_i \tilde{\nabla}_{(0,e_i)} TY_t(x)(0, E_i(x)) - TY_t(x) \tilde{\nabla}_{(0,e_i)}(0, E_i(x)) \Bigg)$$

where (e_i) is a $(T_{x_0}M, g(T))$ orthonormal basis, E_i are vectors fields in ΓTM such that $E_i(x_0) = e_i$ and $\tilde{\nabla}_{(0,e_i)} TY_t(x)(0, E_i(x))$ is a derivative of a bundle-valued semi-martingale in the sense of ([4], [3], [1]). By 4.4:

$$\operatorname{Tr} \nabla_. TX_t(x_0)(.) := d\pi \sum_i \tilde{\nabla}_{(0,e_i)} TY_t(x)(0, E_i(x)) - //_{0,t}^T d\pi (\sum_i \tilde{\nabla}_{(0,e_i)}(0, E_i(x)))$$

Theorem 5.1 *Let $L_t := (//_{0,t}^T)^{-1} \operatorname{Tr} \nabla_. TX_t(x_0)(.)$ be a $(T_{x_0}M, g(T))$-valued process, started at 0. Then:*

i) L_t is a $(T_{x_0}M, g(T))$-valued martingale, independent of the choice of E_i.

ii) The $g(T)$-quadratic variation of L is given by $d[L, L]_t = \| \operatorname{Ric}^{T-t}(X_t(x_0)) \|_{T-t}^2$ dt.

Proof: Recall that by the same construction of the previous section:

$$\tilde{D}(TY_t(x)(0,E_i(x))) = -\frac{1}{2}\tilde{R}(TY_t(x)(0,E_i(x)),dY_t(x))dY_t(x).$$

By the general commutation formula (e.g. theorem 4.5 in [4]), and by the previous equation which cancels two terms in this formula, we get:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}\tilde{\nabla}_{(0,e_i)}(TY_t(x)(0,E_i(x))) =& \tilde{\nabla}_{(0,e_i)}\tilde{D}(TY_t(x)(0,E_i(x)))\\
&+\tilde{R}(d^{\tilde{\nabla}}Y_t(x_0),TY_t(x_0)(0,e_i))TY_t(x_0)(0,e_i)\\
&-\frac{1}{2}\tilde{\nabla}\tilde{R}(dY_t(x_0),TY_t(x_0)(0,e_i),dY_t(x_0))TY_t(x_0)(0,e_i)\\
=&-\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{(0,e_i)}(\tilde{R}(TY_t(x)(0,E_i(x)),dY_t(x))dY_t(x))\\
&+\tilde{R}(d^{\tilde{\nabla}}Y_t(x_0),TY_t(x_0)(0,e_i))TY_t(x_0)(0,e_i)\\
&-\frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_{dY_t(x_0)}\tilde{R})(TY_t(x_0)(0,e_i),dY_t(x_0))TY_t(x_0)(0,e_i).
\end{aligned}$$

Taking trace in the previous equation we can go one step further. Recall that $(e_i)_{i=1..n}$ is a orthogonal basis of $(T_{x_0}M,g(T))$, and write for notation:

$$\tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{(t,x)}(V) = (0,\mathrm{Ric}^{\#T-t}(d\pi V)),$$

then:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_i \quad & \tilde{D}\tilde{\nabla}_{(0,e_i)}(TY_t(x)(0,E_i(x)))\\
= \quad & -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i\tilde{\nabla}_{(0,e_i)}(\tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{Y_t(x)}(TY_t(x)E_i(x)))\\
& +\textstyle\sum_i\tilde{R}(d^{\tilde{\nabla}}Y_t(x_0),TY_t(x_0)(0,e_i))TY_t(x_0)(0,e_i)\\
& -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i(\tilde{\nabla}_{dY_t(x_0)}\tilde{R})(TY_t(x_0)(0,e_i),dY_t(x_0))TY_t(x_0)(0,e_i)\\
= \quad & -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i(\tilde{\nabla}_{(TY_t(x_0)(0,e_i))}\tilde{\mathrm{Ric}}^{\#})(TY_t(x_0)(0,e_i))\\
& -\tfrac{1}{2}(\tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{Y_t(x_0)}(\textstyle\sum_i\tilde{\nabla}_{(0,e_i)}TY_t(x)(0,E_i(x)))) + \tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{Y_t(x_0)}(d^{\tilde{\nabla}}Y_t(x_0))\\
& -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i(\tilde{\nabla}_{dY_t(x_0)}\tilde{R})(TY_t(x_0)(0,e_i),dY_t(x_0))TY_t(x_0)(0,e_i).
\end{aligned}$$

In the last equality, we use the chain derivative formula, and derivation is taking with respect to x . We will make an independent computation for the last term in the previous equation. Let Tr stand for the usual trace:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_i(\tilde{\nabla}_{dY_t(x_0)}\tilde{R})(TY_t(x_0)(0,e_i),dY_t(x_0))TY_t(x_0)(0,e_i)\\
&=\textstyle\sum_i(0,(\nabla^{T-t}_{dX_t}R^{T-t})(TX_t(x_0)e_i,dX_t)TX_t(x_0)e_i)\\
&=\textstyle\sum_{i,j}(0,(\nabla^{T-t}_{//^T_{0,t}e_j}R^{T-t})(TX_t(x_0)e_i,//^T_{0,t}e_j)TX_t(x_0)e_i)\,dt\\
&=\textstyle\sum_j(0,\mathrm{Tr}_{1,3}(\nabla^{T-t}_{//^T_{0,t}e_j}R^{T-t})(//^T_{0,t}e_j))\,dt\\
&=\textstyle\sum_j(0,(\nabla^{T-t}_{//^T_{0,t}e_j}\mathrm{Tr}_{1,3}R^{T-t})(//^T_{0,t}e_j))\,dt\\
&=-\textstyle\sum_j(0,(\nabla^{T-t}_{//^T_{0,t}e_j}\mathrm{Ric}^{\#T-t})(//^T_{0,t}e_j))\,dt,
\end{aligned}$$

where we have used in the second equality the fact that in case of the forward Ricci flow $//^T_{0,t}$ is a $g(T-t)$ isometry and $dX = //^T_{0,t} e_j dW^j$. In the last equality we use the commutation between trace and covariant derivative (for example [21], or [19]). Note that:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_i (\tilde\nabla_{(TY_t(x_0)(0,e_i))} \tilde{\mathrm{Ric}}^{\#})(TY_t(x_0)(0,e_i)) \\
&= \textstyle\sum_i (0, (\nabla^{T-t}_{TX_t(x)e_i} \mathrm{Ric}^{\# T-t}_{X^T_t(x)})(TX_t(x)e_i))\, dt
\end{aligned}$$

Hence, using 4.4:

$$\begin{aligned}
&\tilde D(\textstyle\sum_i \tilde\nabla_{(0,e_i)} TY_t(x)(0, E_i(x))) \\
&\quad = -\frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{Y_t(x_0)}(\textstyle\sum_i \tilde\nabla_{(0,e_i)} TY_t(x)(0,E_i(x)))) + \tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{Y_t(x_0)}(d^{\tilde\nabla} Y_t(x_0))
\end{aligned}$$

Write, for simplicity, B for $\sum_i \tilde\nabla_{(0,e_i)} TY_t(x)(0, E_i(x))$. We compute:

$$\begin{aligned}
d(//^{T,-1}_{0,t} d\pi B) &= d([//^{T,-1}_{0,t} d\pi \tilde{//}_{0,t}][(\tilde{//}_{0,t})^{-1} B]) \\
&= \frac{1}{2} //^{T,-1}_{0,t} (\partial_t g(T-t))^{\#, T-t} (d\pi B)\, dt \\
&\qquad + //^{T,-1}_{0,t} (-\frac{1}{2} d\pi(\tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}(B)) + d\pi(\tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{Y_t(x_0)}(d^{\tilde\nabla} Y_t(x_0)))) \\
&= //^{T,-1}_{0,t} (d\pi \tilde{\mathrm{Ric}}^{\#}_{Y_t(x_0)}(d^{\tilde\nabla} Y_t(x_0))) \\
&= \textstyle\sum_i //^{T,-1}_{0,t} \mathrm{Ric}^{\# T-t}_{X^T_t(x)} (//^T_{0,t} e_i) dW^i,
\end{aligned}$$

where we have used lemma 4.1 in the first equality. We get a intrinsic martingale that does not depend on E_i, starting at 0. By the definition in theorem 5.1 and by the formula preceding theorem 5.1, the above calculations yield:

$$L_t = \int_0^t \sum_i //^{T,-1}_{0,t} \mathrm{Ric}^{\# T-t}_{X^T_t(x)} (//^T_{0,t} e_i) dW^i - d\pi(\sum_i \tilde\nabla_{(0,e_i)}(0, E_i(x))).$$

For the $g(T)$-quadratic variation of L_t we use the isometry property of the parallel transport; we compute the quadratic variation:

$$\begin{aligned}
d[L,L]_t &= \langle //^{T,-1}_{0,t} \mathrm{Ric}^{\# T-t}_{X^T_t(x)} (//^T_{0,t} e_i), //^{T,-1}_{0,t} \mathrm{Ric}^{\# T-t}_{X^T_t(x)} (//^T_{0,t} e_i) \rangle_T\, dt \\
&= \textstyle\sum_i \| \mathrm{Ric}^{\# T-t}_{X^T_t(x)} (//^T_{0,t} e_i) \|^2_{g(T-t)}\ dt \\
&= \|\!| \mathrm{Ric}^{\# T-t}_{X^T_t(x)} \|\!|^2_{T-t}\, dt;
\end{aligned}$$

where $\|\!|.\|\!|$ is the usual Hilbert-Schmidt norm of linear operator. By the independence of the choice of the orthonormal basis we can express this norm in terms of the eigenvalues of the Ricci operator:

$$d[L,L]_t = \sum_i \lambda_i^2 (T-t, X^T_t(x))\, dt.$$

$\square$

Remark: We could choose E_i such that $\tilde{\nabla}_{(0,e_i)}(0, E_i(x)) = 0$ that do not change the martingale L, but give a simple version.

Remark: This martingale can be used to look at the behavior at point where the first singularity of the Ricci flow occurs, i.e. where the norm of the Riemannian curvature explodes.

References

[1] M. Arnaudon and A. Thalmaier. Complete lifts of connections and stochastic Jacobi fields. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 77(3):283–315, 1998.

[2] Marc Arnaudon, Robert O. Bauer, and Anton Thalmaier. A probabilistic approach to the Yang-Mills heat equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 81(2):143–166, 2002.

[3] Marc Arnaudon and Anton Thalmaier. Stability of stochastic differential equations in manifolds. In *Séminaire de Probabilités, XXXII*, volume 1686 of *Lecture Notes in Math.*, pages 188–214. Springer, Berlin, 1998.

[4] Marc Arnaudon and Anton Thalmaier. Horizontal martingales in vector bundles. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*, pages 419–456. Springer, Berlin, 2003.

[5] Bennett Chow and Dan Knopf. *The Ricci flow: an introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[6] M. Cranston. Gradient estimates on manifolds using coupling. *J. Funct. Anal.*, 99(1):110–124, 1991.

[7] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Differential Geom.*, 18(1):157–162, 1983.

[8] K. D. Elworthy, Y. Le Jan, and Xue-Mei Li. *On the geometry of diffusion operators and stochastic flows*, volume 1720 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] K. D. Elworthy and X.-M. Li. Formulae for the derivatives of heat semigroups. *J. Funct. Anal.*, 125(1):252–286, 1994.

[10] K. D. Elworthy and M. Yor. Conditional expectations for derivatives of certain stochastic flows. In *Séminaire de Probabilités, XXVII*, volume 1557 of *Lecture Notes in Math.*, pages 159–172. Springer, Berlin, 1993.

[11] M. Emery. Une topologie sur l'espace des semimartingales. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 260–280. Springer, Berlin, 1979.

[12] Michel Émery. *Stochastic calculus in manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989. With an appendix by P.-A. Meyer.

[13] Michel Émery. On two transfer principles in stochastic differential geometry. In *Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89*, volume 1426 of *Lecture Notes in Math.*, pages 407–441. Springer, Berlin, 1990.

[14] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2):255–306, 1982.

[15] Elton P. Hsu. *Stochastic analysis on manifolds*, volume 38 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[16] Jürgen Jost. *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, volume 4 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1984.

[17] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005.

[18] Wilfrid S. Kendall. Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property. *Stochastics*, 19(1-2):111–129, 1986.

[19] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[20] Hiroshi Kunita. *Stochastic flows and stochastic differential equations*, volume 24 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[21] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.

[22] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1997 edition.

[23] Anton Thalmaier and Feng-Yu Wang. Gradient estimates for harmonic functions on regular domains in Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.*, 155(1):109–124, 1998.

[24] Peter Topping. *Lectures on the Ricci flow*, volume 325 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Chapter 4

Some stochastic process without birth, linked to the mean curvature flow

65

Some stochastic process without birth, linked to the mean curvature flow

A.K Coulibaly

Abstract

Using Huisken results about the mean curvature flow on a strictly convex surface, and Kendall-Cranston coupling, we will build a stochastic process without birth, and show that there exists a unique law of such process. This process has many similarities with the circular Brownian motions studied by Émery, Schachermayer, and Arnaudon. In general, this process is not a stationary process, it is linked with some differential equation without initial condition. We will show that this differential equation has a unique solution up to a multiplicative constant.

1 Tools and first properties

Let M be a Riemannian compact n-manifold without boundary, which is smoothly embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$, and $n \geq 2$. Denote by F_0 the embedding function:

$$F_0 : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Consider the flow defined by:

$$\begin{cases} \partial_t F(t,x) = -H_\nu(t,x)\vec{\nu}(t,x) \\ F(0,x) = F_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

Let $M_t = F(t,M)$, we identify M with M_0 and F_0 with Id. In the previous equation (1.1), $\nu(t,x)$ is the outer unit normal at $F(t,x)$ on M_t, and $H_\nu(t,x)$ is the mean curvature at $F(t,x)$ on M_t in the direction $\nu(t,x)$, (i.e. $H_\nu(x) =$ trace $(S_\nu(x))$ where S_ν is the second fundamental form, for definition see [20]).

Remark : In this paper we take this point of view of the mean curvature flow (see [14] for existence, and related result). Many other authors give a different point of view for this equation. The viscosity solution (see [11],[9],[10],[12],[8]) generalizes the solution after the explosion time and gives a uniqueness solution which is also contained in Brakke family of solutions and passes the singularity.

We will just look at the smooth solution until the explosion time.

As usual we call M_t the motion by mean curvature. For self-completeness, we include a proof of the next lemma, although it is well-known.

Lemma 1.1 *Let (M, g) be a Riemannian manifold isometrically embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$. Denote ι the isometry:*

$$(M, g) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{n+1}.$$

then:

$$\forall x \in M, \quad \Delta\iota(x) = -H_\nu(x)\vec{\nu}(x). \tag{1.2}$$

Where Δ is the Laplace-Beltrami operator associated to the metric g.

<u>*proof*</u> : By the flatness of target manifold, we have

$$\Delta\iota(x) = \begin{pmatrix} \Delta\iota^1(x) \\ \vdots \\ \Delta\iota^{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

and $\Delta\iota^j(x) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt^2}\Big|_{t=0} \iota^j(\gamma_i(t))$, where $\gamma_i(t)$ is a geodesic in M such that $\gamma_i(0) = x$ and $\dot{\gamma}_i(0) = A_i$ and A_i is a orthogonal basis of T_xM. By definition of a geodesic we obtain:

$$\Delta\iota(x) \perp T_{\iota(x)}(\iota(M)),$$

so there exists a function β such that $\Delta\iota(x) = \beta(x)\vec{\nu}(x)$. We compute β as follows:

$$\begin{array}{rcl}
\beta(x) & = & \langle \Delta\iota(x), \vec{\nu}(x) \rangle \\
& = & \sum_{i=1}^n \langle \frac{d}{dt^2}\Big|_{t=0} \iota(\gamma_i(t)), \vec{\nu}(x) \rangle \\
& = & \sum_{i=1}^n \langle \nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma}_i(t))} \iota(\dot{\gamma}_i(t))\Big|_{t=0}, \vec{\nu}(x) \rangle \\
& = & \sum_{i=1}^n -\langle \iota(\dot{\gamma}_i(t)), \nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma}_i(t))} \vec{\nu} \rangle\Big|_{t=0}, \text{ metric connection} \\
& = & \sum_{i=1}^n -\langle \iota(\dot{\gamma}_i(t)), (\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma}_i(t))} \vec{\nu})^\top \rangle\Big|_{t=0} \\
& = & -\text{ trace } (S_\nu(x)).
\end{array}$$

□

To give a parabolic interpretation of this equation (1.1), let us define a family of metrics $g(t)$ on M which is the pull-back by $F(t, .)$ of the induced metric on M_t. Using the previous lemma we rewrite the equation as in ([14]):

$$\begin{cases} \partial_t F(t, x) = \Delta_t F(t, x) \\ F(0, x) = F_0(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

where Δ_t is the Laplace-Beltrami operator associated to the metric $g(t)$. 67

Remark : Sometimes we will use a probabilistic convention, consisting in putting $\frac{1}{2}$ before the Laplacian (which just changes the time and makes the calculus more synthetic), sometimes we will use geometric convention.

We call T_c the explosion time of the mean curvature flow, let $T < T_c$, and $g(t)$ be the family of metrics defined above. Let $(W^i)_{1 \le i \le n}$ be a $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion. We recall from [4] the definition of the $g(t)$-Brownian motion in M started at x, denoted by $g(t)$-BM(x):

Definition 1.2 *Let us take a filtered probability space $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and a $C^{1,2}$-family $g(t)_{t\in[0,T[}$ of metrics over M. A M-valued process $X(x)$ defined on $\Omega \times [0,T[$ is called a $g(t)$ Brownian motion in M started at $x \in M$ if $X(x)$ is continuous, adapted and for every smooth function f,*

$$f(X_s(x)) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^s \Delta_t f(X_t(x))dt$$

is a local martingale vanishing at 0.

We give a proposition which yields a characterization of mean curvature flow by the $g(t)$ Brownian motion.

Proposition 1.3 *Let M be an n-dimensional manifold isometrically embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$. Consider the application:*

$$F : [0,T[\times M \to \mathbb{R}^{n+1}$$

such that $F(t,.)$ are diffeomorphisms, and the family of metrics $g(t)$ over M, which is the pull-back by $F(t,.)$ of the induced metric on $M_t = F(t,M)$. Then the following items are equivalent:

i) $F(t,.)$ is a solution of mean curvature flow

ii) $\forall x_0 \in M$, $\forall T \in [0,T_c[$, let $\tilde{g}_t^T = \frac{1}{2}g_{T-t}$ and $X^T(x_0)$ be a $(\tilde{g}_t^T)_{t\in[0,T]}$-BM($x_0$), then:

$$Y_t^T = F(T-t, X_t^T(x_0))$$

is a local martingale in $\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>proof</u> : By definition we have a sequence of isometries:

$$F(t,.) : (M, g_t) \tilde{\to} M_t \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

Let $x_0 \in M$ and $T \in [0,T_c[$ and $X^T(x_0)$ a $(\tilde{g}_t^T)_{t\in[0,T]}$-BM($x_0$). We just compute the Itô differential of:

$$Y_t^{T,i} = F^i(T-t, X_t^T(x_0)),$$

that is to say:

$$\begin{aligned} d(Y_t^{T,i}) &= -\tfrac{\partial}{\partial t}F^i(T-t,X_t^T(x_0))dt + d(F_{T-t}^i(X_t^T(x_0)) \\ &\underset{d\mathcal{M}}{\equiv} -\tfrac{\partial}{\partial t}F^i(T-t,X_t^T(x_0))dt + \tfrac{1}{2}\Delta_{\tilde{g}_t}F_{T-t}^i(X_t^T(x_0))dt \\ &\underset{d\mathcal{M}}{\equiv} -\tfrac{\partial}{\partial t}F^i(T-t,X_t^T(x_0))dt + \Delta_{g_{T-t}}F_{T-t}^i(X_t^T(x_0))dt \\ &\underset{d\mathcal{M}}{\equiv} 0. \end{aligned}$$

Therefore Y_t^T is a local martingale.

Let us show the converse. Let $x_0 \in M$ and $T \in [0,T_c[$ and $X^T(x_0)$ a $(\tilde{g}_t^T)_{t\in[0,T]}$-BM$(x_0)$, $Y_t^{T,i}$ is a local martingale so almost surely, for all $t \in [0,T]$:

$$-\frac{\partial}{\partial t}F^i(T-t,X_t^T(x_0))dt + \Delta_{g_{T-t}}F_{T-t}^i(X_t^T(x_0))dt = 0$$

so that for all $s \in [0,T]$, by integrating we get

$$\int_0^s -\frac{\partial}{\partial t}F^i(T-t,X_t^T(x_0))dt + \Delta_{g_{T-t}}F_{T-t}^i(X_t^T(x_0))dt = 0$$

the continuity of every $g(t)$-Brownian motion yields,

$$-\frac{\partial}{\partial t}F^i(T,x_0) + \Delta_{g_T}F_T^i(x_0) = 0.$$

□

In order to apply this proposition, we give an estimation of the explosion time. It is also a consequence of a maximum principle, which is explicitly contained in the $g(t)$-Brownian Motion.

The quadratic covariation of Y_t^T is given by:

Proposition 1.4 *Let Y_t^T be defined as before, then the quadratic covariation of Y_t^T for the usual scalar product in $\mathbb{R}^{n+1}$ is:*

$$\langle dY_t^T, dY_t^T\rangle = 2n\mathbb{1}_{[0,T]}(t)dt$$

<u>*proof*</u> : Let $/\!\!/_{0,t}^T$ be the parallel transport above X_t^T, it is shown in [4] that it is an isometry :

$$/\!\!/_{0,t}^T : (T_{X_0}M, \tilde{g}(0)) \longmapsto (T_{X_t}M, \tilde{g}(t)).$$

Let $(e_i)_{1\le i\le n}$ be a orthonormal basis of $(T_{X_0}M, \tilde{g}(0))$, and $(W^i)_{1\le i\le n}$ be the $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion such that (e.g. [4], [2]):

$$*dW_t = /\!\!/_{0,t}^{T,-1} * dX_t^T,$$

69

and in the Itô's sense:

$$dX_t^T = /\!\!/_{0,t}^T e_i dW_t^i.$$

Hence

$$\begin{array}{rcl}\langle dY_t^T, dY_t^T\rangle & = & \langle d(F_{T-t}(X_t^T(x_0))), d(F_{T-t}(X_t^T(x_0)))\rangle \\ & = & \langle d(X_t^T(x_0)), d(X_t^T(x_0))\rangle_{g_{T-t}} \\ & = & \langle d(X_t^T(x_0)), d(X_t^T(x_0))\rangle_{2\tilde{g}_t} \\ & = & \langle \sum_{i=1}^n /\!\!/_{0,t}^T e_i dW^i, \sum_{j=1}^n /\!\!/_{0,t}^T e_j dW^j\rangle_{2\tilde{g}_t} \\ & = & \sum_{i=1}^n \langle /\!\!/_{0,t}^T e_i, /\!\!/_{0,t}^T e_i\rangle_{2\tilde{g}_t} dt \\ & = & \sum_{i=1}^n 2dt \\ & = & 2ndt.\end{array}$$

To go from the first to the second line, we have used the fact that F_{T-t} is a isometry, for the last step we used the isometry of the parallel transport. □

Remark : Up to convention we recover the same martingale as in [21].
An immediate corollary of Proposition 1.4 is the following result, which appears in [14] and [11].

Corollary 1.5 *Let M be a compact Riemannian n-manifold and T_c the explosion time of the mean curvature flow, then:* $T_c \leq \frac{diam(M_0)^2}{2n}$

<u>proof</u> : Recall that the mean curvature flow stays in a compact region, like the smallest ball which contain M_0, this result is clear in the strictly convex starting manifold and can be found in a general setting using P.L Lions viscosity solution (e.g. theorem 7.1 in [11]).
For all $T \in [0, T_c[$ take the previous notation. So by the above recall that:

$$\| Y_t^T \| \leq diam(M_0),$$

then Y_t^T is a true martingale. And

$$\| Y_t^T \|^2 - \langle Y^T, Y^T\rangle_t$$

is also a true martingale. Hence:

$$\mathbb{E}[\| Y_0^T \|^2] + 2nT \leq diam(M_0)^2,$$

we obtain

$$T \leq \frac{diam(M_0)^2}{2n}.$$

□

2 Tightness, and first example on the sphere

We now define $(\tilde{g}^{T_c})_{t\in]0,T_c]}$-BM in a general setting. When the initial manifold M_0 is a sphere we use the conformality of the metric, to show that after a deterministic change of time such process is a $]-\infty, T_c]$ Brownian motion on the sphere (for existence and definition see [6] and [1]). In the next section, we will give a general result of uniqueness when the initial manifold M_0 is strictly convex.

Definition 2.1 *Let M be an n-dimensional strictly convex manifold (i.e. with a strictly positive definite second fundamental form), $F(t,.)$ the smooth solution of the mean curvature flow, $(M, g(t))$ the family of metrics constructed by pull-back (as in 1.3) and T_c the explosion time. We define a family of processes as follow:* $\forall \epsilon \in]0, T_c]$

$$X_t^\epsilon(x_0) = \begin{cases} x_0 \text{ if } 0 < t \leq \epsilon \\ \\ BM(\epsilon, x_0)_t \text{ if } \epsilon \leq t \leq T_c \end{cases}$$

where $BM(\epsilon, x_0)_t$ denotes a $\frac{1}{2}g(T_c - t)$ Brownian motion that starts at x_0 at time ϵ, and

$$Y_t^\epsilon(x_0) = \begin{cases} F(T_c - \epsilon, x_0) \text{ if } 0 \leq t \leq \epsilon \\ \\ F(T_c - t, X_t^\epsilon(x_0)) \text{ if } \epsilon \leq t \leq T_c. \end{cases}$$

Remark : We proceed as before because, at the time T_c, there is no more metric. Huisken shows in [14] that in this case:

$$\exists \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad s.t. \quad \forall x_0 \in M, \qquad \lim_{s \to T_c} F(s, x_0) = \mathcal{D}$$

Proposition 2.2 *With the same notation as the above definition, there exists at least one martingale Y^1 in the adherence (for the weak convergence) of $(Y_.^\epsilon(x_0))_{\epsilon>0}$ when ϵ goes to 0. Also, every adherence value is a martingale.*

<u>*proof*</u> : We have:

$$\begin{cases} dY_t^\epsilon(x_0) = 0 \text{ if t } \leq \epsilon \\ \\ dY_t^\epsilon(x_0) = d\mathcal{M} \text{ if t } \geq \epsilon. \end{cases}$$

Where $d\mathcal{M}$ is an Itô differential of some martingale. This defines a family of martingales. With the same computation as in proposition 1.4, we get:

$$\langle dY_t^\epsilon, dY_t^\epsilon \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 2n 1_{]\epsilon, T_c]}(t) dt \leq 2n dt.$$

Also by the above remark Y_0^ϵ is tight, hence $(Y_.^\epsilon(x_0))_{\epsilon>0}$ is tight. As usual, Prokhorov's theorem implies that one adherence value exists. We also use Huisken [14] (for the strictly convex manifold) to yield:

$$\| Y^\epsilon \| \leq diam(M_0). \tag{2.1}$$

By proposition 1-1 in [16] page 481, and the fact that (Y^ϵ) are martingales we conclude that all adherence values of (Y^ϵ) are martingales with respect to the filtration that they generate. □

Remark : The above proposition is also valid for arbitrary M that are isometrically embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$. Just because the bound 2.1 is also a consequence of theorem 7.1 in [11].
We will now derive the tightness of X_t^ϵ from those of (Y^ϵ). This purpose will be completed by the next lemma 2.4.
Recall some results of [14], if M_0 is a strictly convex manifold then M_t is also strictly convex, and $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < T_c$, $M_{t_2} \subset int(M_{t_1})$, where int is the interior of the bounded connected component. Hence there is a foliation on $\overline{int(M_0)}$:

$$\bigsqcup_{t\in[0,T_c[} M_t,$$

where $\bigsqcup$ stand for the disjoint union.

Definition 2.3 *We note:*

$$\mathcal{C}^f(]0,T_c],\mathbb{R}^{n+1}) = \{\gamma \in \mathcal{C}(]0,T_c],\mathbb{R}^{n+1}), s.t. \quad \gamma(t) \in M_{T_c-t}\}.$$

Noted that $\mathcal{C}^f(]0,T_c],\mathbb{R}^n)$ is a closed set of $\mathcal{C}(]0,T_c],\mathbb{R}^n)$ for the Skorokhod topology.

Lemma 2.4 *Let M an n-dimensional strictly convex manifold, $F(t,.)$ the smooth solution of the mean curvature flow and T_c the explosion time. Then*

$$F : [0,T_c[\times M \longrightarrow \bigsqcup_{t\in[0,T_c[} M_t \ ,$$

is a diffeomorphism in the sense of manifold with boundary. And,

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{C}^f(]0,T_c],\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{C}(]0,T_c],M) \\ \gamma & \longmapsto & t \mapsto F^{-1}(T_c-t,\gamma(t)) \end{array}$$

is continuous for the different Skorokhod topologies. To define the Skorokhod topology in $\mathcal{C}(]0,T_c],M)$ we could use the initial metric $g(0)$ on M.

proof : It is clear that F is smooth as a solution of a parabolic equation [14], and this result has been used above. Its differential is given at each point by:

$$\forall (t,x) \in [0,T_c[\times M, \quad \forall v \in T_x M$$

$$DF(t,x)(\frac{\partial}{\partial_t}, v) = \frac{\partial}{\partial_t} F(t,x) \oplus DF_t(x)(v)$$

where $\frac{\partial}{\partial_t}F(t,x) = -H(t,x)\overrightarrow{\nu}(t,x)$, here $\oplus$ stands for $+$ and means that we cannot cancel the sum without cancelling each term. Since there is no ambiguity we write $H(t,x)$ for $H_\nu(t,x)$. Recall that $H(t,x) > 0$.

For the second part of this lemma, we remark that for $0 \leq \delta < T_c$

$$F^{-1} : \bigsqcup_{t\in[0,\delta]} M_t \longrightarrow [0,\delta] \times M$$

is Lipschitz (use the bound of the differential on a compact).

Recall also that a sequence converges to a continuous function for Skorokhod topology if and only if it converges to this function locally uniformly. We will now show the continuity of Ψ. Take a sequence α_m in $\mathcal{C}^f(]0,T_c],\mathbb{R}^{n+1})$ and $\alpha \in \mathcal{C}^f(]0,T],\mathbb{R}^{n+1})$ such that $\alpha_m \longrightarrow \alpha$ for the Skorokhod topology.
Then for all A compact set in $]0,T_c]$, $\parallel \alpha_m - \alpha \parallel_A \longrightarrow 0$, where $\parallel f \parallel_A = \sup_{t\in A} \parallel f(t) \parallel$.

Let A be a compact set in $]0,T_c]$, then there exists a Lipschitz constant C_A of F^{-1} in $\bigsqcup_{t\in A} M_t$, such that for all t in A,

$$d_{g(o)}(F^{-1}(\alpha_m(t)), F^{-1}(\alpha(t))) \leq C_A \parallel \alpha_m(t) - \alpha(t) \parallel,$$

where $d_{g(o)}(x,y)$ is the distance in M beetwen x and y for the metric $g(0)$. We also define $d_{g(o),A}(f,g) = \sup_{t\in A} d_{g(o)}(f(t),g(t))$, where f,g are M-valued function. We get:

$$d_{g(o),A}(\Psi(\alpha_m), \Psi(\alpha) \leq C_A \parallel \alpha_m - \alpha \parallel_A .$$

So $\Psi(\alpha_m) \longrightarrow \Psi(\alpha)$ uniformly in all compact, so for the Skorokhod topology in $\mathcal{C}(]0,T_c],M)$. □

Let:

$$\tilde{Y}_t^\epsilon = (Y_t^\epsilon - Y_0^\epsilon) + (Y_0^\epsilon \mathbb{1}_{[\epsilon,T_c]}(t) + \mathbb{1}_{[0,\epsilon]}(t) F(T_c - t, x_o)).$$

Proposition 2.2 gives the tightness of $Y_t^\epsilon - Y_0^\epsilon$, and $Y_0^\epsilon \mathbb{1}_{[\epsilon,T_c]}(t) + \mathbb{1}_{[0,\epsilon]}(t)F(T_c - t, x_o)$ is a non-random sequence of functions that converges uniformly, hence $\tilde{Y}^\epsilon$ is tight. For strictly positive time t,

$$X_t^\epsilon = F^{-1}(T_c - t, \tilde{Y}_t^\epsilon).$$

The previous lemma 2.4 yields the tightness of X^ϵ. Hence we have shown that:

$$\forall \varphi = (\epsilon_k)_k \to 0, \quad \exists X^\varphi_{]0,T_c]}, \qquad X^{\epsilon_k}_{]0,T_c]} \xrightarrow{\mathcal{L}} X^\varphi_{]0,T_c]} \text{ for an extracted sequence.}$$

Proposition 2.5 *Let* $\varphi = (\epsilon_k)_k \to 0$, *and* $X^{\varphi}_{]0,T_c]}$, *s.t.* $X^{\epsilon_k}_{]0,T_c]} \overset{\mathcal{L}}{\to} X^{\varphi}_{]0,T_c]}$. *Then* $X^{\varphi}_{]0,T_c]}$ *is a* $\frac{1}{2}g(T_c - t)$*-BM in the following sense:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad X^{\varphi}_{[\epsilon,T_c]} \overset{\mathcal{L}}{=} BM(\epsilon, X^{\varphi}_{\epsilon})$$

.

<u>*proof*</u> : Let $\epsilon > 0$ then for large k:

$$\begin{cases} X^{\epsilon_k} \text{ is a } BM(\epsilon, X^{\epsilon_k}_{\epsilon}) \text{ after time } \epsilon \text{ , by Markov property} \\ \\ \text{and let } X \text{ be a } BM(\epsilon, X^{\varphi}_{\epsilon}) \text{ after time } \epsilon \end{cases}$$

We want to show that $X = X^{\varphi}$ after ϵ . So for sketch of the proof:

$$X^{\epsilon_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{L}} X^{\varphi}$$

$$\text{so } X^{\epsilon_k}_{\epsilon} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{L}} X^{\varphi}_{\epsilon},$$

we use the Skorokhod theorem, to have a L_2-convergence in a larger probability space:

$$X'^{\epsilon_k}_{\epsilon} \xrightarrow[k\to\infty]{L_2,a.s.} X'^{\varphi}_{\epsilon},$$

with $X'^{\epsilon_k}_{\epsilon} \overset{\mathcal{L}}{=} X^{\epsilon_k}_{\epsilon}$ and $X'^{\varphi}_{\epsilon} \overset{\mathcal{L}}{=} X^{\varphi}_{\epsilon}$. We use convergence of solution of S.D.E with initial conditions converging in L_2 (e.g. in Stroock and Varadhan [22]), to get:

$$BM(\epsilon, X'^{\epsilon_k}_{\epsilon}) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{L}} BM(\epsilon, X'^{\varphi}_{\epsilon}),$$

$$BM(\epsilon, X'^{\epsilon_k}_{\epsilon}) \overset{\mathcal{L}}{=} X^{\epsilon_k}_{[\epsilon,T_c]},$$

$$BM(X'^{\varphi}_{\epsilon}) \overset{\mathcal{L}}{=} BM(\epsilon, X^{\varphi}_{\epsilon}).$$

We use that

$$X^{\epsilon_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{L}} X^{\varphi}$$

to conclude, after identification of the limit:

$$X = BM(\epsilon, X^{\varphi}_{\epsilon}) \overset{\mathcal{L}}{=} X^{\varphi}_{[\epsilon,T_c]}.$$

Hence the process X^{φ} is a $\frac{1}{2}g(T_c - u)_{u\in]0,T_c]}$-BM in the above sense, we call it "without birth" .

□

We now show that, in the sphere case, the $\frac{1}{2}g(T_c - u)_{u\in]0,T_c]}$-BM is, after a change of time, nothing else than a $BM(g(0))_{]-\infty,0]}$, this will give uniqueness in law of such process. 74

Proposition 2.6 *Let $g(t)$ be a family of metrics which comes from a mean curvature flow on the sphere. Then the $\tilde{g}(u) = \frac{1}{2}g(T_c - u)_{u\in]0,T_c]}$-BM is unique in law.*

<u>proof</u> : Let R_0 be the radius of the first sphere. Then $T_c = \frac{R_0^2}{2n}$, and by direct computation we obtain:

$$F(t,x) = \frac{\sqrt{R_0^2 - 2nt}}{R_0}x,$$

$$g(t) = \frac{R_0^2 - 2nt}{R_0^2}g(0).$$

So for all $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ we have:

$$\Delta_{g(t)}f = \frac{R_0^2}{R_0^2 - 2nt}\Delta_{g(0)}f$$

and

$$\begin{aligned}\nabla^{g(s)}df(X_i,X_j) &= f_{ij} - \Gamma_{ij}^k(s,.)f_k \\ &= f_{ij} - \Gamma_{ij}^k(0,.)f_k \text{ because the metrics are homothetic} \\ &= \nabla^{g(0)}df(X_i,X_j).\end{aligned}$$

Let X be a $\frac{1}{2}g(T_c - u)_{u\in]0,T_c]}$-BM. For all $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$, $u \in]0,T_c]$ and for all $T_c > t \geq u$ we have:

$$\begin{aligned}f(X_t) - f(X_u) &\overset{\mathcal{M}}{\equiv} \tfrac{1}{2}\int_u^t \Delta_{\tilde{g}(s)}f(X_s)ds \\ &\overset{\mathcal{M}}{\equiv} \tfrac{1}{2}\int_u^t \nabla^{\tilde{g}(s)}df(*dX,*dX) \\ &\overset{\mathcal{M}}{\equiv} \tfrac{1}{2}\int_u^t \nabla^{g(0)}df(*dX,*dX)\end{aligned}$$

$$df(X)_{]0,T_c]} \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} \frac{1}{2}\nabla^{g(0)}df(*dX,*dX),$$

hence $X_{]0,T_c]}$ is a $g(0)$- martingale. From [4]:

$$df(X_t(x)) = \langle \nabla^{\tilde{g}(t)}f, /\!/_{0,t}v_i\rangle_{\tilde{g}(t)}dW^i + \frac{1}{2}\Delta_{\tilde{g}(t)}(f)(X_t(x))dt, \tag{2.2}$$

with abusive notation (because we have no starting point, to get sense we have to take the conditional expectation at a time before t).
It follows from (2.2):

$$df(X_t(x)) = \parallel \nabla^{\tilde{g}(t)}f(X_t(x)) \parallel_{\tilde{g}(t)} dB_t + \frac{1}{2}(\frac{R_0^2}{R_0^2 - 2n(T_c - t)})\Delta_0 f(X_t(x))dt,$$

where B_t is some real-valued Brownian motion. With help of the first computation,

$$df(X_t) = \sqrt{\frac{R_0^2}{nt}} \parallel \nabla^{g(0)}f(X_t) \parallel_{g(0)} dB_t + \frac{1}{2}(\frac{R_0^2}{nt})\Delta_0 f(X_t)dt.$$

Now consider the solution of:

$$\varphi'(t)R_0^2 = n(\varphi(t)) \text{ such that } \varphi(0) = T_c.$$

i.e. the function

$$\varphi(t) = T_c e^{\frac{t}{2T_c}}.$$

We get that $X_{\varphi(t)} = (BM_{g(0)})_t$. According to the usual characterization of a Brownian motion [7].

So by this deterministic change of time, and by the uniqueness in law of a $(BM_{g(0)})_{]-\infty,0]}$ on the sphere, we get the uniqueness in law of a $\frac{1}{2}g(T_c - u)_{u\in]0,T_c]}$-BM on a sphere. □

We have essentially used the conformality of this family of metric, that does not change the martingale family. Even if the beginning manifold is strictly convex, this is not the case in general. But we will see, in the next section, that the result is also true.

3 Kendall-Cranston Coupling

In this section the manifold M is compact and strictly convex. The goal in this section is to prove the uniqueness in law of the $g(T_c - t)$-BM. This section will be cut in two parts, the first will be a geometric result inspired by the work of Huisken, the second will be an adaptation of the Kendall-Cranston coupling. We will, by a deterministic change of time, transform a $g(T_c - t)$-BM (the existence of which comes from proposition 2.5) into a $\tilde{g}(t)_{]-\infty,0]}$-BM which has good geometric properties.

Remark : In the two last sections in [14], Huisken considers, like Hamilton for the Ricci flow, the normalized mean curvature flow. That consists in dilating the manifolds M_t by a coefficient to obtain constant volume manifolds. He obtains a positive coefficient of dilation $\psi(t)$ that satisfies the following property.

Theorem 3.1 *[14]*

For all $t \in [0, T_c[$, define $\tilde{F}(.,t) = \psi(t)F(.,t)$ such that $\int_{\tilde{M}_t} d\tilde{\mu}_t = |M_0|$, and $\tilde{t}(t) = \int_0^t \psi^2(\tau)d\tau$, then there exist several positive constants δ, C such that:

i) $\tilde{T}_c = \infty$

ii) $\tilde{H}_{max}(\tilde{t}) - \tilde{H}_{min}(\tilde{t}) \leq Ce^{-\delta\tilde{t}}$

iii) $|\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\tilde{g}_{ij}(\tilde{t})| \leq Ce^{-\delta\tilde{t}}$

iv) *$\tilde{g}_{ij}(\tilde{t}) \to \tilde{g}_{ij}(\infty)$ when $\tilde{t} \to \infty$ uniformly, for the C^∞ − topology, and the convergence is exponentially fast.*

v) $\tilde{g}(\infty)$ is a metric such that $(M, \tilde{g}(\infty))$ is a sphere.

We will now give the change of time propositions.

Proposition 3.2 *Let $\psi : [0, T_c[\longrightarrow]0, \infty[$ as above, $\tilde{t}$ defined by:*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{t} : [0, T_c[& \longrightarrow & [0, \infty[\\ t & \longmapsto & \int_0^t \psi^2(\tau) d\tau, \end{array}$$

for all $t \in [0, \infty[$, define

$$\tilde{g}(t) = \psi^2(\tilde{t}^{-1}(t)) g(\tilde{t}^{-1}(t)),$$

where $g(t)$ is the family of metrics coming from a mean curvature flow, and X_t is a $g(t)$-BM . Then:

$$t \longmapsto X_{\tilde{t}^{-1}(t)} \text{ is a } \tilde{g}(t)\text{-BM defined on } [0, \infty[.$$

<u>*proof*</u> :

Let $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{array}{rcl} f(X_{\tilde{t}^{-1}(t)}) & \overset{\mathcal{M}}{\equiv} & \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{t}^{-1}(t)} \Delta_{g(s)} f(X_s) ds \\ & \overset{\mathcal{M}}{\equiv} & \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_{g(\tilde{t}^{-1}(s))} f(X_{\tilde{t}^{-1}(s)}) (\tilde{t}^{-1})'(s) ds \\ & \overset{\mathcal{M}}{\equiv} & \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_{\frac{1}{(\tilde{t}^{-1})'(s)} g(\tilde{t}^{-1}(s))} f(X_{\tilde{t}^{-1}(s)}) ds. \end{array}$$

Using

$$\psi^2(\tilde{t}^{-1}(s)) (\tilde{t}^{-1})'(s) = 1,$$

we obtain:

$$\frac{1}{(\tilde{t}^{-1})'(s)} g(\tilde{t}^{-1}(s)) = \tilde{g}(s).$$

□

Proposition 3.3 *Let $X_t^{T_c}$, with $t \in]0, T_c]$, be a $g(T_c - t)$-BM. Let τ be defined by:*

$$\begin{array}{rcl} \tau :]0, T_c] & \longrightarrow &]-\infty, 0] \\ t & \longmapsto & -\tilde{t}(T - t). \end{array}$$

Let $\tilde{g}(t)$ be defined by:

$$\tilde{g}(t) = \psi^2(T_c - \tau^{-1}(t)) g(T_c - \tau^{-1}(t)) \ \forall t \in]-\infty, 0].$$

Then:

$$t \mapsto X^{T_c}_{\tau^{-1}(t)} \text{ is a } \tilde{g}(t)\text{-BM.}$$

proof :
Let $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ and $s < t$,

$$\begin{aligned}
f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(t)}) - f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(s)}) &\overset{\mathcal{M}}{\equiv} \tfrac{1}{2}\int_{\tau^{-1}(s)}^{\tau^{-1}(t)} \Delta_{g(T_c-u)} f(X^{T_c}_u)du \\
&\overset{\mathcal{M}}{\equiv} \tfrac{1}{2}\int_s^t \Delta_{g(T_c-\tau^{-1}(u))} f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(u)})(\tau^{-1}(u))'(s)du \\
&\overset{\mathcal{M}}{\equiv} \tfrac{1}{2}\int_s^t \Delta_{\frac{1}{(\tau^{-1})'(u)}g(T_c-\tau^{-1}(u))} f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(u)})du.
\end{aligned}$$

We have $-\tilde{t}(T_c - \tau^{-1}(u)) = u$, and

$$(\tau^{-1})'(u)\psi^2(T_c - \tau^{-1}(u)) = 1.$$

We obtain

$$f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(t)}) - f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(s)}) \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \frac{1}{2}\int_s^t \Delta_{\psi^2(T_c-\tau^{-1}(u))g(T_c-\tau^{-1}(u))} f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(u)})du$$

i.e.

$$f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(t)}) - f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(s)}) \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \frac{1}{2}\int_s^t \Delta_{\tilde{g}(u)} f(X^{T_c}_{\tau^{-1}(u)})du.$$

□

Remark : By the above theorem 3.1, we know that $\tilde{g}(t)$ tends to a sphere metric as t goes to $-\infty$. The above proposition transforms "two" $g(T_c - t)$-BM into "two" $\tilde{g}$-BM so we will use the standardization of the metric into sphere metric and also the large time interval to perform the coupling.

Let τ_x be a plane in T_xM and $g(t)$ be a metric over M, we denote by $K(t, \tau_x)$ the sectional curvature of the plane τ_x according to the metric $g(t)$. We will now give a few geometric lemmas that will be used later, for simplicity we will take positive times.

Lemma 3.4 *Let $g(t)$ be a family of metrics on a manifold M, and $g(\infty)$ a metric that makes M into a sphere, suppose that:*

i) $g(t) \longrightarrow g(\infty)$ *uniformly, when* $t \longrightarrow \infty$ *for the* $C^\infty-$*topology exponentially fast, i.e.:* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall$ *multi-indices* $(i_1, ..., i_k)$ *such that* $\sum i_k = n, \exists C_n, \delta_n > 0,$ *such that:*

$$|\frac{\partial^n}{\partial X_{i_1}..X_{i_k}} g_{ij}(t) - \frac{\partial^n}{\partial X_{i_1}..X_{i_k}} g_{ij}(\infty)| \leq C_n e^{-\delta_n t}$$

ii) $\exists \delta, C^1 > 0$ *such that* $|\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t)| \leq C^1 e^{-\delta t}$

iii) $vol_{g(t)}(M) = vol_{g(0)}(M)$

Then:

for all $\epsilon > 0$, there exists $T \in [0, \infty[$, $\exists C, cst, cst_1 \in \mathbb{R}^+$ and $c_n(cst, V) > 0$ such that, $\forall t \in [T, \infty[$ the following conditions are satisfied:

i) for all x in M and for all plane $\tau_x \subset T_xM$, $\quad | K(t, \tau_x) - cst | \leq \epsilon$.

ii) $|\rho_t - \rho_\infty|_{M\times M} \leq cst_1 e^{-\delta t}$.

iii) $\rho'_t(x, y) := \frac{d}{dt}\rho_t(x, y) \leq C$ *in a compact CC of $M \times M$,*

where the constant cst, comes from the radius of M with respect to $g(\infty)$, $\rho_t(x, y)$ is the distance between x and y for the metric $g(t)$, and

$$CC = \{(x, y) \in M \times M, s.t. \quad \rho_t(x, y) \leq min(\frac{\pi}{2\sqrt{(cst + \epsilon)}}, c_n(cst, V)), \forall t > T\}.$$

<u>*proof*</u> :

Let us prove i).

Curvatures are functions of second order derivatives of the metric tensor. We give the definitions of curvatures tensors, to make this point clear. Conventions are as in [20],[18],[17], in particular, we use Einstein's summation convention.. For a metric connection without torsion (Levi-Civita connection), we recall standard definitions:

-the Christoffel symbols:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij})$$

-the (3,1) Riemann tensor:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

-the (4,0) curvature tensor:

$$R_m(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

-the sectional curvature:

$$K(X, Y) = \frac{R_m(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

We see that the sectional curvature depends on the metric and its derivatives up to order two, so $\forall x \in M$, for all plane $\tau_x \subset T_xM$,

$$\lim_{t\to\infty} K(t, \tau_x) = cst.$$

Also, for all $\epsilon > 0$, there exists T such that $\forall t > T$, for all x in M and for all plane $\tau_x \subset T_xM$,

$$\mid K(t, \tau_x) - cst \mid \leq \epsilon.$$

For the third point iii):
for $(x, y) \in CC$, where CC is defined above, we will show that we have the uniqueness of minimal $g(t)$-geodesic from x to y, for all time $t > T$, because we have the well-known Klingenberg's result (e.g. [13] page 158) about injectivity radius of compact manifold whose sectional curvature is bounded above. To use Klingenberg's lemma, we have to bound the shortest length of a closed geodesic. We will use Cheeger's theorem page 96 [3]. Since by the convergence of the metric, we have the convergence of the Ricci curvature, we obtain that they are bounded by the same constant. We obtain, using Myers' theorem that all diameters are then bounded above. The volumes are constant so bounded below, all sectional curvatures of M are bounded in absolute value from above. So by Cheeger's theorem there exists a constant $c_n(K, d, V) > 0$ that bounds the length of smooth closed geodesics. Hence, for large time, using Klingenberg's lemma, we get a uniform bound , in time, of the injectivity radius (i.e $min(\frac{\pi}{2\sqrt{(cst+\epsilon)}}, c_n(cst, V))$).

So for all $t > T$, there exist only one $g(t)$-geodesic between x and y, we denote it γ^t. Let $E(\gamma^t) = \int_0^1 \langle \dot\gamma^t(s), \dot\gamma^t(s)\rangle_{g(t)} ds$ be the energy of the geodesic where $\dot\gamma^t(s) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma^t(s)$, $\rho_t^2(x, y) = E(\gamma^t)$. We compute:

$$\begin{array}{rcl} 2(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\rho_t(x,y))(\rho_t(x,y)) & = & \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}E(\gamma^t) \\ & = & \int_0^1 \langle \dot\gamma^{t_0}(s), \dot\gamma^{t_0}(s)\rangle_{\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}g(t)} ds \\ & + & 2\int_0^1 \langle D_t|_{t=t_0}\frac{\partial}{\partial s}\gamma^t(s), \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)} ds \\ & = & \int_0^1 \langle \dot\gamma^{t_0}(s), \dot\gamma^{t_0}(s)\rangle_{\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}g(t)} ds \\ & + & 2\int_0^1 \langle D_s\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\gamma^t(s), \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)} ds \end{array}$$

Let $X = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\gamma^t(s)$ be a vector field such that $X(x) = 0_{T_xM}, X(y) = 0_{T_yM}$, because we do not change the beginning and terminal point. The covariant derivative is computed with the Levi-Civita connection associated to $g(t_0)$. Hence we obtain:

$$\int_0^1 \langle D_s\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\gamma^t(s), \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)} ds = \int_0^1 \langle \nabla_{\dot\gamma^{t_0}(s)}X, \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)} ds,$$

also:

$$\langle \nabla_{\dot\gamma^{t_0}(s)}X, \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)} = \frac{\partial}{\partial s}\langle X, \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)},$$

because the connection is metric and γ^{t_0} is a $g(t_0)$-geodesic. Hence

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\langle X, \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)} ds = [\langle X, \frac{\partial}{\partial s}\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)}]_0^1 = 0.$$ 80

Finally, we obtain:

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\rho_t(x,y) = \frac{1}{2\rho_{t_0}(x,y)}\int_0^1 \langle \dot\gamma^{t_0}(s), \dot\gamma^{t_0}(s)\rangle_{\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0} g(t)} ds. \tag{3.1}$$

We will now control the second term in the previous equation. By the exponential convergence of the metric, we could assume that the time is in the compact interval $[0,1]$. The manifold is compact, so we have a finite family of charts (indeed, we may assume that we have two charts, because the manifold has a metric which turns it into a sphere). The support of this chart could be taken to be relatively compact, and in this chart we can take the Euclidien metric i.e $\langle \partial_i, \partial_j\rangle_E = \delta_i^j$. This is not in general a metric on M. For the simplicity of expression, after taking the minimum over all charts we may assume that we just have one chart. Let S_1 be a sphere in $\mathbb{R}^n$ with the Euclidean metric. The functional:

$$\begin{array}{rcl} [0,1]\times S_1 \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,v,x) & \longmapsto & g_{ij}(t,x)v_i v_j \end{array}$$

reaches its minimum $C>0$, so:

$$\|T\|_E \leq C^{-1}\|T\|_{g(t)}, \forall t\in[0,1], \forall T\in TM.$$

Hence, for the equation (3.1) we get the estimate:

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\rho_t(x,y)\right| & \leq & \frac{1}{2\rho_{t_0}(x,y)} C^1 e^{-\delta t_0}\int_0^1 \left|\langle \dot\gamma^{t_0}(s), \dot\gamma^{t_0}(s)\rangle_E\right| ds \\ & \leq & \frac{1}{2\rho_{t_0}(x,y)} C^1 (C)^{-1} e^{-\delta t_0}\int_0^1 \left|\langle \dot\gamma^{t_0}(s), \dot\gamma^{t_0}(s)\rangle_{g(t_0)}\right| ds \\ & \leq & \frac{1}{2} C^1 (C)^{-1} e^{-\delta t_0}. \end{array}$$

This expression is clearly bounded.

For the second point ii),
let $x,y\in M$ take γ_∞ be a $g(\infty)$-geodesic that joins x to y. Then we have, on the one hand,

$$\begin{array}{rcl} \rho_t^2(x,y) - \rho_\infty^2(x,y) & \leq & \int_0^1 \langle \dot\gamma_\infty(s), \dot\gamma_\infty(s)\rangle_{g(t)-g(\infty)} ds \\ & \leq & Cste^{-\delta t}\int_0^1 \|\dot\gamma_\infty(s)\|^2_{g(\infty)} ds \\ & \leq & Cste^{-\delta t} diam^2_{g(\infty)}(M); \end{array}$$

where the constant changes and depends on the previous constant. On the other hand, we have:

$$\begin{array}{rcl} \rho_\infty^2(x,y) - \rho_t^2(x,y) & \leq & \int_0^1 \langle \dot\gamma^t(s), \dot\gamma^t(s)\rangle_{g(\infty)-g(t)} ds \\ & \leq & Cste^{-\delta t}\int_0^1 \|\dot\gamma^t(s)\|^2_{g(t)} ds \\ & \leq & Cste^{-\delta t} diam^2_{g(t)}(M) \\ & \leq & cst_1 e^{-\delta t}, \end{array}$$

for some constant cst_1 , and we use Myers theorem for the last inequality to get a uniform upper bound of the diameter (because all Ricci curvature are uniformly bounded).
We get exponential convergence of the length.
□

We will now show uniqueness in law of a $g(T_c - t)$-BM. By proposition 3.3, this uniqueness is equivalent to uniqueness in law of a $\tilde{g}(t)_{]-\infty,0]}$-BM. This family of metrics, $\tilde{g}(t)$, satisfies:

$$\tilde{g}(t) \longrightarrow \tilde{g}(-\infty) \text{ for the } C^\infty\text{-topology.}$$

Let Z^1, Z^2 be two $\tilde{g}$-BM$_{]-\infty,0]}$ and $N << T$ where T is the time of the lemma 3.4, i.e the time up to which all bounds of the lemma are under control. Geometry before this time is similar to the geometry of the sphere. So the result of uniqueness in law for Brownian motion defined in a product probability space, indexed by $\mathbb{R}$ in a compact manifold (e.g. [6],[1]) could give the heuristics to our results. As we can see in [4] the $g(t)$-stochastic development and the $g(t)$-horizontal lift of a $g(t)$-BM is well defined.
We will consider a new process $Z^3_{N,t}$ equal in law to Z^2 after N and equal to Z^2 before. In the sequel we will note Z^3_t for $Z^3_{N,t}$. The construction, after time N, will be given by localization in a stochastic interval.

Let $T_0^N = N$, and for all $t \leq N$, $Z^3_{N,t} = Z^2_t$.
1) we will let Z^3_t evolve independently of Z^1_t i.e. Z^3_t is a $g(T_0^N + .)$-BM which starts at $Z^3_{T_0^N}$ and the $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion that drives Z^3_t will be independent with the one that drives Z^1_t.

Let $T_1^N = (N + \frac{1}{2}) \wedge inf\{t > T_0^N,\ \rho_t(Z^1_t, Z^3_t) \leq \frac{\frac{\pi}{\sqrt{cst+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4}\} \wedge T$. The constant ϵ is just taken to be small enough.

Let $C_N = inf\{t > N,\ Z^1_t = Z^3_t\}$.
2) At time T_1^N:

- if $\rho_{T_1^N}(Z^1_{T_1^N}, Z^3_{T_1^N}) \leq \frac{\frac{\pi}{\sqrt{cst+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4}$, these two points ($Z^3_{T_1^N}$ and $Z^1_{T_1^N}$) are close enough to make mirror coupling. The distance between these two points is strictly less than the injectivity radius $i_{g(t)}(M)$, hence we have uniqueness of the geodesic that joins these two points. After T_1^N and before C_N, we build Z^3_t as the $g(T_1^N + .)$-BM that starts at $Z^3_{T_1^N}$, and solves:

$$*dZ^3_t = U^3_t * d((U^3_t)^{-1} m^t_{Z^1_t, Z^3_t} U^1_t e_i dW^i_t)$$

and after C_N,

$$Z^3_t = Z^1_t, \quad C_N \leq t,$$

where U_t^3 is the horizontal lift of Z_t^3, to be correct we have to express a system of stochastic differential equations as in Kendall [19], U_t^1 is the horizontal lift of Z_t^1, and dW_t^i are Brownian motion that drives Z_t^1, the mirror map $m_{x,y}^t$ consists in transporting a vector along the unique minimal $g(t)$-geodesic that joins x to y and then reflecting it in the hyperplane of $(T_yM, g(t))$ which is perpendicular to the incoming geodesic.

By isometry property of the horizontal lift of the $g(t)$-BM (see [4]),

$$(U_t^3)^{-1} m_{Z_t^1, Z_t^3}^t U_t^1 dW_t^i,$$

is an $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion.

Let $T_2^N = (T_1^N + \frac{1}{2}) \wedge inf\{t > T_1^N,\ \rho_t(Z_t^1, Z_t^3) > \frac{\frac{\pi}{\sqrt{cst+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{2}\} \wedge T \wedge C_N$.

- if $\rho_{T_1^N}(Z_{T_1^N}^1, Z_{T_1^N}^3) > \frac{\frac{\pi}{\sqrt{cst+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4}$ then $T_2^N = T_1^N$.

Iterate step 1 and 2 successively (changing T_0^N by T_2^N and T_1^N by T_3^N in step 1, changing T_1^N by T_3^N and T_2^N by T_4^N in step 2 ..., after time T if we have no coupling, we let Z^3 evolve independently of Z_t^1 until the end), we build by induction the process Z_t^3 and a sequence of stopping times. We sketch it as:

- if $C_N < T$

$$T_0^N \xrightarrow{\text{independent}} T_1^N \xrightarrow{coupling} T_2^N \xrightarrow{independent} T_3^N \xrightarrow{coupling} T_4^N \ \dots\ C_N \xrightarrow{Z_t^3 = Z_t^1} 0$$

- if $C_N > T$

$$T_0^N \xrightarrow{\text{independent}} T_1^N \xrightarrow{coupling} T_2^N \xrightarrow{independent} T_3^N \xrightarrow{coupling} T_4^N \ \dots\ T \xrightarrow{independent} 0$$

Proposition 3.5 *The two processes Z^3 and Z^2 are equal in law.*

proof : It is clear that before N the two processes are equal so equal in law. After:
$Z_N^3 = Z_N^2$.

$$\begin{cases} *dZ_t^3 = \sum_i U_t^3 e_i * dB^i, \text{ when } t \in [T_{2k}^N, T_{2k+1}^N] \text{ and } T_{2k+1}^N \leq C_N \\ *dZ_t^3 = \sum_i U_t^3 * d((U_t^3)^{-1} m_{Z_t^1, Z_t^3}^t U_t^1) e_i dW_t^i, \text{ when } t \in [T_{2k+1}^N, T_{2k+2}^N], \text{ and } T_{2k+2}^N \leq C_N \\ Z_t^3 = Z_t^1, C_N \leq t \end{cases}$$

We write:

$$\begin{aligned} Z_t^3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[T_k^N, T_{k+1}^N]}(t) * dZ_t^3 \\ &= \sum_{k:even} \dots + \sum_{k:odd} \end{aligned}$$

Let $f \in C^{\infty}(M)$ then we have:
for even k:

$$df(\mathbb{1}_{[T_k^N,T_{k+1}^N]}(t) * dZ_t^3) \overset{d\mathcal{M}}{\equiv} \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[T_k^N,T_{k+1}^N]}(t)\Delta_{\tilde{g}(t)}f(Z_t^3)dt$$

for odd k:

$$df(\mathbb{1}_{[T_k^N,T_{k+1}^N]}(t) * dZ_t^3) \quad = \quad \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[T_k^N,T_{k+1}^N]}\Delta_{\tilde{g}(t)}f(Z_t^3)dt$$

So Z^3 and Z^2 are two diffusions with the same starting distribution and the same generator, hence they are equal in law. For the gluing with Z^1 after C_N this is just the strong Markov property for (t, Z). $\square$

Proposition 3.6 *There exists $\alpha > 0$ such that:*

$$\mathbb{P}(T_1^N - N < \frac{1}{2}) > \alpha$$

<u>*proof*</u> : By the C^{∞}-convergence of the metric we get:

$$\forall t < T, |\Delta_{\tilde{g}(t)}f - \Delta_{\tilde{g}(-\infty)}f| \leq \tilde{C}e^{\delta t}$$

where the constant comes from Theorem 3.1, and the derivative of f up to order two. We also obtain, by lemma 3.4, for a constant ϵ_2 that will be fixed below:

$$|\rho_t - \rho_{-\infty}| \leq \epsilon_2.$$

Over the sphere $(M, \tilde{g}(-\infty))$, we have by ordinary comparison theorem:

$$\Delta_{\tilde{g}(-\infty)}\rho_{-\infty}(x) \leq (n)cot(\rho_{-\infty}(x)).$$

We can suppose after normalization that the radius of the sphere $(M, \tilde{g}(-\infty))$ is one, $Radius_{-\infty}(M) = 1$ (i.e. $cst = 1$) in 3.4. We deduce from above that:

$$\Delta_{\tilde{g}(t)}\rho_{-\infty}(x) \leq (n)cot(\rho_{-\infty}(x)) + \tilde{C}e^{\delta t}.$$

In $[N, T_1^N[$, we have $\rho_t(Z_t^1, Z_t^3) > \frac{\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4}$ so:

$$\frac{\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4} - \epsilon_2 \leq \rho_t(Z_t^1, Z_t^3) - \epsilon_2 \leq \rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3) \leq \pi$$

We can choose ϵ, ϵ_2 such that, $\frac{\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4} - \epsilon_2 \geq \beta > 0$. We obtain:

$$cot(\rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3)) \leq cot(\beta),$$

and

$$\Delta_{\tilde{g}(t)}\rho_{-\infty}(Z_t^1, .)(Z_t^3) \leq (n)cot(\beta) + \tilde{C}e^{\delta T},$$

(recall $T << 0$) The progression of Z^3 and Z^1 are independent between $[N, T_1^N]$ hence:

$$(Z_t^1, Z_t^3) \text{ is a diffusion with generator } \frac{1}{2}(\Delta_{\tilde{g}(t),1} + \Delta_{\tilde{g}(t),2})$$

i.e.

$$d\rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3) = dM_t + \frac{1}{2}(\Delta_{\tilde{g}(t)}\rho_{-\infty}(Z_t^1, .)(Z_t^3) + \Delta_{\tilde{g}(t)}\rho_{-\infty}(., Z_t^3)(Z_t^1))dt$$

where M_t is a local martingale, so

$$d\rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3) \leq dM_t + (cot(\frac{\pi}{8}) + \tilde{C}e^{\delta T})dt.$$

.

Let us compute the quadratic variation of this local martingale, i.e:

$$d\langle M, M\rangle_t = d\rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3)d\rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3),$$

with:

$$d\rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3) = d\rho_{-\infty}(Z_t^1, .) * dZ_t^3 + d\rho_{-\infty}(., Z_t^3) * dZ_t^1. \tag{3.2}$$

Let $\gamma_{-\infty}(Z_t^3, Z_t^1)(s)$ be the minimal $\tilde{g}(-\infty)$-geodesic beetwen Z_t^3 and Z_t^1 that exists and is unique almost everywhere because $Cut_{-\infty}(M)$ is a null measure subspace. We denote:

$$v_t^1 = \frac{\dot{\gamma}_{-\infty}(Z_t^3, Z_t^1)(0)}{\|\dot{\gamma}_{-\infty}(Z_t^3, Z_t^1)(0)\|_{\tilde{g}(-\infty)}}.$$

We complete v_t^1 with v_t^j to get a $\tilde{g}(-\infty)$-orthonormal basis. We rewrite $*dZ_t^3$ as:

$$\begin{aligned} *dZ_t^3 &= \sum U_t^3 e_i * dB^i \\ &= \sum_{i,j} \langle U_t^3 e_i, v_t^j\rangle_{\tilde{g}(-\infty)} v_t^j * dB^i \end{aligned}$$

Hence by Gauss lemma, we obtain:

$$\begin{aligned} d\rho_{-\infty}(Z_t^1, .) * dZ_t^3 &= \sum d\rho_{-\infty}(Z_t^1, .)U_t^3 e_i * dB^i \\ &= \sum_{i,j} d\rho_{-\infty}(Z_t^1, .)\langle U_t^3 e_i, v_t^j\rangle_{\tilde{g}(-\infty)} v_t^j * dB^i \\ &= \sum_i d\rho_{-\infty}(Z_t^1, .)\langle U_t^3 e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(-\infty)} v_t^1 * dB^i \\ &= \sum_i \langle U_t^3 e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(-\infty)} * dB^i. \end{aligned}$$

It follows that:

$$(d\rho_{-\infty}(Z_t^1,.) * dZ_t^3)(d\rho_{-\infty}(Z_t^1,.) * dZ_t^3) = \sum_i \langle U_t^3 e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(-\infty)}^2 dt.$$

By the exponential convergence of the metric,

$$\langle U_t^3 e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(-\infty)} \geq \langle U_t^3 e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(t)} - \tilde{C}e^{\delta T},$$

hence:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_i \langle U_t e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(-\infty)}^2 & \geq & \sum_i \langle U_t e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(t)}^2 - 2\tilde{C}e^{\delta T}\sum_i \langle U_t e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(t)} + n(\tilde{C}e^{\delta T})^2 \\
& = & \|v_t^1\|_{\tilde{g}(t)}^2 - 2\tilde{C}e^{\delta T}\sum_i \langle U_t e_i, v_t^1\rangle_{\tilde{g}(t)} + n(\tilde{C}e^{\delta T})^2 \\
& \geq & \|v_t^1\|_{\tilde{g}(t)}^2 - 2\tilde{C}e^{\delta T} n\|v_t^1\|_{\tilde{g}(t)} + n(\tilde{C}e^{\delta T})^2 \text{ Schwartz} \\
& \geq & (\|v_t^1\|_{\tilde{g}(-\infty)} - \tilde{C}e^{\delta T})^2 - 2\tilde{C}e^{\delta T} n(\|v_t^1\|_{\tilde{g}(-\infty)} + \tilde{C}e^{\delta T}) \\
& + & n(\tilde{C}e^{\delta T})^2 \\
& \geq & 1 - \tilde{C}e^{\delta T}(2 - \tilde{C}e^{\delta T} + 2(n + n\tilde{C}e^{\delta T}) - n\tilde{C}e^{\delta T}) \\
& \geq & \frac{1}{2} \text{ for a small enough T.}
\end{array}$$

The independence of Z_t^1 et Z_t^3 gives,

$$\begin{array}{rcl}
d\langle M_t, M_t\rangle & = & (d\rho_{-\infty}(Z_t^1,.) * dZ_t^3)(d\rho_{-\infty}(Z_t^1,.) * dZ_t^3) \\
& & +(d\rho_{-\infty}(.,Z_t^3)) * dZ_t^1)(d\rho_{-\infty}(.,Z_t^3)) * dZ_t^1)
\end{array}$$

hence

$$d\langle M_t, M_t\rangle \geq 1dt.$$

For simplicity write $\theta = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4}$, it follows from (3.2) that:

$$\begin{array}{l}
\mathbb{P}(T_1^N - N < \frac{1}{2}) \\
= \mathbb{P}(\exists t \in [N, N+1/2] \text{ s.t. } \rho_t(Z_t^1, Z_t^3) \leq \theta \\
\geq \mathbb{P}(\exists t \in [N, N+1/2] \text{ s.t. } \rho_{-\infty}(Z_t^1, Z_t^3) \leq \theta - \epsilon_2) \\
\geq \mathbb{P}(\exists t \in [N, N+1/2] \text{ s.t. } \pi + M_t + (cot(\beta) + \tilde{C}e^{\delta T})(t-N) \leq \theta - \epsilon_2) \\
\geq \alpha > 0.
\end{array}$$

For the last step, we use the usual comparison theorem for stochastic processes (e.g. Ikeda and Watanabe [15]). □

We will now show that the coupling can occur between $[T_1^N, T_2^N]$ in a time smaller than $\frac{1}{2}$.

Proposition 3.7 *There exists $\tilde{\alpha} > 0$ such that:*

$$\mathbb{P}(C_N < (T_1^N + \frac{1}{2}) \wedge T_2^N) > \tilde{\alpha}.$$

<u>*proof*</u> : Between the two times T_1^N and T_2^N, we have mirror coupling between Z_t^1 and Z_t^3. As in [19, 5] we have:

$$d\rho_t(Z_t^1, Z_t^3) = \rho_t'(Z_t^1, Z_t^3)dt + 2d\beta_t + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} I^t(J_i^t, J_i^t)dt$$

$$*dZ_t^3 = U_t^3 * d((U_t^3)^{-1} m^t_{Z_t^1, Z_t^3} U_t^1 e_i dW_t^i),$$

Where:
-β_t is a standard real Brownian motion.
-$\gamma_t(Z_t^1, Z_t^3)(s)$ the minimal $\tilde{g}(t)$ geodesic between Z_t^1 and Z_t^3.
-$(\dot{\gamma}(Z_t^1, Z_t^3)(0), e_i(t))$ a $\tilde{g}(t)$-orthonormal basis of $T_{Z_t^1}M$.
- $J_i^t(s)$ the Jacobi field along γ_t for the metric $\tilde{g}(t)$, with initial condition $J_i^t(0) = e_i(t)$ and $J_i^t(\rho_t(Z_t^1, Z_t^3)) = /\!/^{t,\gamma_t}_{\rho_t(Z_t^1, Z_t^3)} e_i(t)$ i.e. the parallel transport for the metric $\tilde{g}(t)$ along γ_t, that is an orthogonal Jacobi field .
-I^t is the index bilinear form for the metric $\tilde{g}(t)$.
Between the times T_1^N and T_2^N, we have:

$$\rho_t(Z_t^1, Z_t^3) \leq \frac{\frac{\pi}{\sqrt{cst+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{2}$$

So by 3.4, there exists a constant C such that:

$$\rho_t'(x, y) \leq C.$$

We have to show that between the times T_1^N and T_2^N,

$$\sum_{i=2}^{n} I^t(J_i^t, J_i^t)$$

is bounded above. We note $r = \rho_t(Z_t^1, Z_t^3)$, and γ for γ^t. Let $G(s)$ be a real-valued function and K_i^t be the orthogonal vector field over γ defined by:

$$K_i^t(s) = G(s)(/\!/_t^{\gamma_t} e_i(t))(s)$$ 87

where $G(0)=G(r)=1$. We have:

$$\|\nabla^t_{\frac{\partial}{\partial s}} K_i^t(s)\|^2_{\tilde{g}(t)} = (\dot{G})^2.$$

By the index lemma (e.g. [20]), we deduce:

$$I^t(J_i^t, J_i^t) \leq I^t(K_i^t, K_i^t),$$

and

$$I^t(K_i^t, K_i^t) = \int_0^r \langle D_s K_i^t, D_s K_i^t \rangle_{\tilde{g}(t)} - R_{m,\tilde{g}(t)}(K_i^t, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, K_i^t) dt,$$

where $R_{m,\tilde{g}(t)}$ denote the $(4,0)$ curvature tensor associated to the metric $\tilde{g}(t)$. Hence:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n I^t(K_i^t, K_i^t) &= \sum_{i=2}^n \int_0^r \langle D_s K_i^t, D_s K_i^t \rangle_{\tilde{g}(t)} - R_{m,\tilde{g}(t)}(K_i^t, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, K_i^t) ds \\
&= \sum_{i=2}^n \int_0^r \|\nabla^t_{\frac{\partial}{\partial s}} K_i(s)\|^2_{\tilde{g}(t)} - R_{m,\tilde{g}(t)}(K_i^t, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, K_i^t) ds \\
&= \int_0^r (n-1)(\dot{G})^2 - (G)^2 Ric_{\tilde{g}(t)}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) ds \\
&\leq (n-1) \int_0^r ((\dot{G})^2 - (G)^2(\frac{1-\epsilon}{n-1})) ds.
\end{aligned}$$

For performing the computation, we impose to G to satisfy the O.D.E:

$$\begin{cases} G(0) = G(r) = 1 \\ \ddot{G} + (\frac{1-\epsilon}{n-1}) G = 0 \end{cases}$$

We notice that:

$$(\dot{G})^2 - (G)^2(\frac{1-\epsilon}{n-1})) = (G\dot{G})',$$

and the solution of this O.D.E is given by the function:

$$G(s) = cos(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}} s) + \frac{1 - cos(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}} r)}{sin(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}} r)} sin(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}} s).$$

This function does not explode for r in $[0, \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}}}]$, and,

$$(\dot{G})(r) - (\dot{G})(0) = -2\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}} tan(\frac{\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}} r}{2}).$$ 88

Hence

$$\sum_{i=2}^{n} I^t(J_i^t, J_i^t) \leq -2(n-1)\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}}\, tan(\frac{\sqrt{\frac{1-\epsilon}{n-1}}r}{2}) \leq 0.$$

We get:

$$d\rho_t(Z_t^1, Z_t^3) \leq Cdt + 2d\beta_t.$$

After conditioning by $\mathcal{F}_{T_1^N}$ we get the following computation:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(C_N < (T_1^N + \tfrac{1}{2}) \wedge T_2^N) \\
&= \mathbb{P}(\exists t \in [(T_1^N, (T_1^N + \tfrac{1}{2}) \wedge T_2^N] \text{ s.t. } \rho_t(Z_t^1, Z_t^3) = 0) \\
&\geq \mathbb{P}\Bigg(\exists t \in [0, \tfrac{1}{2}] \text{ s.t. } Ct + 2\beta_t + \frac{\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4} = 0 \\
&\quad \text{and } \sup_{0 \leq s \leq t}(Cs + 2\beta_s + \frac{\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{4}) < \frac{\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} \wedge \frac{C_n(d,K,cst-\epsilon)}{2}}{2} \Bigg) \\
&\geq \tilde{\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

□

Remark : A better $\tilde{\alpha}$ could be found with a martingale of the type $e^{a\beta_t - \frac{a^2}{2}t}$.

Theorem 3.8 *Let (M, g) be a compact, strictly convex hypersurface isometrically embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, and $(M, g(t))$ the family of metrics constructed by the mean curvature flow (as in 1.3). There exists a unique $g(T_c - t)$-BM in law.*

proof : Let X_t^1 and X_t^2 two $g(T_c - t)$-BM , by a deterministic change of time we get two $\tilde{g}(t)$-BM that we note Z_t^1 and Z_t^2. Let $N \leq T << 0$, as above we build $Z_{N,t}^3$, we obtain $Z_{N,t}^3 = Z_t^2$ in law. Let $\tilde{k} = E(T - N)$, where $E(t)$ is the integer part of t. We have by construction:

$$\mathbb{P}(\exists t \in [N, T], \text{ s.t. } Z_{N,t}^3 = Z_t^1) \geq \mathbb{P}(\exists t \in [T_0^N, T_{2\tilde{k}}^N], \text{ s.t. } Z_{N,t}^3 = Z_t^1).$$

Let $\mathcal{F}$ be the natural filtration generated by the two processes, by propositions 3.6, 3.7 and strong Markov property we obtain:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists t \in [N, T_2^N] \text{ s.t. } Z_{N,t}^3 = Z_t^1) \\
&\geq \mathbb{P}(T_1^N < \tfrac{1}{2} + N; C_N < (T_1^N + \tfrac{1}{2}) \wedge T_2^N) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(C_N \leq (T_1^N + \tfrac{1}{2}) \wedge T_2^N | \mathcal{F}_{T_1^N}) \mathbb{1}_{T_1^N \leq \frac{1}{2} + N}] \\
&\geq \tilde{\alpha}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{T_1^N \leq \frac{1}{2} + N}] \\
&\geq \alpha\tilde{\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

By successive conditioning (by $\mathcal{F}_{T_{2\tilde{k}-2}}$, ...) we get:

$$\mathbb{P}(\nexists t \in [T_0^N, T_{2\tilde{k}}^N] \text{ s.t. } Z_{N,t}^3 = Z_t^1) \leq (1 - \alpha\tilde{\alpha})^{\tilde{k}}.$$

Let $f_1 ... f_m \in \mathcal{B}_b(M)$ (bounded Borel functions) and $t < t_1 < ... < t_m \leq 0$,

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{E}[f_1(Z^1_{t_1})...f_m(Z^1_{t_m}) - f_1(Z^2_{t_1})...f_m(Z^2_{t_m})]| \\
&\quad = |\mathbb{E}[f_1(Z^1_{t_1})...f_m(Z^1_{t_m}) - f_1(Z^3_{N,t_1})...f_m(Z^3_{N,t_m})]| \\
&\quad \leq \mathbb{E}[|f_1(Z^1_{t_1})...f_m(Z^1_{t_m}) - f_1(Z^3_{N,t_1})...f_m(Z^3_{N,t_m})| \mathbb{1}_{Z^1_t \neq Z^3_{N,t}}] \\
&\quad \leq 2\|f_1\|_\infty ... \|f_m\|_\infty \mathbb{P}(Z^1_t \neq Z^3_{N,t}) \\
&\quad = 2\|f_1\|_\infty ... \|f_m\|_\infty \mathbb{P}(\nexists u \in [N,t], \text{ s.t. } Z^1_u = Z^3_{N,u}) \\
&\quad \leq 2\|f\|_\infty ... \|f_m\|_\infty (1 - \alpha\tilde{\alpha})^{E(t-N)}
\end{aligned}
$$

We get the result by sending N to $-\infty$. □

As application, we give uniqueness of a solution of a differential equation without initial condition.

Corollary 3.9 *Let (M,g) be a compact, strictly convex hypersurface isometrically embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, and $(M, g(t))$ the family of metrics constructed by the mean curvature flow (as in 1.3). Then the following equation has a unique solution in $]0, T_c]$, where T_c is the explosion time of the mean curvature flow.*

$$
\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h(t,y) + H^2(T_c - t, y) h(t,y) = \frac{1}{2}\Delta_{g(T_c-t)} h(t,y) \\ \int_M h(T_c, y) d\mu_0 = 1 \end{cases} \tag{3.3}
$$

<u>*proof*</u> : Existence: let $X^{T_c}_{]0,T_c]}$ be a $g(T_c - t)$-BM with law at time t, $h(t,y)d\mu_{T_c - t}$. Then the law satisfies the equation (3.3), it is a consequence of a Green formula (compare with the similar computation for the Ricci flow in [4] section 2).

Uniqueness: let $\tilde{h}$ be a solution of (3.3), and ν_k be a non-increasing sequence in $]0..T_c]$ such that $\lim_{k\to\infty} \nu_k = 0$. Take a M-valued random variable $\tilde{X}^{\nu_k} \sim \tilde{h}_{\nu_k} d\mu_{T_c - \nu_k}$, define the process:

$$
\overline{X}^{\nu_k}_t = \begin{cases} \tilde{X}^{\nu_k} & \text{for } t \in]0..\nu_k] \\ g(T_c - t)\text{-BM}(\tilde{X}^{\nu_k}) & \text{for } t \in [\nu_k..T_c] \end{cases}
$$

By the similar argument as in section 2, we deduce the tightness of the sequence $\overline{X}^{\nu_k}$, let $\overline{X}$ be a limit of a extracted sequence (also noted by ν_k). It is easy to see (by uniqueness of a solution of S.D.E, and of P.D.E with starting function) that $\overline{X}^{\nu_{k'}}_{(.)} \overset{\mathcal{L}}{=} \overline{X}^{\nu_k}_{(.)}$ for times greater than ν_k and $k' \geq k$. Sending k' to infinity, we obtain $\overline{X}_{(.)} \overset{\mathcal{L}}{=} \overline{X}^{\nu_k}_{(.)}$ for times greater than ν_k. Note also that for $t \geq \nu_k$

$$
\overline{X}^{\nu_k}_{(.)} \overset{\mathcal{L}}{=} g(T_c - .)\text{-BM}(\overline{X}^{\nu_k}_t) \overset{\mathcal{L}}{=} g(T_c - .)\text{-BM}(\overline{X}_t).
$$

Hence $\overline{X}$ is a $g(T_c - t)_{]0,T_c]}$ Brownian motion. For $t \geq \nu_k$ we have

$$
\overline{X}_t \overset{\mathcal{L}}{=} \overline{X}^{\nu_k}_t \sim \tilde{h}_t d\mu_{T_c - t}.
$$

By uniqueness in law of such process, we get the uniqueness of the solution, hence $h = \tilde{h}$. □

References

[1] M. Arnaudon. Appendix to the preceding paper: "A remark on Tsirelson's stochastic differential equation" [in *séminaire de probabilités, xxxiii*, 291–303, Lecture Notes in Math., 1709, Springer, Berlin, 1999; MR1768002 (2001e:60111)] by M. Émery and W. Schachermayer. Natural filtration of Brownian motion indexed by $\mathbf{R}$ in a compact manifold. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 304–314. Springer, Berlin, 1999.

[2] Marc Arnaudon, Kolehe Abdoulaye Coulibaly, and Anton Thalmaier. Brownian motion with respect to a metric depending on time: definition, existence and applications to Ricci flow. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(13-14):773–778, 2008.

[3] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.

[4] A. K. Coulibaly. Brownian motion with respect to time-changing riemannian metrics, applications to ricci flow. Preprint http://arxiv.org/abs/0901.1999v1.

[5] M. Cranston. Gradient estimates on manifolds using coupling. *J. Funct. Anal.*, 99(1):110–124, 1991.

[6] M. Émery and W. Schachermayer. Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 267–276. Springer, Berlin, 1999.

[7] Michel Émery. *Stochastic calculus in manifolds.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989. With an appendix by P.-A. Meyer.

[8] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transitions and generalized motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(9):1097–1123, 1992.

[9] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(1):321–332, 1992.

[10] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. III. *J. Geom. Anal.*, 2(2):121–150, 1992.

[11] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I [MR1100206 (92h:35097)]. In *Fundamental contributions to the continuum theory of evolving phase interfaces in solids*, pages 328–374. Springer, Berlin, 1999.

[12] Lawrence C. Evans and Joel Spruck. Motion of level sets by mean curvature. IV. *J. Geom. Anal.*, 5(1):77–114, 1995.

[13] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.

[14] Gerhard Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differential Geom.*, 20(1):237–266, 1984.

[15] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989.

[16] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[17] Jürgen Jost. *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, volume 4 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1984.

[18] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005.

[19] Wilfrid S. Kendall. Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property. *Stochastics*, 19(1-2):111–129, 1986.

[20] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.

[21] H. Mete Soner and Nizar Touzi. A stochastic representation for mean curvature type geometric flows. *Ann. Probab.*, 31(3):1145–1165, 2003.

[22] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1997 edition.

Chapter 5

Horizontal diffusion in path space

95

HORIZONTAL DIFFUSION IN C^1 PATH SPACE

MARC ARNAUDON, ABDOULAYE COULIBALY, AND ANTON THALMAIER

ABSTRACT. We define horizontal diffusion in C^1 path space over a Riemannian manifold and prove its existence. If the metric on the manifold is developing under the forward Ricci flow, horizontal diffusion along Brownian motion turns out to be length preserving. As application, we prove contraction properties in the Monge-Kantorovich minimization problem for probability measures evolving along the heat flow. For constant rank diffusions, differentiating a family of coupled diffusions gives a derivative process with a covariant derivative of finite variation. This construction provides an alternative method to filtering out redundant noise.

CONTENTS

1. PRELIMINARIES

The main concern of this paper is to answer the following question: Given a second order differential operator L without constant term on a manifold M and a C^1 path $u \mapsto \varphi(u)$ taking values in M, is it possible to construct a one parameter family $X_t(u)$ of diffusions with generator L and starting point $X_0(u) = \varphi(u)$, such that the derivative with respect to u is locally uniformly bounded? If the manifold is $\mathbb{R}^n$ and the generator L a constant coefficient differential operator, there is an obvious solution: the family $X_t(u) = \varphi(u) + Y_t$, where Y_t is an L-diffusion starting at 0, has the required properties. But already on $\mathbb{R}^n$ with a non-constant generator, the question becomes difficult.

In this paper we give a positive answer for elliptic operators L on general manifolds; the result also covers time-dependent elliptic generators $L = L(t)$. It turns out that the constructed family of diffusions solves the ordinary differential equation in the space of semimartingales:

$$\partial_u X_t(u) = W(X(u))_t(\dot{\varphi}(u)), \tag{1.1}$$

where $W(X(u))$ is the so-called deformed parallel translation along the semimartingale $X(u)$.

Key words and phrases. Brownian motion, damped parallel transport, horizontal diffusion, Monge-Kantorovich problem, Ricci curvature.

The problem is similar to finding flows associated to derivative processes as studied in [6, 7, 8, 9, 13, 12] and [11]. However it is transversal in the sense that in these papers diffusions with the same starting point are deformed along a drift which vanishes at time 0. In contrast, we want to move the starting point but to keep the generator. Our strategy of proof consists in iterating parallel couplings for closer and closer diffusions. In the limit, the solution may be considered as an infinite number of infinitesimally coupled diffusions. We call it horizontal L-diffusion in C^1 path space.

If the generator L is degenerate, we are able to solve (1.1) only in the constant rank case; by parallel coupling we construct a family of diffusions satisfying (1.1) at $u = 0$. In particular, the derivative of $X_t(u)$ at $u = 0$ has finite variation compared to parallel transport.

Note that our construction requires only a connection on the fiber bundle generated by the "carré du champ" operator. In the previous approach of [10], a stochastic differential equation is needed and ∇ has to be the Le Jan-Watanabe connection associated to the SDE.

The construction of families of $L(t)$-diffusions $X_\bullet(u)$ with $\partial_u X_\bullet(u)$ locally uniformly bounded has a variety of applications. In Stochastic Analysis, for instance, it allows to deduce Bismut type formulas without filtering redundant noise. If only the derivative with respect to u at $u = 0$ is needed, parallel coupling as constructed in [4] would be a sufficient tool. The horizontal diffusion however is much more intrinsic by yielding a flow with the deformed parallel translation as derivative, well-suited to applications in the analysis of path space. Moreover for any u, the diffusion $X_\bullet(u)$ generates the same filtration as $X_\bullet(0)$, and has the same lifetime if the manifold is complete.

In Section 4 we use the horizontal diffusion to establish a contraction property for the Monge-Kantorovich optimal transport between probability measures evolving under the heat flow. We only assume that the cost function is a non-decreasing function of distance. This includes all Wasserstein distances with respect to the time-dependent Riemannian metric generated by the symbol of the generator $L(t)$. For a generator which is independent of time, the proof could be achieved using simple parallel coupling. The time-dependent case however requires horizontal diffusion as a tool.

2. Horizontal diffusion on C^1 path space

Let M be a complete Riemannian manifold with ρ its Riemannian distance. The Levi-Civita connection on M will be denoted by ∇.

Given a continuous semimartingale X taking values in M, we denote by $d^\nabla X = dX$ its Itô differential and by $d_m X$ the martingale part of dX. In local coordinates,

$$d^\nabla X \equiv dX = \left(dX^i + \frac{1}{2}\,\Gamma^i_{jk}(X)\,d{<}X^j, X^k{>}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.1}$$

where Γ^i_{jk} are the Christoffel symbols of the Levi-Civita connection on M. In addition, if $dX^i = dM^i + dA^i$ where M^i is a local martingale and A^i a finite variation process, then

$$d_m X = dM^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Alternatively, if

$$P_t(X) \equiv P_t^M(X) : T_{X_0}M \to T_{X_t}M$$

denotes parallel translation along X, then

$$dX_t = P_t(X)\, d\left(\int_0^{\boldsymbol{\cdot}} P_s(X)^{-1}\delta X_s\right)_t$$

and

$$d_m X_t = P_t(X)\, dN_t$$

where N_t is the martingale part of the Stratonovich integral $\int_0^t P(X)_s^{-1}\delta X_s$.

If X is a diffusion with generator L, we denote by $W(X)$ the so-called deformed parallel translation along X. Recall that $W(X)_t$ is a linear map $T_{X_0}M \to T_{X_t}M$, determined by the initial condition $W(X)_0 = \mathrm{Id}_{T_{X_0}M}$ together with the covariant Itô stochastic differential equation:

$$DW(X)_t = -\frac{1}{2}\operatorname{Ric}^\sharp(W(X)_t)\,dt + \nabla_{W(X)_t}Z\,dt. \tag{2.2}$$

By definition we have

$$DW(X)_t = P_t(X)d\left(P_{\boldsymbol{\cdot}}(X)^{-1}W(X)\right)_t. \tag{2.3}$$

Note that the Itô differential (2.1) and the parallel translation require only a connection ∇ on M. For the deformed parallel translation (2.2) however the connection has to be adapted to a metric.

In this Section the connection and the metric are independent of time. We shall see in Section 3 how these notions can be extended to time-dependent connections and metrics.

Theorem 2.1. *Let $\mathbb{R} \to M$, $u \mapsto \varphi(u)$, be a C^1 path in M and let Z be a vector field on M. Further let X^0 be a diffusion with generator $L = \Delta/2 + Z$, starting at $\varphi(0)$, and lifetime ξ. There exists a unique family*

$$u \mapsto (X_t(u))_{t\in[0,\xi[}$$

of diffusions with generator L, almost surely continuous in (t,u) and C^1 in u, satisfying $X(0) = X^0$, $X_0(u) = \varphi(u)$ and

$$\partial_u X_t(u) = W(X(u))_t(\dot\varphi(u)). \tag{2.4}$$

Furthermore, the process $X(u)$ satisfies the Itô stochastic differential equation

$$dX_t(u) = P_{0,u}^{X_t(\cdot)}\, d_m X_t^0 + Z_{X_t(u)}\,dt, \tag{2.5}$$

where $P_{0,u}^{X_t(\cdot)} : T_{X_t^0}M \to T_{X_t(u)}M$ denotes parallel transport along the C^1 curve

$$[0,u] \to M, \quad v \mapsto X_t(v).$$

Definition 2.2. We call $t \mapsto (X_t(u)_{u\in\mathbb{R}})$ the horizontal L-diffusion in C^1 path space $C^1(\mathbb{R}, M)$ over X^0, starting at φ.

Remark 2.3. Given an elliptic generator L, we can always choose a metric g on M such that $L = \Delta/2+Z$ for some vector field Z where Δ is the Laplacian with respect to g. Assuming that M is complete with respect to this metric, the assumptions of Theorem 2.1 are fulfilled. In the non-complete case, a similar result holds with the only difference that the lifetime of $X_{\boldsymbol{\cdot}}(u)$ then possibly depends on u.

Remark 2.4. Even if $L = \Delta/2$, the solution we are looking for is not the flow of a Cameron-Martin vector field: firstly the starting point here is not fixed and secondly the vector field would have to depend on the parameter u. Consequently one cannot apply for instance Theorem 3.2 in [13]. An adaptation of the proof of the cited result would be possible, but we prefer to give a proof using infinitesimal parallel coupling which is more adapted to our situation.

Proof of Theorem 2.1. Without loss of generality we may restrict ourselves to the case $u \geq 0$.

A. *Existence.* Under the assumption that a solution $X_t(u)$ exists, we have for any stopping time T,

$$W_{T+t}(X(u))(\dot\varphi(u)) = W_t(X_{T+\cdot}(u))\,(\partial X_T(u)),$$

for $t \in [0, \xi(\omega) - T(\omega)[$ and $\omega \in \{T < \xi\}$. Here $\partial X_T := (\partial X)_T$ denotes the derivative process ∂X with respect to u, stopped at the random time T; note that by Eq. (2.4), $(\partial X_T)(u) = W(X(u))_T(\dot\varphi(u))$. Consequently we may localize and replace the time interval $[0,\xi[$ by $[0, \tau \wedge t_0]$ for some $t_0 > 0$, where τ is the first exit time of X from a relatively compact open subset U of M with smooth boundary.

We may also assume that U is sufficiently small and included in the domain of a local chart; moreover we can choose $u_0 \in \,]0,1]$ with $\int_0^{u_0} \|\dot\varphi(u)\|\,du$ small enough such that the processes constructed for $u \in [0, u_0]$ stay in the domain U of the chart. At this point we use the uniform boundedness of W on $[0, \tau \wedge t_0]$.

For $\alpha > 0$, we define by induction a family of processes $(X_t^\alpha(u))_{t\geq 0}$ indexed by $u \geq 0$ as follows: $X^\alpha(0) = X^0$, $X_0^\alpha(u) = \varphi(u)$, and if $u \in \,]n\alpha, (n+1)\alpha]$ for some integer $n \geq 0$, $X^\alpha(u)$ satisfies the Itô equation

$$dX_t^\alpha(u) = P_{X_t^\alpha(n\alpha), X_t^\alpha(u)} d_m X_t^\alpha(n\alpha) + Z_{X_t^\alpha(u)}\,dt, \tag{2.6}$$

where $P_{x,y}$ denotes parallel translation along the minimal geodesic from x to y. We choose α sufficiently small so that all the minimizing geodesics are uniquely determined and depend smoothly of the endpoints: since $X\alpha(u)$ is constructed from $X\alpha(n\alpha)$ via parallel coupling (2.6), there exists a constant $C > 0$ such that

$$\rho(X_t^\alpha(u), X_t^\alpha(n\alpha)) \leq \rho(X_0^\alpha(u), X_0^\alpha(n\alpha))\,e^{Ct} \leq \|\dot\varphi\|_\infty\,\alpha e^{Ct_0} \tag{2.7}$$

(see e.g. [15]).

The process $\partial X^\alpha(u)$ satisfies the covariant Itô stochastic differential equation (2.8)

$$D\partial X^\alpha(u) = \nabla_{\partial X^\alpha(u)} P_{X^\alpha(n\alpha),\boldsymbol{\cdot}}\, d_m X_t^\alpha(n\alpha) + \nabla_{\partial X^\alpha(u)} Z\,dt - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}^\sharp(\partial X^\alpha(u))\,dt,$$

(see [3] Eq. (4.7), along with Theorem 2.2).

Step 1 We prove that if X and Y are two L-diffusions stopped at $\tau_0 := \tau \wedge t_0$ and living in U, then there exists a constant C such that

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq\tau_0} \|W(X)_t - W(Y)_t\|^2\right] \leq C\,\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq\tau_0}\|X_t - Y_t\|^2\right]. \tag{2.9}$$

Here we use the Euclidean norm defined by the chart.

Writing

$$L = a^{ij}\partial_{ij} + b^j\partial_j$$

with $a^{ij} = a^{ji}$ for $i, j \in \{1, \ldots, \dim M\}$, and denoting by (a_{ij}) the inverse of (a^{ij}), the connection ∇' with Christoffel symbols

$$(\Gamma')^k_{ij} = -\frac{1}{2}(a_{ik} + a_{jk})b^k$$

has the property that all L-diffusions are ∇'-martingales.

On the other hand, for ∇'-martingales X and Y living in U, with N^X, respectively N^Y, their martingale parts in the chart U, Itô's formula for ∇'-martingales yields

$$\begin{aligned}
&\big\langle (N^X)^k - (N^Y)^k, (N^X)^k - (N^Y)^k \big\rangle_t \\
&\quad = (X^k_t - Y^k_t)^2 - (X^k_0 - Y^k_0)^2 \\
&\quad\quad - 2\int_0^t (X^k_s - Y^k_s)\, d((N^X_s)^k - (N^Y_s)^k) \\
&\quad\quad + \int_0^t (X^k_s - Y^k_s) \left((\Gamma')^k_{ij}(X_s)\, d\langle (N^X)^i, (N^X)^j \rangle_s - (\Gamma')^k_{ij}(Y_s)\, d\langle (N^Y)^i, (N^Y)^j \rangle_s \right).
\end{aligned}$$

From there we easily prove that, for U sufficiently small, there exists a constant $C > 0$ such that for all L-diffusions X and Y stopped at the first exit time of U,

$$\mathbb{E}\left[\langle N^X - N^Y | N^X - N^Y \rangle_{\tau_0} \right] \le C\mathbb{E}\left[\sup_{t \le \tau_0} \|X_t - Y_t\|^2 \right] \tag{2.10}$$

where $\langle N^X - N^Y | N^X - N^Y \rangle$ denotes the Riemannian quadratic variation (see e.g. [2]).

Writing $W(X) = P(X)\left(P(X)^{-1}W(X)\right)$, an easy calculation shows that in the local chart

$$\begin{aligned}
dW(X) &= -\Gamma(X)(dX, W(X)) - \frac{1}{2}(d\Gamma)(X)(dX)(dX, W(X)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Gamma(X)(dX, \Gamma(X)(dX, W(X))) - \frac{1}{2}\operatorname{Ric}^\sharp(W(X))\, dt + \nabla_{W(X)} Z\, dt.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

We are going to use Eq. (2.11) to evaluate the difference $W(Y) - W(X)$. Along with the already established bound (2.10), taking into account that $W(X)$, $W(Y)$ and the derivatives of the brackets of X and Y are bounded in U, we can get a bound for $F(t) := \mathbb{E}\left[\sup_{s \le t\wedge\tau} \|W(Y) - W(X)\|^2\right]$. First an estimate of the type

$$F(t) \le C_1\, \mathbb{E}\left[\sup_{s \le \tau_0} \|X_s - Y_s\|^2 \right] + C_2 \int_0^t F(s)\, ds, \quad 0 \le t \le t_0$$

is derived which then by Gronwall's lemma leads to

$$F(t) \le C_1\, e^{C_2 t}\, \mathbb{E}\left[\sup_{t \le \tau_0} \|X_t - Y_t\|^2 \right]. \tag{2.12}$$

Letting $t = t_0$ in (2.12) we obtain the desired bound (2.9).

Step 2 We prove that there exists $C > 0$ such that for all $u \in [0, u_0]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \le \tau_0} \rho^2 \left(X^\alpha_t(u), X^{\alpha'}_t(u) \right) \right] \le C(\alpha + \alpha')^2. \tag{2.13}$$

From the covariant equation (2.8) for $\partial X_t^\alpha(v)$ and the definition of deformed parallel translation (2.2),

$$DW(X)_t^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{Ric}^\sharp(W(X)_t^{-1})\,dt - \nabla_{W(X)_t^{-1}} Z\,dt,$$

we have for $(t,v) \in [0,\tau_0]\times[0,u_0]$,

$$W(X^\alpha(v))_t^{-1}\,\partial X_t^\alpha(v) = \dot\varphi(v) + \int_0^t W(X^\alpha(v))_s^{-1}\nabla_{\partial X_s^\alpha(v)} P_{X_s^\alpha(v_\alpha),\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^\alpha(v_\alpha),$$

or equivalently,

$$\begin{aligned}\partial X_t^\alpha(v) &= W(X^\alpha(v))_t\,\dot\varphi(v)\\ &\quad + W(X^\alpha(v))_t \int_0^t W(X^\alpha(v))_s^{-1}\,\nabla_{\partial X_s^\alpha(v)} P_{X_s^\alpha(v_\alpha),\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^\alpha(v_\alpha)\end{aligned}\tag{2.14}$$

with $v_\alpha = n\alpha$, where the integer n is determined by $n\alpha < v \le (n+1)\alpha$. Consequently, we have

$$\begin{aligned}&\rho(X_t^\alpha(u), X_t^{\alpha'}(u))\\ &= \int_0^u \left\langle d\rho, \left(\partial X_t^\alpha(v), \partial X_t^{\alpha'}(v)\right)\right\rangle dv\\ &= \int_0^u \left\langle d\rho, \left(W(X^\alpha(v))_t\dot\varphi(v), W(X^{\alpha'}(v))_t\dot\varphi(v)\right)\right\rangle dv\\ &+ \int_0^u \left\langle d\rho, \left(W(X^\alpha(v))_t\int_0^t W(X^\alpha(v))_s^{-1}\nabla_{\partial X_s^\alpha(v)} P_{X_s^\alpha(v_\alpha),\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^\alpha(v_\alpha), 0\right)\right\rangle dv\\ &+ \int_0^u \left\langle d\rho, \left(0, W(X^{\alpha'}(v))_t\int_0^t W(X^{\alpha'}(v))_s^{-1}\nabla_{\partial X_s^{\alpha'}(v)} P_{X_s^{\alpha'}(v_{\alpha'}),\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^{\alpha'}(v_{a'})\right)\right\rangle dv.\end{aligned}$$

This yields, by means of boundedness of $d\rho$ and deformed parallel translation, together with (2.12) and the Burkholder-Davis-Gundy inequalities,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(u), X_t^{\alpha'}(u)\right)\right] \le\ & C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(v), X_t^{\alpha'}(v)\right)\right] dv\\ &+ C\int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0}\left\|\nabla_{\partial X_s^\alpha(v)} P_{X_s^\alpha(v_\alpha),\boldsymbol{.}}\right\|^2 ds\right] dv\\ &+ C\int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0}\left\|\nabla_{\partial X_s^{\alpha'}(v)} P_{X_s^{\alpha'}(v_{\alpha'}),\boldsymbol{.}}\right\|^2 ds\right] dv.\end{aligned}$$

From here we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(u), X_t^{\alpha'}(u)\right)\right] \le\ & C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(v), X_t^{\alpha'}(v)\right)\right] dv\\ &+ C\alpha^2\int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0}\left\|\partial X_s^\alpha(v)\right\|^2 ds\right] dv\\ &+ C{\alpha'}^2\int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0}\left\|\partial X_s^{\alpha'}(v)\right\|^2 ds\right] dv,\end{aligned}$$

where we used the fact that for $v \in T_xM$, $\nabla_v P_{x,\boldsymbol{.}} = 0$, together with

$$\rho(X_s^\beta(v), X_s^\beta(v_\beta)) \le C\beta, \quad \beta = \alpha, \alpha',$$

see estimate (2.7).

Now, by Eq. (2.8) for $D\partial X^\beta$, there exists a constant $C'>0$ such that for all $v\in[0,u_0]$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0}\left\|\partial X_s^\beta(v)\right\|^2\,ds\right]<C'.$$

Consequently,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(u),X_t^{\alpha'}(u)\right)\right]\le C\int_0^u\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(v),X_t^{\alpha'}(v)\right)\right]\,dv$$
$$+\,2CC'(\alpha+\alpha')^2$$

which by Gronwall lemma yields

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(u),X_t^{\alpha'}(u)\right)\right]\le C\left(\alpha+\alpha'\right)^2$$

for some constant $C>0$. This is the desired inequality.

Step 3 From inequality (2.13) we deduce that there exists a limiting process

$$(X_t(u))_{0\le t\le\tau_0,\ 0\le u\le u_0}$$

such that for all $u\in[0,u_0]$ and $\alpha>0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\rho^2\left(X_t^\alpha(u),X_t(u)\right)\right]\le C\alpha^2. \tag{2.15}$$

In other words, for any fixed $u\in[0,u_0]$, the process $(X_t^\alpha(u))_{t\in[0,\tau_0]}$ converges to $(X_t(u))_{t\in[0,\tau_0]}$ uniformly in L^2 as α tends to 0. Since these processes are ∇'-martingales, convergence also holds in the topology of semimartingales. This implies in particular that for any $u\in[0,u_0]$, the process $(X_t(u))_{t\in[0,\tau_0]}$ is a diffusion with generator L, stopped at τ_0.

Extracting a subsequence $(\alpha_k)_{k\ge0}$ convergent to 0, we may assume that almost surely, for all dyadic $u\in[0,u_0]$,

$$\sup_{t\le\tau_0}\rho\left(X_t^\alpha(u),X_t(u)\right)$$

converges to 0. Moreover we can choose $(\alpha_k)_{k\ge0}$ of the form $\alpha_k=2^{-n_k}$ with $(n_k)_{k\ge0}$ an increasing sequence of positive integers. Due to (2.7), we can take a version of the processes $(t,u)\mapsto X_t^{\alpha_k}(u)$ such that

$$u\mapsto X_t^{\alpha_k}(u)$$

is uniformly Lipschitz in $u\in\mathbb{N}\alpha_k\cap[0,u_0]$ with a Lipschitz constant independent of k and t. Passing to the limit, we obtain that a.s for any $t\in[0,\tau_0]$, the map $u\mapsto X_t(u)$ is uniformly Lipschitz in $u\in\mathscr{D}\cap[0,u_0]$ with a Lipschitz constant independent of t, where $\mathscr{D}$ is the set of dyadic numbers. Finally we can choose a version of $(t,u)\mapsto X_t(u)$ which is a.s. continuous in $(t,u)\in[0,\tau_0]\times[0,u_0]$, and hence uniformly Lipschitz in $u\in[0,u_0]$.

Step 4 We prove that almost surely, $X_t(u)$ is differentiable in u with derivative $W(X(u))_t(\dot\varphi(u))$. More precisely, we show that in local coordinates, almost surely, for all $t\in[0,\tau_0]$, $u\in[0,u_0]$,

$$X_t(u)=X_t^0+\int_0^u W(X(v))_t(\dot\varphi(v))\,dv. \tag{2.16}$$

From the construction it is clear that almost surely, for all $t \in [0, \tau_0]$, $u \in [0, u_0]$,

$$X_t^{\alpha_k}(u) = X_t^0 + \int_0^u W(X^{\alpha_k}(v))_t(\dot\varphi(v))\, dv$$
$$+ \int_0^u \left(W(X^{\alpha_k}(v))_t \int_0^t W(X^{\alpha_k}(v))_s^{-1} \nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)} P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),\,\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}) \right) dv.$$

This yields

$$X_t(u) - X_t^0 - \int_0^u W(X(v))_t(\dot\varphi(v))\, dv$$
$$= X_t(u) - X_t^{\alpha_k}(u) + \int_0^u \left(W(X^{\alpha_k}(v))_t - W(X(v))_t \right) \dot\varphi(v)\, dv$$
$$+ \int_0^u \left(W(X^{\alpha_k}(v))_t \int_0^t W(X^{\alpha_k}(v))_s^{-1} \nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)} P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),\,\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}) \right) dv.$$

The terms of right-hand-side are easily estimated, where in the estimates the constant C may change from one line to another. First observe that

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0} \| X_t(u) - X_t^{\alpha_k}(u) \|^2 \right] \le C\alpha_k^2.$$

Using (2.9) and (2.15) we have

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0} \left\| \int_0^u \left(W(X^{\alpha_k}(v))_t - W(X(v))_t \right)\, dv \right\|^2 \right]$$
$$\le \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0} \int_0^u \| W(X^{\alpha_k}(v))_t - W(X(v))_t \|^2\, dv \right]$$
$$= \int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0} \| W(X^{\alpha_k}(v))_t - W(X(v))_t \|^2 \right] dv \le C\alpha_k^2,$$

and finally

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0} \left\| \int_0^u \left(W(X^{\alpha_k}(v))_t \int_0^t W(X^{\alpha_k}(v))_s^{-1} \nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)} P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),\,\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}) \right) dv \right\|^2 \right]$$
$$\le C \int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0} \left\| \int_0^t W(X^{\alpha_k}(v))_s^{-1} \nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)} P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),\,\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}) \right\|^2 \right] dv$$
$$\le C\alpha_k^2 \int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0} \| \partial X_s^{\alpha_k}(v) \|^2\, ds \right] dv \le C\alpha_k^2.$$

We deduce that

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0} \left\| X_t(u) - X_t^0 - \int_0^u W(X(v))_t(\dot\varphi(v))\, dv \right\|^2 \right] \le C\alpha_k^2.$$

Since this is true for any α_k, using continuity in u of $X_t(u)$, we finally get almost surely for all t, u,

$$X_t(u) = X_t^0 + \int_0^u W(X(v))_t(\dot\varphi(v))\, dv.$$

Step 5 Finally we are able to prove Eq. (2.5):

$$dX_t(u) = P_{0,u}^{X_t(\cdot)}\, d_m X_t^0 + Z_{X_t(u)}\, dt.$$

Since a.s. the mapping $(t,u) \mapsto \partial X_t(u)$ is continuous, the map $u \mapsto \partial X(u)$ is continuous in the topology of uniform convergence in probability. We want to prove that $u \mapsto \partial X(u)$ is continuous in the topology of semimartingales.

Since for a given connection on a manifold, the topology of uniform convergence in probability and the topology of semimartingale coincide on the set of martingales (Proposition 2.10 of [2]), it is sufficient to find a connection on TM for which $\partial X(u)$ is a martingale for any u. Again we can localize in the domain of a chart. Recall that for all u, the process $X(u)$ is a ∇'-martingale where ∇' is defined in step 1. Then by [1], Theorem 3.3, this implies that the derivative with respect to u with values in TM, denoted here by $\partial X(u)$, is a $(\nabla')^c$-martingale with respect to the complete lift $(\nabla')^c$ of ∇'. This proves that $u \mapsto \partial X(u)$ is continuous in the topology of semimartingales.

Remark 2.5. Alternatively, one could have used that given a generator L', the topologies of uniform convergence in probability on compact sets and the topology of semimartingales coincide on the set of L'-diffusions. Since the processes $\partial X(u)$ are diffusions with the same generator, the result could be derived as well.

As a consequence, we have formally

$$D\partial X = \nabla_u dX - \frac{1}{2} R(\partial X, dX)dX. \tag{2.17}$$

Since

$$dX(u) \otimes dX(u) = g^{-1}(X(u))\, dt$$

where g is the metric tensor, Eq. (2.17) becomes

$$D\partial X = \nabla_u dX - \frac{1}{2}\, \mathrm{Ric}^\sharp(\partial X)\, dt.$$

On the other hand, Eq. (2.4) and Eq. (2.2) for W yield

$$D\partial X = -\frac{1}{2}\, \mathrm{Ric}^\sharp(\partial X)\, dt + \nabla_{\partial X} Z\, dt.$$

From the last two equations we obtain

$$\nabla_u dX = \nabla_{\partial X} Z\, dt.$$

This along with the original equation

$$dX^0 = d_m X^0 + Z_{X^0}\, dt$$

gives

$$dX_t(u) = P_{0,u}^{X_t(\,\cdot\,)}\, d_m X_t^0 + Z_{X_t(u)}\, dt,$$

where

$$P_{0,u}^{X_t(\,\cdot\,)}\colon\ T_{X_t}M \to T_{X_t(u)}M$$

denotes parallel transport along the C^1 curve $v \mapsto X_t(v)$.

B. *Uniqueness.* Again we may localize in the domain of a chart U. Letting $X(u)$ and $Y(u)$ be two solutions of Eq. (2.4), then for $(t,u) \in [0,\tau_0[\times[0,u_0]$ we find in local coordinates,

$$Y_t(u) - X_t(u) = \int_0^u \big(W(Y(v))_t - W(X(v))_t\big)(\dot\varphi(v))\, dv. \tag{2.18}$$

On the other hand, using (2.9) we have

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\|Y_t(u)-X_t(u)\|^2\right]\le C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\|Y_t(v)-X_t(v)\|^2\right]dv \tag{2.19}$$

from which we deduce that almost surely, for all $t\in[0,\tau_0]$, $X_t(u)=Y_t(u)$. Consequently, exploiting the fact that the two processes are continuous in (t,u), they must be indistinguishable. □

3. Horizontal diffusion along non-homogeneous diffusion

In this Section we assume that the elliptic generator is a C^1 function of time: $L=L(t)$ for $t\ge 0$. Let $g(t)$ be the metric on M such that

$$L(t)=\frac{1}{2}\Delta^t+Z(t)$$

where Δ^t is the $g(t)$-Laplacian and $Z(t)$ a vector field on M.

Let (X_t) be an inhomogeneous diffusion with generator $L(t)$. Parallel transport $P^t(X)_t$ along the $L(t)$-diffusion X_t is defined analogously to [5] as the linear map

$$P^t(X)_t\colon T_{X_0}M\to T_{X_t}M$$

which satisfies

$$D^tP^t(X)_t=-\frac{1}{2}\,\dot g^\sharp(P^t(X)_t)\,dt \tag{3.1}$$

where $\dot g$ denotes the derivative of g with respect to time; the covariant differential D^t is defined in local coordinates by the same formulas as D, with the only difference that Christoffel symbols now depend on t.

Alternatively, if J is a semimartingale over X, the covariant differential D^tJ may be defined as $\tilde D(0,J)=(0,D^tJ)$, where $(0,J)$ is a semimartingale along (t,X_t) in $\tilde M=[0,T]\times M$ endowed with the connection $\tilde\nabla$ defined as follows: if

$$s\mapsto\tilde\varphi(s)=(f(s),\varphi(s))$$

is a C^1 path in $\tilde M$ and $s\mapsto\tilde u(s)=(\alpha(s),u(s))\in T\tilde M$ is C^1 path over $\tilde\varphi$, then

$$\tilde\nabla\tilde u(s)=\Big(\dot\alpha(s),\big(\nabla^{f(s)}u\big)(s)\Big)$$

where ∇^t denotes the Levi-Civita connection associated to $g(t)$. It is proven in [5] that $P^t(X)_t$ is an isometry from $(T_{X_0}M,g(0,X_0))$ to $(T_{X_t}M,g(t,X_t))$.

The damped parallel translation $W^t(X)_t$ along X_t is the linear map

$$W^t(X)_t:T_{X_0}M\to T_{X_t}M$$

satisfying

$$D^tW^t(X)_t=\left(\nabla^t_{W^t(X)_t}Z(t,\cdot)-\frac{1}{2}(\mathrm{Ric}^t)^\sharp(W^t(X)_t)\right)dt. \tag{3.2}$$

If $Z\equiv 0$ and $g(t)$ is solution to the backward Ricci flow:

$$\dot g=\mathrm{Ric}, \tag{3.3}$$

then damped parallel translation coincides with the usual parallel translation:

$$P^t(X)=W^t(X),$$

(see [5] Theorem 2.3).

The Itô differential $d^\nabla Y = d^{\nabla^t} Y$ of an M-valued semimartingale Y is defined by formula (2.1), with the only difference that the Christoffel symbols depend on time.

Theorem 3.1. *Keeping the assumptions of this Section, let*

$$\mathbb{R} \to M, \quad u \mapsto \varphi(u),$$

be a C^1 path in M and let X^0 be an $L(t)$-diffusion with starting point $\varphi(0)$ and lifetime ξ. Assume that $(M, g(t))$ is complete for every t. There exists a unique family

$$u \mapsto (X_t(u))_{t\in[0,\xi[}$$

of $L(t)$-diffusions, which is a.s. continuous in (t,u) and C^1 in u, satisfying

$$X(0) = X^0 \quad \text{and} \quad X_0(u) = \varphi(u),$$

and solving the equation

$$\partial X_t(u) = W^t(X(u))_t(\dot\varphi(u)). \tag{3.4}$$

Furthermore, $X(u)$ solves the Itô stochastic differential equation

$$d^\nabla X_t(u) = P_{0,u}^{t,X_t(\cdot)}\, d^{\nabla(t)} X_t + Z(t, X_t(u))\, dt, \tag{3.5}$$

where

$$P_{0,u}^{t,X_t(\cdot)} : T_{X_t^0} M \to T_{X_t(u)} M$$

denotes parallel transport along the C^1 curve $[0,u] \to M$, $v \mapsto X_t(v)$, with respect to the metric $g(t)$.

If $Z \equiv 0$ and if $g(t)$ is given as solution to the backward Ricci flow equation, then almost surely for all t,

$$\|\partial X_t(u)\|_{g(t)} = \|\dot\varphi(u)\|_{g(0)}. \tag{3.6}$$

Definition 3.2. We call

$$t \mapsto (X_t(u))_{u\in\mathbb{R}}$$

the horizontal $L(t)$-diffusion in C^1 path space $C^1(\mathbb{R}, M)$ over X^0, started at φ.

Remark 3.3. Eq. (3.6) says that if $Z \equiv 0$ and if g is solution to the backward Ricci flow equation, then the horizontal $g(t)$-Brownian motion is length preserving (with respect to the moving metric).

Remark 3.4. Again if the manifold $(M, g(t))$ is not necessarily complete for all t, a similar result holds with the lifetime of $X_\bullet(u)$ possibly depending on u.

Proof of Theorem 3.1. The proof is similar to the one of Theorem 2.1. We restrict ourselves to explaining the differences.

The localization procedure carries over immediately; we work on the time interval $[0, \tau \wedge t_0]$. For $\alpha > 0$, we define the approximating process $X_t^\alpha(u)$ by induction as

$$X_t^\alpha(0) = X_t^0, \quad X_0^\alpha(u) = \varphi(u),$$

and if $u \in]n\alpha, (n+1)\alpha]$ for some integer $n \geq 0$, then $X^\alpha(u)$ solves the Itô equation

$$d^\nabla X_t^\alpha(u) = P^t_{X_t^\alpha(n\alpha), X_t^\alpha(u)} d_m X_t^\alpha(n\alpha) + Z(t, X_t(u))\, dt \tag{3.7}$$

where $P^t_{x,y}$ is the parallel transport along the minimal geodesic from x to y, for the connection ∇^t.

Alternatively, letting $\tilde{X}_t^\alpha = (t, X_t^\alpha)$, we may write (3.7) as

$$d^{\tilde{\nabla}} \tilde{X}_t^\alpha(u) = \tilde{P}_{\tilde{X}_t^\alpha(n\alpha), \tilde{X}_t^\alpha(u)} d_m \tilde{X}_t^\alpha(n\alpha) + Z(\tilde{X}_t^\alpha(u))\, dt \tag{3.8}$$

where $\tilde{P}_{\tilde{x},\tilde{y}}$ denotes parallel translation along the minimal geodesic from $\tilde{x}$ to $\tilde{y}$ for the connection $\tilde{\nabla}$.

Denoting by $\rho(t,x,y)$ the distance from x to y with respect to the metric $g(t)$, Itô's formula shows that the process $\rho\left(t, X_t^\alpha(u), X_t^\alpha(n\alpha)\right)$ has locally bounded variation. Moreover since locally $\partial_t \rho(t,x,y) \le C\rho(t,x,y)$ for $x \ne y$, we find similarly to (2.7),

$$\rho(t, X_t^\alpha(u), X_t^\alpha(n\alpha)) \le \rho(0, X_0^\alpha(u), X_0^\alpha(n\alpha)) e^{Ct} \le \|\dot{\varphi}\|_\infty\, \alpha e^{Ct_0}.$$

Since all Riemannian distances are locally equivalent, this implies

$$\rho(X_t^\alpha(u), X_t^\alpha(n\alpha)) \le \rho(X_0^\alpha(u), X_0^\alpha(n\alpha)) e^{Ct} \le \|\dot{\varphi}\|_\infty\, \alpha e^{Ct_0} \tag{3.9}$$

where $\rho = \rho(0, \cdot, \cdot)$.

Next, differentiating Eq. (3.8) yields

$$\begin{aligned} \tilde{D}\partial_u \tilde{X}_t^\alpha(u) &= \tilde{\nabla}_{\partial_u \tilde{X}_t^\alpha(u)} \tilde{P}_{\tilde{X}_t^\alpha(n\alpha), \boldsymbol{\cdot}}\, d_m \tilde{X}_t^\alpha(n\alpha) \\ &\quad + \tilde{\nabla}_{\partial_u \tilde{X}_t^\alpha(u)} Z\, dt - \frac{1}{2}\tilde{R}\left(\partial_u \tilde{X}_t^\alpha(u), d\tilde{X}_t^\alpha(u)\right) d\tilde{X}_t^\alpha(u). \end{aligned}$$

Using the fact that the first component of $\tilde{X}_t^\alpha(u)$ has finite variation, a careful computation of $\tilde{R}$ leads to the equation

$$\begin{aligned} D^t \partial_u X_t^\alpha(u) &= \nabla^t_{\partial_u X_t^\alpha(u)} P^t_{X_t^\alpha(n\alpha), \boldsymbol{\cdot}}\, d_m X_t^\alpha(n\alpha) \\ &\quad + \nabla^t_{\partial_u X_t^\alpha(u)} Z(t, \cdot) - \frac{1}{2}(\mathrm{Ric}^t)^\sharp\big(\partial_u X_t^\alpha(u)\big)\, dt. \end{aligned}$$

To finish the proof, it is sufficient to remark that in step 1, Eq. (2.10) still holds true for X and Y $g(t)$-Brownian motions living in a small open set U, and that in step 5, the map $u \mapsto \partial X(u)$ is continuous in the topology of semimartingales. This last point is due to the fact that all $\partial X(u)$ are inhomogeneous diffusions with the same generator, say L', and the fact that the topology of uniform convergence on compact sets and the topology of semimartingales coincide on L'-diffusions. $\square$

4. Application to optimal transport

In this Section we assume again that the elliptic generator $L(t)$ is a C^1 function of time with associated metric $g(t)$:

$$L(t) = \frac{1}{2}\Delta^t + Z(t)$$

where Δ^t is the Laplacian associated to $g(t)$ and $Z(t)$ is a vector field. We assume further that for any t, the Riemannian manifold $(M, g(t))$ is metrically complete, and $L(t)$ diffusions have infinite lifetime.

Letting $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be a non-decreasing function, we define a cost function

$$c(t,x,y) = \varphi(\rho(t,x,y)) \tag{4.1}$$

where $\rho(t, \cdot, \cdot)$ denotes distance with respect to $g(t)$.

To the cost function c we associate the Monge-Kantorovich minimization between two probability measures on M

$$\mathscr{W}_{c,t}(\mu,\nu)=\inf_{\eta\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{M\times M}c(t,x,y)\,d\eta(x,y) \tag{4.2}$$

where $\Pi(\mu,\nu)$ is the set of all probability measures on $M\times M$ with marginals μ and ν. We denote

$$\mathscr{W}_{p,t}(\mu,\nu)=\left(\mathscr{W}_{\rho^p,t}(\mu,\nu)\right)^{1/p} \tag{4.3}$$

the Wasserstein distance associated to $p>0$.

For a probability measure μ on M, the solution of the heat flow equation associated to $L(t)$ will be denoted by μP_t.

Define a section $(\nabla^t Z)^\flat\in\Gamma(T^*M\odot T^*M)$ as follows: for any $x\in M$ and $u,v\in T_xM$,

$$(\nabla^t Z)^\flat(u,v)=\frac{1}{2}\left(g(t)(\nabla^t_u Z,v)+g(t)(u,\nabla^t_v Z)\right).$$

In case the metric does not depend on t and $Z=\operatorname{grad}V$ for some C^2 function V on M, then

$$(\nabla^t Z)^\flat(u,v)=\nabla dV(u,v).$$

Theorem 4.1. *We keep notation and assumptions from above.*

a) *Assume*

$$\operatorname{Ric}^t-\dot g-2(\nabla^t Z)^\flat\ge 0. \tag{4.4}$$

Then the function

$$t\mapsto \mathscr{W}_{c,t}(\mu P_t,\nu P_t)$$

is non-increasing.

b) *If for some $k\in\mathbb{R}$,*

$$\operatorname{Ric}^t-\dot g-2(\nabla^t Z)^\flat\ge kg, \tag{4.5}$$

then we have for all $p>0$

$$\mathscr{W}_{p,t}(\mu P_t,\nu P_t)\le e^{-kt/2}\,\mathscr{W}_{p,0}(\mu,\nu).$$

Remark 4.2. Before turning to the proof of Theorem 4.1, let us mention that in the case $Z=0$, g constant, $p=2$ and $k=0$, item b) is due to [19] and [18]. In the case where g is a backward Ricci flow solution, $Z=0$ and $p=2$, statement b) is due to Lott [16] and McCann-Topping [17]. For extensions about $\mathcal{L}$-transportation, see [21].

Proof of Theorem 4.1. a) Assume that $\operatorname{Ric}^t-\dot g-2(\nabla^t Z)^\flat\ge 0$. Then for any $L(t)$-diffusion (X_t), we have

$$\begin{aligned}
&d\big(g(t)(W(X)_t,W(X)_t)\big)\\
&\quad=\dot g(t)\big(W(X)_t,W(X)_t\big)\,dt+2g(t)\left(D^tW(X)_t,W(X)_t\right)\\
&\quad=\dot g(t)\big(W(X)_t,W(X)_t\big)\,dt\\
&\qquad+2g(t)\left(\nabla^t_{W(X)_t}Z(t,\cdot)-\frac{1}{2}(\operatorname{Ric}^t)^\sharp(W(X)_t),W(X)_t\right)dt\\
&\quad=\left(\dot g+2(\nabla^t Z)^\flat-\operatorname{Ric}^t\right)\left(W(X)_t,W(X)_t\right)dt\le 0.
\end{aligned}$$

Consequently, for any $t \geq 0$,

$$\|W(X)_t\|_t \leq \|W(X)_0\|_0 = 1. \tag{4.6}$$

For $x, y \in M$, let $u \mapsto \gamma(x,y)(u)$ be a minimal $g(0)$-geodesic from x to y in time 1: $\gamma(x,y)(0) = x$ and $\gamma(x,y)(1) = y$. Denote by $X^{x,y}(u)$ a horizontal $L(t)$-diffusion with initial condition $\gamma(x,y)$.

For $\eta \in \Pi(\mu,\nu)$, define the measure η_t on $M \times M$ by

$$\eta_t(A \times B) = \int_{M\times M} \mathbb{P}\big\{X_t^{x,y}(0) \in A,\ X_t^{x,y}(1) \in B\big\}\, d\eta(x,y),$$

where A and B are Borel subsets of M. Then η_t has marginals μP_t and νP_t. Consequently it is sufficient to prove that for any such η,

$$\int_{M\times M} \mathbb{E}\big[c(t, X_t^{x,y}(0), X_t^{x,y}(1))\big]\, d\eta(x,y) \leq \int_{M\times M} c(0,x,y)\, d\eta(x,y). \tag{4.7}$$

On the other hand, we have a.s.,

$$\begin{aligned}
\rho(t, X_t^{x,y}(0), X_t^{x,y}(1)) &\leq \int_0^1 \big\|\partial_u X_t^{x,y}(u)\big\|_t\, du \\
&= \int_0^1 \big\|W(X^{x,y}(u))_t\, \dot\gamma(x,y)(u)\big\|_t\, du \\
&\leq \int_0^1 \big\|\dot\gamma(x,y)(u)\big\|_0\, du \\
&= \rho(0,x,y),
\end{aligned}$$

and this clearly implies

$$c\big(t, X_t^{x,y}(0), X_t^{x,y}(1)\big) \leq c(0,x,y) \quad \text{a.s.},$$

and then (4.7).

b) Under condition (4.5), we have

$$\frac{d}{dt}\, g(t)\big(W(X)_t, W(X)_t\big) \leq -k\, g(t)\big(W(X)_t, W(X)_t\big),$$

which implies

$$\|W(X)_t\|_t \leq e^{-kt/2},$$

and then

$$\rho\big(t, X_t^{x,y}(0), X_t^{x,y}(1)\big) \leq e^{-kt/2}\rho(0,x,y).$$

The result follows. □

5. Derivative process along constant rank diffusion

In this Section we consider a generator L of constant rank: the image E of the "carré du champ" operator $\Gamma(L) \in \Gamma(TM \otimes TM)$ defines a subbundle of TM. In E we then have an intrinsic metric given by

$$g(x) = \left(\Gamma(L)|E(x)\right)^{-1}, \quad x \in M.$$

Let ∇ be a connection on E with preserves g, and denote by ∇' the associated semi-connection: if $U \in \Gamma(TM)$ is a vector field, $\nabla'_v U$ is defined only if $v \in E$ and satisfies

$$\nabla'_v U = \nabla_{U_{x_0}} V + [V, U]_{x_0}$$

where $V \in \Gamma(E)$ is such that $V_{x_0} = v$ (see [10], Section 1.3). We denote by $Z(x)$ the drift of L with respect to the connection ∇.

For the construction of a flow of L-diffusions we will use an extension of ∇ to TM denoted by $\tilde\nabla$. Then the associated semi-connection ∇' is the restriction of the classical adjoint of $\tilde\nabla$ (see [10] Proposition 1.3.1).

Remark 5.1. It is proven in [10] that a connection ∇ always exists, for instance, we may take the Le Jan-Watanabe connection associated to a well chosen vector bundle homomorphism from a trivial bundle $M \times H$ to E where H is a Hilbert space.

If X_t is an L-diffusion, the parallel transport

$$P(X)_t \colon E_{X_0} \to E_{X_t}$$

along X_t (with respect to the connection $\tilde\nabla$) depends only on ∇. The same applies for the Itô differential $dX_t = d^\nabla X_t$. We still denote by $d_m X_t$ its martingale part.

We denote by

$$\tilde P'(X)_t : T_{X_0}M \to T_{X_t}M$$

the parallel transport along X_t for the adjoint connection $(\tilde\nabla)'$, and by $\tilde D' J$ the covariant differential (with respect to $(\tilde\nabla)'$) of a semimartingale $J \in TM$ above X; compare (2.3) for the definition.

Theorem 5.2. *We keep the notation and assumptions from above. Let x_0 be a fixed point in M and $X_t(x_0)$ an L-diffusion starting at x_0. For $x \in M$ close to x_0, we define the L-diffusion $X_t(x)$, started at x, by*

$$dX_t(x) = \tilde P_{X_t(x_0),X_t(x)}\, d_m X_t(x_0) + Z(X_t(x))\, dt \tag{5.1}$$

where $\tilde P_{x,y}$ denotes parallel transport (with respect to $\tilde\nabla$) along the unique $\tilde\nabla$-geodesic from x to y. Then

$$\tilde D' T_{x_0}X = \tilde\nabla_{T_{x_0}X} Z\, dt - \frac12 \operatorname{Ric}^\sharp(T_{x_0}X)\, dt \tag{5.2}$$

where

$$\operatorname{Ric}^\sharp(u) = \sum_{i=1}^d \tilde R(u, e_i)e_i, \quad u \in T_xM,$$

and $(e_i)_{i=1,\dots,d}$ an orthonormal basis of E_x for the metric g.

Under the additional assumption that $Z \in \Gamma(E)$, the differential $\tilde D' T_{x_0}X$ does not depend on the extension $\tilde\nabla$, and we have

$$\tilde D' T_{x_0}X = \nabla_{T_{x_0}X} Z\, dt - \frac12 \operatorname{Ric}^\sharp(T_{x_0}X)\, dt. \tag{5.3}$$

Proof. From [3] Eq. 7.4 we have

$$\begin{aligned}\tilde D' T_{x_0}X = {} & \tilde\nabla_{T_{x_0}X} \tilde P_{X_t(x_0),\boldsymbol{\cdot}}\, d_m X_t(x_0) + \tilde\nabla_{T_{x_0}X} Z\, dt \\ & - \frac12 \Big(\tilde R'(T_{x_0}X, dX(x_0))dX(x_0) + \tilde\nabla'\tilde T'(dX(x_0), T_{x_0}X, dX(x_0))\Big) \\ & - \frac12 \tilde T'(\tilde D' T_{x_0}X, dX)\end{aligned}$$

where $\tilde{T}'$ denotes the torsion tensor of $\tilde{\nabla}'$. Since for all $x \in M$, $\tilde{\nabla}_v \tilde{P}_{x,\bullet} = 0$ if $v \in T_x M$, the first term in the right vanishes. As a consequence, $\tilde{D}' T_{x_0} X$ has finite variation, and $T'(\tilde{D}' T_{x_0} X, dX) = 0$. Then using the identity

$$\tilde{R}'(v,u)u + \tilde{\nabla}' \tilde{T}'(u,v,u) = \tilde{R}(v,u)u, \quad u, v \in T_x M,$$

which is a particular case of identity (C.17) in [10], we obtain

$$\tilde{D}' T_{x_0} X = \tilde{\nabla}_{T_{x_0} X} Z \, dt - \frac{1}{2} \tilde{R}(T_{x_0} X, dX(x_0)) dX(x_0).$$

Finally writting

$$\tilde{R}(T_{x_0} X, dX(x_0)) dX(x_0) = \mathrm{Ric}^\sharp(T_{x_0} X) \, dt$$

yields the result. □

Remark 5.3. In the non-degenerate case, ∇ is the Levi-Civita connection associated to the metric generated by L, and we are in the situation of Section 2. In the degenerate case, in general, ∇ does not extend to a metric connection on M. However conditions are given in [10] (1.3.C) under which $P'(X)$ is adapted to some metric, and in this case $T_{x_0} X$ is bounded with respect to the metric.

One would like to extend Theorem 2.1 to degenerate diffusions of constant rank, by solving the equation

$$\partial_u X(u) = \tilde{\nabla}_{\partial_u X(u)} Z \, dt - \frac{1}{2} \, \mathrm{Ric}^\sharp(\partial_u X(u)) \, dt.$$

Our proof does not work in this situation for two reasons. The first one is that in general $\tilde{P}'(X)$ is not adapted to a metric. The second one is the lack of an inequality of the type (2.7) since ∇ does not have an extension $\tilde{\nabla}$ which is the Levi-Civita connection of some metric.

Remark 5.4. When M is a Lie group and L is left invariant, then $\tilde{\nabla}$ can be chosen as the left invariant connection. In this case $(\tilde{\nabla})'$ is the right invariant connection, which is metric.

References

[1] M. Arnaudon, *Differentiable and analytic families of continuous martingales in manifolds with connections,* Probab. Theory Relat. Fields 108 (1997), no. 3, 219–257.
[2] M. Arnaudon and A. Thalmaier, *Stability of stochastic differential equations in manifolds,* Séminaire de Probabilités XXXII, Lecture Notes in Mathematic 1686 (1998), 188–214.
[3] M. Arnaudon and A. Thalmaier, *Horizontal martingales in vector bundles*, Séminaire de Probabilités XXXVI, Lectures Notes in Math. 1801, Springer, Berlin (2003), 419–456.
[4] M. Arnaudon, A. Thalmaier and F.-Y. Wang, *Harnack inequality and heat kernel estimates on manifolds with curvature unbounded below*, Bull. Sci. Math. 130 (2006), 223–233.
[5] M. Arnaudon, K. A. Coulibaly and A. Thalmaier, *Brownian motion with respect to a metric depending on time; definition, existence and applications to Ricci flow*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), no. 13-14, 773–778.
[6] A. B. Cruzeiro, *Equations différentielles sur l'espace de Wiener et formules de Cameron-Martin non linéaires*, J. Funct. Analysis 54 (1983), no.2, 206–227.
[7] F. Cipriano and A. B. Cruzeiro, *Flows associated to tangent processes on the Wiener space*, J. Funct. Analysis 166 (1999), no. 2, 310–331.
[8] F. Cipriano and A. B. Cruzeiro, *Flows associated with irregular $\mathbb{R}^d$ vector fields*, J. Diff. Equations 210 (2005), no. 1, 183–201.
[9] B. K. Driver, *A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact manifold*, J. Funct. Analysis 110 (1992), 272–376.
[10] K. D. Elworthy, Y. Le Jan and Xue-Mei Li, *On the geometry of Diffusion Operators and Stochastic Flows*, Lecture Notes in Math. 1720, Springer, Berlin (1999).

[11] S. Fang and D. Luo, *Quasi-invariant flows associated to tangent processes on the Wiener space*, Preprint (2008).
[12] F. Gong and J. Zhang, *Flows associated to adapted vector fields on the Wiener space*, J. Funct. Analysis (2007), no.2, 647–674.
[13] E. P. Hsu, *Quasi-invariance of the Wiener measure on the Path Space over a Compact Riemannian Manifold*, Journal of Functional Analysis 134 (1995), no. 2, 417–450.
[14] E. P. Hsu, *Quasi-invariance of the Wiener measure on path spaces: noncompact case*, Journal of Functional Analysis 193 (2002), no. 2, 278–290.
[15] W. Kendall, *Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property*, Stochastics 19 (1986), no. 1-2, 111–129.
[16] J. Lott, *Optimal transport and Ricci curvature for metric-measure spaces*, Surv. Differ. Geom., 11, Int. Press, Somerville, MA, (2007), 229–257.
[17] R. J. McCann and P. M. Topping, *Ricci flow, entropy and optimal transportation*, American Journal of Math., to appear.
[18] F. Otto and M. Westdickenberg, *Eulerian calculus for the contraction in the Wasserstein distance*, SIAM J. Math. Anal. 37 (2005), no. 4, 1227–1255 (electronic).
[19] M. K. von Renesse and K. T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 58 (2005), no. 7, 923–940.
[20] P. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 325. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
[21] P. Topping, *$\mathcal{L}$-optimal transportation for Ricci flow*, J. reine angew. Math., to appear.

Laboratoire de Mathématiques et Applications
CNRS: UMR 6086
Université de Poitiers, Téléport 2 - BP 30179
F–86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France
E-mail address: marc.arnaudon@math.univ-poitiers.fr

Laboratoire de Mathématiques et Applications
CNRS: UMR 6086
Université de Poitiers, Téléport 2 - BP 30179
F–86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France
E-mail address: abdoulaye.coulibaly@math.univ-poitiers.fr

Unité de Recherche en Mathématiques
Université du Luxembourg, 162A, Avenue de la Faïencerie
L–1511 Luxembourg, Grand-Duchy of Luxembourg
E-mail address: anton.thalmaier@uni.lu

Chapter 6

Compléments de calculs

113

1 Compléments de calculs sur le chapitre 3

1) Page 39 (1.5)

Cette formule provient de (1.1),(1.2) et des deux lignes avant (1.3) (sur la correspondance des espaces verticaux (resp. horizontaux) par évaluation) :

$$\begin{aligned} D^{S,t}U_te_i &= (\mathcal{V}_{U_te_i})^{-1}(dev_{e_i}(*dU_t)^{v,t}) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t,U_t)(\mathcal{V}_{U_te_i})^{-1}(dev_{e_i}V_{\alpha,\beta}(U_t))dt \end{aligned}$$

d'autre part :

$$(\mathcal{V}_{U_te_i})^{-1}(dev_{e_i}V_{\alpha,\beta}(U_t)) = \delta_i^{\beta}U_te_\alpha$$

ce qui donne le résultat de (1.5).

2) Page 39 (1.6)

La dernière formule page 38 et les conditions de la proposition qui suivent la formule (1.1), donnent :

$$\langle U_te_i, U_te_j\rangle_{\partial_1 g(t,\pi(U_t)))}\; dt + \left\langle D^{S,t}U_te_i, U_te_j\right\rangle_{g(t,\pi(U_t))} + \left\langle U_te_i, D^{S,t}U_te_j\right\rangle_{g(t,\pi(U_t))} = 0$$

Avec la formule (1.3) et la définition de $(\partial_1 G(t,U))_{i,j} = \langle Ue_i, Ue_j\rangle_{\partial_1 g(t)}$, on obtient :

$$\sum_\alpha A_{\alpha,i}(t,U_t)\langle U_te_\alpha, U_te_j\rangle_t + \sum_\alpha A_{\alpha,j}(t,U_t)\langle U_te_\alpha, U_te_i\rangle_t = -(\partial_1 G(t,U_t))_{i,j}$$

ce qui donne (1.6).

3) Pages 52-54 (preuve de proposition 3.6)

Ici nous regardons un $\frac{1}{2}g(T-t)$-MB, et le $\frac{1}{2}$ qui pose problème vient de :

$$(\frac{1}{2}g(T-t)(U_t^Te_i, U_t^Te_j) = \delta_i^j$$

car X_t^T est un $\frac{1}{2}$... MB, et donc U_t^T est une $\frac{1}{2}$... isométrie.

4) Pages 55-60 (connexion espace-temps)

On passe à l'espace-temps pour n'avoir qu'une seule connexion ($\tilde{\nabla}$) au lieu d'avoir une famille de connexion, ce qui serait moins maniable. Cela nous permet d'utiliser directement le corollaire 3.17 de [3]. On pourrait se passer de cette réécriture, mais il faudrait refaire une démonstration différente de 3.17.

-Formule (4.2)

Cette formule provient de la 2ième formule avant la proposition 4.1 (c'est le corollaire 3.17 de [3]), de la connexion produit $\tilde{\nabla}$ et du fait que $(//_{0,t}^{T} e_i)_{i=1..n}$ est une base orthonormée de $(T_{X_t(x)}M, g(T-t))$.
i.e : le corollaire 3.17 de [3] et la construction (formule 4.1) donnent (c'est pour ça que je suis passé à (t, X_t)) :

$$\tilde{//}_{0,t} d(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0,v)) = -\frac{1}{2}\tilde{R}(TY_t(0,v), dY_t(x_0))dY_t(x_0).$$

La connexion produit et la relation $dY = (dt, *dX_t) = (dt, //_{0,t}^{T} e_i * dW^i)$ donnent :

$$\begin{aligned}
\tilde{//}_{0,t} d(\tilde{//}_{0,t}^{-1} TY_t(0,v)) &= -\frac{1}{2}(0, R_{T-t}(d\pi TY_t(0,v), d\pi dY_t(x_0))d\pi dY_t(x_0)) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,j}(0, R_{T-t}(TX_t(v), //_{0,t}^{T} e_i * dW^i) //_{t}^{T-t} e_j * dW^j) \\
&= -\frac{1}{2}(0, Ric^{\#T-t}(TX_t v))\, dt
\end{aligned}$$

Remarque : Cette proposition produit un résultat canonique, dans le sens où le processus à variation finie introduit dans la définition (3.1), qui à été construit grâce à la formule de Weitzenbrök a été suposé à variation fini. Ici on le construit comme variation infinitésimale d'un couplage parallèle, et on obtient qu'il est à variation fini.

-Premier groupe de formules page 57. La second égalité vient de la formule de Itô-Stratonovich, (et de l'identification ligne 10 page 56 : $e_i \sim (0, e_i)$)

i.e :

$$\begin{aligned}
*d(d\pi \tilde{//}_{0,t} e_i) &= *d(d\pi(ev_{ei} \tilde{//}_{0,t})) \\
&= dd\pi dev_{e_i} * d\tilde{//}_{0,t}.
\end{aligned}$$

- Page 57, fin de la preuve (dernière égalité) : Elle vient de la formule (4.5) et de la formule (4.2). Mais elle ne vient pas de $\tilde{//} = TY_t$ qui est une formule fausse en générale (prendre par exemple $g(t) = g_0$ constante et non Ricci plate)

2 Compléments de calculs sur le chapitre 5

Page 99 (c'est vrai qu'il manque des détails de calculs, mais nous les trouvions dispersant pour la lecture).

-première phrase page 100 : L-diffusions are ∇'-martingales :

On écrit $L = a^{ij}\partial_{ij} + b^j\partial_j$, X est une L-diffusion alors (L elliptique donc a^{ij} est inversible), pour tout f fonction lisse sur M on a :

$$df(X_t) - Lf(X_t)dt \in d\mathcal{M}$$

i.e.

$$df(X_t) - (a^{ij}\partial_{ij}f(X_t) + b^j\partial_j f(X_t))dt \in d\mathcal{M}$$

que l'on réécrit :

$$df(X_t) - \frac{1}{2}(-\Gamma^{;k}_{ij}\partial_k f(X_t + \partial_{ij}f(X_t))(a^{ij} + a^{ji})(X_t)dt \in d\mathcal{M} \tag{1}$$

car si $\Gamma'^k_{ij} = -\frac{1}{2}(a_{ik} + a_{jk})b^k$ alors (comme a^{ij} est symétrique)

$$\sum_{ij}\Gamma'^k_{ij}(a^{ij} + a^{ji}) = 2\sum_{ij}\Gamma'^k_{ij}(a^{ij})$$

puis :

$$2\sum_{ij}\Gamma'^k_{ij}(a^{ij}) = (-\sum_{ij}a_{ik}a^{ij} - \sum_{ij}a_{jk}a^{ij})b^k = -2b^k.$$

D'autre part X L-diffusion entraîne :

$$\begin{aligned} d[X^i, X^j] &= (L(x^ix^j) - x^iL(x^j) - x^jL(x^i))(X_t)dt && (2)\\ &= (a^{ij} + a^{ji})(X_t)dt && (3)\\ & && (4) \end{aligned}$$

il vient

$$dx^i \otimes dx^j(*dX, *dX) = d[X^i, X^j] = (a^{ij} + a^{ji})(X_t)dt$$

avec (1) on obtient :

$$\begin{aligned} df(X_t) - \frac{1}{2}(-\Gamma'^k_{ij}\partial_k f(X_{t)} + \partial_{ij}f(X_t))dx^i \otimes dx^j(*dX, *dX) \quad &\in \quad d\mathcal{M} && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$

i.e.

$$df(X_t) - \frac{1}{2}\nabla' df(*dX, *dX) \in d\mathcal{M}$$

donc X est une ∇'-martingale.

- ligne 12 page 100 à la place du "easily prove that", il devrait y avoir (preuve de formule (2.10)) :

Dans le calcul de ligne 8 à ligne 11, après prise de l'espérance, il nous manque le calcul de la ligne 11 (car N^X et N^Y sont des martingales) :

$$d\langle (N^X)^i, (N^X)^j \rangle_t = d\langle X^i, X^j \rangle_t = (a^{ij} + a^{ji})(X_t)dt$$

donc :

$$\Gamma'^k_{ij}(X_t) d\langle (N^X)^i, (N^X)^j \rangle_t = -2b^k(X_t)dt$$

Sur un domaine U, il existe C tel que les fonctions b^k, pour $k = 1..n$ soient Lipschitz de constante C. page 99, $\tau_0 := t_0 \wedge \tau$ ou τ est le temps minimum de sortie de U pour X ou Y, et t_0 un temps assez petit.

On obtient après arrêt en τ_0, prise de l'espérance ligne 8, et après somme sur tous les coefficients (k) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[d\langle N^X - N^Y, N^X - N^Y \rangle_{\tau_0}] &\leq 2\mathbb{E}[\sup_{t \leq \tau_0} \|X_t - Y_t\|^2] \\
&+ 2\sum_k \mathbb{E}[\int_0^{\tau_0} |X_t^k - Y_t^k| \, |b^k(X_t) - b^k(Y_t)| \, dt] \\
&\leq 2\mathbb{E}[\sup_{t \leq \tau_0} \|X_t - Y_t\|^2] \\
&+ 2C \int_0^{t_0} \mathbb{E}[\sup_{s \leq \tau_0} \|X_s - Y_s\|^2] \, dt \\
&\leq (2 + 2Ct_0)\mathbb{E}[\sup_{t \leq \tau_0} \|X_t - Y_t\|^2]
\end{aligned}$$

On obtient ainsi (2.10).

- Ligne 17 "easy calculation" in local coordonate (ou comment obtenir 2.11 ?) :

Localement on identifie à l'aide d'une carte TM à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, soit γ une courbe C^1 dans M, on écrit dans la carte $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$; on notera P le transport parallèle au dessus de γ, pour une connexion de symbole de Cristoffel Γ^l_{ij}. Soit e_i une base de $T_{\gamma(0)}M$, on écrit le transport pour tous les vecteurs e_i dans la carte ;

$$P_t e_i = (a_1(t), ..., a_n(t))$$

c'est une courbe dans TM, après dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dt} P_t e_i = ((-\Gamma^1_{ij} a_i \gamma'_j(t)), ..., (-\Gamma^n_{ij} a^i \gamma'^j(t)))$$

c'est l'équation du transport parallèle.

après identification on écrit :

$$(\frac{d}{dt} P_t e_i)^l = -\Gamma^l(P_t e_i, (\gamma'(t)))$$

i.e.

$$\left(\frac{d}{dt}P_t(.)\right) = -\Gamma(P_t(.))\,(\gamma'(t))$$

Le principe de transfert de Stratonovitch donne :

$$*dP(X)_t(.) = -\Gamma_{X_t}(P(X)_t(.)) * dX_t$$

(remarque : c'est en gros , sans métrique qui varie , la deuxieme équation page 43)
Après réécriture de cette équation en terme de Itô :

$$dP(X)_t(.) = -\Gamma_{X_t}(P(X)_t(.),)dX_t - \frac{1}{2}d(\Gamma_{X_t}(P(X)_t(.),))dX_t$$

En utilisant deux fois le calcul précédent, le fait que le dernier terme de l'équation précédente est à variation bornée et que Γ est linéaire en ces 2 dernières coordonnées, il vient :

$$\begin{aligned}
dP(X)(.) &= -\Gamma_{X_t}(P(X)_t(.), dX_t) - \frac{1}{2}d\Gamma_{X_t}(dX_t)(P(X)_t(.), dX_t) \\
&- \frac{1}{2}\Gamma_{X_t}(dP(X)_t(.), dX_t) \\
&= -\Gamma_{X_t}(P(X)_t(.), dX_t) - \frac{1}{2}d\Gamma_{X_t}(dX_t)(P(X)_t(.), dX_t) \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma_{X_t}(\Gamma_{X_t}(P(X)_t(.), dX_t), dX_t).
\end{aligned}$$

On utilise

$$W(X)_t = P(X)_t(P(X)_t^{-1}W(X)_t)$$

après application de la différentielle de Itô, associé au fait que $(P(X)_t^{-1}W(X)_t)$ soit à variation bornée (*), on obtient :

$$\begin{aligned}
dW(X)_t &= (dP(X)_t.)(P(X)_t^{-1}W(X)_t) + P(X)_t(d(P(X)_t^{-1}W(X)_t)) \\
&+ (dP(X)_t.)(d(P(X)_t^{-1}W(X)_t)) \text{ ce terme est nul (*)} \\
&= -\Gamma_{X_t}(W(X)_t, dX_t) - \frac{1}{2}d\Gamma_{X_t}(dX_t)(W(X)_t, dX_t) \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma_{X_t}(\Gamma_{X_t}(W(X)_t, dX_t), dX_t) \\
&- \frac{1}{2}Ric^{\#}(W(X)_t)\,dt + \nabla_{W(X)_t}Z\,dt
\end{aligned}$$

ce qui est l'équation (2.11).

-page 103 ligne -8 sortie du α_k^2 (ligne -6 avant **step** 5 dans l'article page 8) :

$$(A) = \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\left\|\int_0^u \left(W(X^{\alpha_k}(v))_t \int_0^t W(X^{\alpha_k}(v))_s^{-1}\nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)}P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),.}\, d_m X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k})\right) dv\right\|^2\right]$$
$$\le C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{t\le\tau_0}\left\|\int_0^t W(X^{\alpha_k}(v))_s^{-1}\nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)}P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),.}\, d_m X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k})\right\|^2\right] dv$$

On utilise le fait que $W(.)_t$ est borné uniformément pour $t \leq \tau_0$, en utilisant l'inégalité de B.D.G. (pour comparer l'espérance du sup d'une martingale au carré avec son crochet), et on obtient (avec la constante C qui change d'une ligne à l'autre) :

$$C \int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq\tau_0} \left\| \int_0^t W(X^{\alpha_k}(v))_s^{-1} \nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)} P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),\boldsymbol{.}}\, d_m X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}) \right\|^2 \right] dv$$
$$\leq C \int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0} \left\| \nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)} P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),\boldsymbol{.}} \right\|^2 ds\right] dv$$

On utilise ensuite le fait que si $v \in T_x M$, alors $\nabla_v P_{x,\boldsymbol{.}} = 0$, donc pour $v \in T_x M$,

$$\| \nabla_v P_{y,\boldsymbol{.}} \|^2 = \| \nabla_v P_{y,\boldsymbol{.}} - \nabla_v P_{x,\boldsymbol{.}} \|^2 \tag{7}$$
$$\leq C\rho(x,y)^2 \| v \|^2 \tag{8}$$

où la constante C est constante locale de Lipshitz (sur U, remarque c'est ici que U doit être assez petit relativement à la géométrie). On utilise cette formule pour $v = \partial X_s^{\alpha_k}(v)$, $y = X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k})$ et $x = X_s^{\alpha_k}(v)$ puis en utilisant (2.7) page 95 :

$$\rho(X_s^{\alpha_k}(v), X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k})) \leq C\alpha_k$$

on obtient :

$(A) \leq$
$C \int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0} \left\| \nabla_{\partial X_s^{\alpha_k}(v)} P_{X_s^{\alpha_k}(v_{\alpha_k}),\boldsymbol{.}} \right\|^2 ds\right] dv$
$\leq C\alpha_k^2 \int_0^u \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0} \| \partial X_s^{\alpha_k}(v) \|^2\right] dv$
or par l'équation (2.8) on a : $\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_0} \| \partial X_s^{\alpha_k}(v) \|^2\right] \leq C$ pour $u \leq u_0$.

-page 104, formule (2.17) explication du formaly (article page 9) :

On a montré que $u \mapsto \partial X(u)$ était continue pour la topologie des semimartingales (définie dans : Stability of stochastic differential equations in manifolds seminaire de probabilités XXXII)[AT98b]. On utilise le corollaire 3.18 de cette article pour définir le "formaly" :

soit α une 1-forme différentielle sur M ; on définit

$$Z(u) = \int (\alpha(X(u), dX(u)))$$

Le corollaire 3.18 de [AT98b] affirme que $Z(u)$ est différentiable en u pour la topologie des semimartingales. D'autre part le corollaire 3.14 de [AT98b] donne :

$$d\partial_u Z(u) = d\alpha(\partial X(u))(d^{\nabla'} \partial X(u))$$

où ∇' désigne le lift complet sur TM de la connexion ∇ sur M. On obtient :

$$\begin{aligned} d\partial_u Z(u) &= d\alpha(\partial X(u))(d^{\nabla'}\partial X(u)) && (9)\\ &= d\alpha(\partial X(u))((d^{\nabla'}\partial X(u))^v + (d^{\nabla'}\partial X(u))^h) && (10)\\ &= \alpha(v^{-1}((d^{\nabla'}\partial X(u))^v)) + \langle \nabla_{\partial X(u)}\alpha, d^{\nabla} X(u)\rangle && (11)\\ & && (12)\end{aligned}$$

Le "formaly" vient du fait que :

$$\partial_u \int (\alpha(X(u), dX(u))) = \int (\alpha(X(u)), \nabla_u dX(u)) + \int \langle \nabla_{\partial X(u)}\alpha, d^{\nabla} X(u)\rangle$$

Grâce au lemme 3.15 [AT98b], il vient :

$$\nabla_u dX = v^{-1}((d^{\nabla'}\partial X(u))^v) = D\partial_u X(u) + \frac{1}{2}R_m(\partial_u X(u), dX(u))dX(u).$$

C'est la formule (2.17), elle permet de réaliser la commutation des opérateurs différentiels.

- le gives ligne -9 page 104 :

Après identification :

$$\nabla_u dX = \nabla_{\partial X} Z\, dt.$$

Le formaly précédent permet de considérer le premier terme de l'équation précédente comme une dérivation covariante du vecteur $(dX_t(u))$, c'est une formule de transfert.
On désigne par $u \mapsto P_{X(t,u)}$ le transport parallèle au dessus de $u \mapsto X(t,u)$ à t fixé, il vient :

$$P_{X(t,u)}\partial_u(P^{-1}_{X(t,u)} dX_t(u)) = P_{X(t,u)}\partial_u(P^{-1}_{X(t,u)} Z(X(t,u)))dt$$

donc :

$$P^{-1}_{X(t,u)} dX_t(u) = (P^{-1}_{X(t,u)} Z(X(t,u)))dt + cst$$

i.e.

$$dX(u) = Z(X(t,u))dt + P_{X(t,u)} cst$$

on met $u = 0$ dans l'équation précédente, on en déduit :

$$cst = d_m X_t(0)$$

d'où :

$$dX_t(u) = Z(X(t,u))dt + P_{X(t,u)} d_m X_t(0)$$

Chapter 7

Appendix

121

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 773–778

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probability Theory

Brownian motion with respect to a metric depending on time; definition, existence and applications to Ricci flow

Marc Arnaudon [a], Kolehe Abdoulaye Coulibaly [a], Anton Thalmaier [b]

[a] *Laboratoire de Mathématiques et Applications (UMR6086), Université de Poitiers, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France*

[b] *Unité de recherche en mathématiques, Université du Luxembourg, 162A, avenue de la Faïencerie, L-1511 Luxembourg, Grand-Duché de Luxembourg*

Received 29 April 2008; accepted 6 May 2008

Available online 20 June 2008

Presented by Paul Malliavin

Abstract

Given an n-dimensional compact manifold M, endowed with a family of Riemannian metrics $g(t)$, a Brownian motion depending on the deformation of the manifold (via the family $g(t)$ of metrics) is defined. This tool enables a probabilistic view of certain geometric flows (e.g. Ricci flow, mean curvature flow). In particular, we give a martingale representation formula for a non-linear PDE over M, as well as a Bismut type formula for a geometric quantity which evolves under this flow. As application we present a gradient control formula for the heat equation over $(M, g(t))$ and a characterization of the Ricci flow in terms of the damped parallel transport. ***To cite this article: M. Arnaudon et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Résumé

Mouvement brownien par rapport à une famille de métriques : définition, existence et applications. Soit M une variété compacte de dimension n et $g(t)$ une famille de métriques sur M, nous allons définir un $g(t)$-mouvement brownien, qui sera l'analogue d'un mouvement brownien sur une variété mais tenant compte de la déformation (c'est-à-dire de la famille de métriques $g(t)$). Cet outil nous donnera une vision probabiliste de différents flots géométriques (e.g. flot de Ricci, flot de courbure moyenne). Nous donnerons aussi des formules de représentation en terme des martingales de solutions d'EDP non-linéaires sur M, ainsi que des formules du type Bismut pour des quantités géométriques évoluant le long d'un tel flot. Pour finir, nous donnerons comme application une formule de contrôle du gradient d'une solution de l'équation de la chaleur sur $(M, g(t))$ et une caractérisation du flot de Ricci en terme de transport parallèle déformé. ***Pour citer cet article : M. Arnaudon et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Version française abrégée

Soit M une variété compacte de dimension n, munie d'une famille C^1 de métriques $g(t)$, et $\mathcal{F}(M)$ le fibré des repères sur M. Notons $\nabla^{g(t)}$ la connexion de Levi-Civita relative à la métrique $g(t)$ et $\Delta_{g(t)}$ l'opérateur de Laplace–

E-mail addresses: arnaudon@math.univ-poitiers.fr (M. Arnaudon), coulibal@math.univ-poitiers.fr (K.A. Coulibaly), anton.thalmaier@uni.lu (A. Thalmaier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.05.004

Beltrami. Nous construisons une EDS de Stratonovich sur $\mathcal{F}(M)$ dont la solution en tout temps t forme un système orthonormé pour $g(t)$:

$$\begin{cases} *\mathrm{d}\tilde{U}_t = L_i(t,\tilde{U}_t) * \mathrm{d}B^i - \dfrac{1}{2}(\partial_t g)(t, \tilde{U}_t e_\alpha, \tilde{U}_t e_\beta)\hat{V}_{\alpha,\beta}(\tilde{U}_t)\,\mathrm{d}t, \\ \tilde{U}_0 \in \mathcal{F}(M) \end{cases} \tag{1}$$

où $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $L_i(t,u) = h^{g(t)}(ue_i)$ est le $\nabla^{g(t)}$ relèvement horizontal de ue_i, $\hat{V}_{\alpha,\beta}$ est la base canonique des champs de vecteurs verticaux de $\mathcal{F}(M)$ et B^i sont n mouvements browniens indépendants sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Définition 0.1. Soit $(\tilde{U}_0 e_i)$ une base orthonormée de $(T_x M, g(0))$. On définit le $g(t)$-mouvement brownien par projection : $X_t(x) = \pi(\tilde{U}_t)$.

Il peut aussi s'écrire à l'aide de développement stochastique : $*\mathrm{d}X_t(x) = \tilde{U}_t e_i * \mathrm{d}B^i$.

Proposition 0.2. *Soit $X_t(x)$ un $g(t)$-mouvement brownien, alors* :

$$\begin{cases} \forall f \in C^\infty(M), \quad \mathrm{d}\big(f\big(X_t(x)\big)\big) \overset{\mathrm{d}\mathcal{M}}{=} \dfrac{1}{2}(\Delta_{g(t)} f)\big(X_t(x)\big)\,\mathrm{d}t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

De façon naturelle, nous définissons un transport parallèle stochastique que l'on notera :

$$//_{0,t} : \big(T_{X_0(x)}M, g(0)\big) \longrightarrow \big(T_{X_t(x)}M, g(t)\big).$$

De telles familles de métriques sont produites naturellement par des flots géométriques (flot de courbure moyenne, flot de Ricci, ...). Nous allons donner des exemples d'utilisations dans le cas du flot de Ricci et de l'équation de la chaleur associée :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)} f(t,x), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{ij} = -\operatorname{Ric}_{ij}, \\ f(0,x) = f_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

où f_0 est une fonction lisse sur M.

Le flot de Ricci sur les variétés compactes développe des singularités en temps fini. On notera T_c le temps d'apparition de la première singularité. Pour $T < T_c$, on note $X_t^T(x)$ un $g(T-t)$-mouvement brownien et $//_{0,t}^T$ son transport parallèle. Notons que pour f solution de (2), le processus $f(T-t, X_t^T(x))$ est une martingale.

Définition 0.3. On définit le transport parallèle déformé $W_{0,t}^T : T_x M \to T_{X_t^T(x)}M$ comme solution de :

$$\mathrm{d}\big((//_{0,t}^T)^{-1}\big(W_{0,t}^T\big)\big) = -\frac{1}{2}\big(//_{0,t}^T\big)^{-1}\big(\operatorname{Ric}^{g(T-t)} - \partial_t\big(g(T-t)\big)\big)^{\#g(T-t)}\big(W_{0,t}^T\big)\,\mathrm{d}t, \quad W_{0,0}^T = \mathrm{id}.$$

Théorème 0.4. *Pour tout $f_0 \in \mathcal{F}(M)$ et $f(t,\cdot)$ solution de* (2)*, le processus*

$$\mathrm{d}f(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)}\big(W_{0,t}^T v\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

est une martingale locale pour tout $v \in T_x M$.

Théorème 0.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *La famille de métriques $g(t)$ évolue suivant l'équation de Ricci.*
(ii) *Pour tout $T < T_c$, on a $//_{0,t}^T = W_{0,t}^T$.*

Dans ce cas, le transport parallèle déformé est une isométrie.

1. Definition of a $g(t)$-BM

Let M be an n-dimensional manifold, $\mathcal{F}(M)$ the frame bundle, and $g(t)$ a family of metrics over M. Denote by $\nabla^{g(t)}$, resp. $\Delta_{g(t)}$, the associated Levi-Civita connections, resp. Laplace–Beltrami operators. Finally let $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ be an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$. For $u \in \mathcal{F}(M)$ let $L_i(t,u) = h^{g(t)}(ue_i)$ be the horizontal lift of ue_i with respect to $\nabla^{g(t)}$, $L_i(t)$ the associated horizontal vector field, and $\hat{V}_{\alpha,\beta}$ the canonical basis of vertical vector fields. Take B^i, $i = 1,\dots,n$, independent real Brownian motions on a canonical filtered probability space $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Suppose that the family of metrics is C^1 in time, and consider the following Stratonovich stochastic differential equation on $\mathcal{F}(M)$:

$$\begin{cases} *\mathrm{d}\tilde{U}_t = L_i(t,\tilde{U}_t) * \mathrm{d}B^i - \frac{1}{2}(\partial_t g)(t, \tilde{U}_t e_\alpha, \tilde{U}_t e_\beta)\hat{V}_{\alpha,\beta}(\tilde{U}_t)\,\mathrm{d}t, \\ \tilde{U}_0 \in \mathcal{F}(M). \end{cases} \tag{3}$$

Eq. (3) has local Lipschitz coefficients and hence a unique strong solution with continuous paths.

Proposition 1.1. *If $(\tilde{U}_0 e_i)$ is an orthonormal basis of $(T_{\pi(\tilde{U}_0)}M, g(0))$ then $(\tilde{U}_t e_i)$ is an orthonormal basis of $(T_{\pi(\tilde{U}_t)}M, g(t))$, $\mathbb{P}$-a.s.*

Proof. The covariant derivative determines a horizontal complement (varying as a function of time) in TTM to the vertical subspace, and induces a compatible decomposition of $T\mathcal{F}M$. In the above equation, at each time the projection onto the vertical space according to the current connection $\nabla^{g(t)}$ is given. We use Schwartz principle (every construction for C^1 curves generalizes to semimartingales, by approximation of solutions of Stratonovich equations, e.g. [5], Theorem 7.24) along with a Taylor development of the metric, to compute the covariant derivative of the tangent-valued process. □

For the drift part in Eq. (3) there are many choices giving the same result as Proposition 1.1. Our choice is canonical in the sense that it is symmetric and forces the solution to be a $g(t)$-*isometry*. If $g(t)$ does not depend on t, the construction reduces to the usual stochastic parallel transport, see [8].

Definition 1.2. Let $(\tilde{U}_0 e_i)$ be an orthonormal basis of $(T_x M, g(0))$. Define the $g(t)$-BM(x) as:

$$X_t(x) = \pi(\tilde{U}_t).$$

Proposition 1.3. *If $X_t(x)$ is a $g(t)$-BM(x) then*

$$\begin{cases} \forall f \in C^\infty(M), \quad \mathrm{d}\big(f\big(X_t(x)\big)\big) \overset{\mathrm{d}\mathcal{M}}{=} \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)} f\big(X_t(x)\big)\,\mathrm{d}t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Proof. We compute $L_i(t)L_j(t)(f \circ \pi)(u) = \nabla^{g(t)}\,\mathrm{d}f(ue_i, ue_j)$ as in [6]. The result follows. □

Remark 1. The formulation above gives a non-linear differential equation for the density of a $g(t)$-BM(x) which is independent of the choice of the initial orthonormal frame; consequently the law of a $g(t)$-BM(x) is independent of this choice. In the case where $g(t)$ is a solution of the Ricci flow the density of the $g(t)$-BM(x) satisfies an equation which is close to the conjugate heat equation.

Definition 1.4. The $g(t)$-*parallel transport* along the $g(t)$-BM is defined by $//_{0,t} = \tilde{U}_t \circ \tilde{U}_0^{-1}$. It is a linear isometry along the $g(t)$-BM(x) $X_t(x)$ in the sense of isometries:

$$//_{0,t} : \big(T_{X_0(x)}M, g(0)\big) \longrightarrow \big(T_{X_t(x)}M, g(t)\big).$$

Remark 2. Consider the mean curvature flow (M_t) of some compact hypersurface M_0 in $\mathbb{R}^{n+1}$ as in [7], and the natural pullback of the induced metric. We obtain a family of metrics $g(t)$, and a characterization of this flow in terms of the $g(t)$-BM. For T strictly smaller than explosion time, and for a $g(T-t)$-BM we have a $\mathbb{R}^{n+1}$-valued Itô martingale (with finite quadratic variation equal to $2nt$ before explosion time) which lives in M_{T-t} at time t (control problem). One can derive an estimate of the explosion time in terms of the diameter of the initial hypersurface.

2. Damped parallel transport

Consider

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)} f(t,x), \\ f(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

where f_0 is a smooth function on M and where $\Delta_{g(t)}$ is the Laplacian on M with respect to $g(t)$. Let $X_t^T(x)$ be a $g(T-t)$-BM(x) and define the $g(T-t)$-*parallel transport* $//_{0,t}^T$ as before.

Definition 2.1. The damped parallel transport $W_{0,t}^T : T_xM \longrightarrow T_{X_t^T(x)}M$ is defined as the solution of

$$\mathrm{d}\big((//_{0,t}^T)^{-1} W_{0,t}^T\big) = -\frac{1}{2}\big(//_{0,t}^T\big)^{-1}\big(\mathrm{Ric}^{g(T-t)} - \partial_t\big(g(T-t)\big)\big)^{\#g(T-t)}\big(W_{0,t}^T\big)\,\mathrm{d}t, \quad W_{0,0}^T = \mathrm{id}\,.$$

Theorem 2.2. *For any $f_0 \in \mathcal{F}(M)$, and $f(t,\cdot)$ a solution of* (4)*, the process*

$$\mathrm{d}f(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)} W_{0,t}^T v, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

is a local martingale for any $v \in T_xM$. Here df denotes the de Rham differential of f.

Proof. We use scalarization of a differential form to bring computations back in $\mathbb{R}^n$. The proof then relies on commutativity of de Rham differential and Hodge de Rham Laplacian, along with the Weitzenböck formula for differential forms. □

Taking $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{ij}(t) = -\mathrm{Ric}_{ij}(t)$ as definition of the forward Ricci flow, the associated heat equation is:

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta_{g(t)} f(t,x), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{ij} = -\mathrm{Ric}_{ij}, \\ f(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{5}$$

where f_0 is a smooth function on M.

Remark 3. The Ricci flow of a compact manifold develops its first singularity in finite time which we denote by T_c. For $T < T_c$ we take $X_t^T(x)$ as a $g(T-t)$-BM(x), therefore if $f(t,x)$ is a solution of (5) then $f(T-t, X_t^T(x))$ is a martingale. Eq. (3) then becomes

$$\begin{cases} *\mathrm{d}U_t^T = L_i\big(T-t, U_t^T\big) * \mathrm{d}B^i - \dfrac{1}{2}\mathrm{Ric}^{g(T-t)}\big(U_t^T e_\alpha, U_t^T e_\beta\big)\hat{V}_{\alpha,\beta}\big(U_t^T\big)\,\mathrm{d}t; \\ U_0^T \text{ a } g(T)\text{-orthonormal basis of } T_xM. \end{cases}$$

We denote by $//_{0,t}^T$ again the $g(T-t)$-*parallel transport*.

Remark 4. There is an analogous result for the backward Ricci flow and its heat flow which are defined as before but with a sign change in front of the Ricci curvature in the evolution of the metric.

Theorem 2.3. *Keeping the notions from above, the following items are equivalent*:

(i) *A family $g(t)$ of metrics evolves under the forward Ricci flow.* 125
(ii) *For any $T < T_c$, the equality $//_{0,t}^T = W_{0,t}^T$ holds.*

In this case the damped parallel transport is an isometry.

Remark. With respect to a fixed metric, the damped parallel transport differs in general from the usual parallel transport. In our case the evolution of the metric under the forward Ricci flow cancels the damping of the parallel transport. A nice consequence for computations is that in this case the damped parallel transport is an isometry. This is not the case for the backward Ricci flow.

3. Bismut formula for the Ricci flow

We intend to give a Bismut type gradient formula for the solution of Eq. (5), depending only on the initial condition $(f_0, g(0))$, see [3,4,9,1]. To this end, we derive the following integration by parts formula:

Lemma 3.1. *For any $\mathbb{R}^n$-valued process k in $L^2_{\mathrm{loc}}(B)$ where B is an $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion,*

$$N_t = \mathrm{d}f(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)}\big(U_t^T\big)\left[\big(U_0^T\big)^{-1}v - \int_0^t k_r\,\mathrm{d}r\right] + f\big(T-t, X_t^T(x)\big)\int_0^t \langle k_r, \mathrm{d}B_r\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

is a local martingale.

Proof. By Proposition 1.3, $f(T-t, X_t^T(x))$ is a martingale and its Itô differential is:

$$d\big(f\big(T-t, X_t^T(x)\big)\big) = \mathrm{d}f(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)} U_t^T \big(U_0^T\big)^{-1} e_i\,\mathrm{d}B^i,$$

where $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ is a $g(T)$-orthonormal basis of T_xM, $\mathrm{d}B = (U_0^T)^{-1}e_i\,\mathrm{d}B^i$. With Theorem 2.2 we get:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}N_t &\overset{\mathrm{d}\mathcal{M}}{=} -\sum_i \mathrm{d}f(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)} U_t^T\big(U_0^T\big)^{-1}e_i\big\langle U_0^T(k_t), e_i\big\rangle_T\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\big(f\big(T-t, X_t^T(x)\big)\big)\langle k_t, \mathrm{d}B\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&\overset{\mathrm{d}\mathcal{M}}{=} -\sum_i \mathrm{d}f(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)} U_t^T\big(U_0^T\big)^{-1}e_i\big\langle U_0^T(k_t), e_i\big\rangle_T\,\mathrm{d}t\\
&\quad + \mathrm{d}f(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)}\left(\sum_i U_t^T\big(U_0^T\big)^{-1}e_i\,\mathrm{d}B^i\right)\left(\sum_j \big\langle k_t, \big(U_0^T\big)^{-1}e_j\big\rangle \mathrm{d}B^j\right)\\
&\overset{\mathrm{d}\mathcal{M}}{=} 0,
\end{aligned}$$

which proves the lemma. □

We can immediately deduce that the supremum of the gradient in the space variable of a solution to Eq. (5) decreases in time with a bound specified in the following corollary.

Corollary 3.2. *Let $\mathcal{M}_0 = \sup_M |f_0|$. For $T < T_c$ we have*:

$$\sup_{x\in M}\big\|\nabla^T f(T,x)\big\|_T \text{ is decreasing in time, and } \sup_{x\in M}\big\|\nabla^T f(T,x)\big\|_T \leqslant \frac{\mathcal{M}_0}{\sqrt{T}}.$$

Proof. Take $x \in M$ such that $\|\nabla^T f(T,x)\|_T$ is maximal. The first result follows from Theorems 2.2 and 2.3. Choose $k_r = (U_0^T)^{-1}v/T\mathbf{1}_{[0,T]}$ in Lemma 3.1, then N_t is a martingale; taking expectation at time 0 and T, we get

$$\mathrm{d}f(T,\cdot)_x v = \frac{1}{T}\mathbb{E}\left[f_0\big(X_T^T(x)\big)\int_0^T \big\langle \big(U_0^T\big)^{-1}v, \mathrm{d}B\big\rangle_{\mathbb{R}^n}\right].$$

Given $x \in M$ and $v = \nabla^T f(T,x)$, Schwartz inequality gives

$$\big\|\nabla^T f(T,x)\big\|_T^2 \leqslant \frac{\mathcal{M}_0}{T}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \big\langle \big(U_0^T\big)^{-1}v, \mathrm{d}W\big\rangle_{\mathbb{R}^n}\right|^2\right]^{1/2}.$$

The result follows. □

In the case of the normalized Ricci flow of surfaces (which is well understood), we can derive an estimate for the gradient of the scalar curvature. Let M be 2-dimensional, $R(t)$ the scalar curvature, and $r := \int_M R(t)\,\mathrm{dvol}/\int_M \mathrm{dvol}$ its average (constant in time). We consider the normalized Ricci flow (which conserves the volume), i.e.,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{ij}(t) = \big(r - R(t)\big) g_{ij}(t).$$

Remark 6. Hamilton (see [2]) gives a proof of all time existence of solutions to this equation. He also establishes a result of convergence of such metrics to a metric of constant curvature.

Proposition 3.3. *For $T > 0$, let $X_t^T(x)$ be a $\frac{1}{2}g(T-t)$-BM(x) and $//_{0,t}^T$ be the parallel transport along $X_t^T(x)$. Further, for $v \in T_x M$, let $\phi_t v$ be the solution to the following Itô equation*:

$$//_{0,t}^T \mathrm{d}\big(\big(//_{0,t}^T\big)^{-1} \phi_t v\big) = -\big(3r/2 - 2R\big(T-t, X_t^T(x)\big)\big)\phi_t v \,\mathrm{d}t.$$

Then $\mathrm{d}R(T-t,\cdot)_{X_t^T(x)} \phi_t v$ is a martingale, and the following estimate holds:

$$\big\|\nabla^T R(T,x)\big\|_T \leqslant \sup_M \big\|\nabla^0 R(0,\cdot)\big\|_0 \mathrm{e}^{-3rT/2} \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T 2R\big(T-t, X_t^T(x)\big)\,\mathrm{d}t\right)\right]. \tag{6}$$

Remark 7. In the case $\chi(M) < 0$ (which is the easiest case) we can give an estimate which decreases exponentially in time, using Prop. 5.18 in [2]. In this case we have $r < 0$, a constant C depending only on the initial metric, and the following estimate for all time:

$$\big\|\nabla^T R(T,x)\big\|_T \leqslant \sup_M \big\|\nabla^0 R(0,\cdot)\big\|_0 \mathrm{e}^{rT/2} \exp\left(2C \frac{\mathrm{e}^{rT} - 1}{r}\right).$$

In Proposition 3.3, we were interested in the $\mathrm{e}^{-3rT/2}$ term which may, in the case $\chi(M) > 0$, give convergence of the gradient of scalar curvature of a surface evolving by normalized Ricci flow to 0. For such a conclusion it is sufficient to estimate the expectation term in (6).

References

[1] M. Arnaudon, B.K. Driver, A. Thalmaier, Gradient estimates for positive harmonic functions by stochastic analysis, Stochastic Process. Appl. 117 (2) (2007) 202–220.

[2] B. Chow, D. Knopf, The Ricci Flow: An Introduction, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[3] K.D. Elworthy, X.-M. Li, Formulae for the derivatives of heat semigroups, J. Funct. Anal. 125 (1) (1994) 252–286.

[4] K.D. Elworthy, M. Yor, Conditional expectations for derivatives of certain stochastic flows, in: Séminaire de Probabilités, XXVII, in: Lecture Notes in Math., vol. 1557, Springer, Berlin, 1993, pp. 159–172.

[5] M. Émery, Stochastic Calculus in Manifolds, Springer-Verlag, Berlin, 1989. With an appendix by P.-A. Meyer.

[6] E.P. Hsu, Stochastic Analysis on Manifolds, Graduate Studies in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[7] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Differential Geom. 20 (1) (1984) 237–266.

[8] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 313, Springer, Berlin, 1997.

[9] A. Thalmaier, Feng-Yu Wang, Gradient estimates for harmonic functions on regular domains in Riemannian manifolds, J. Funct. Anal. 155 (1) (1998) 109–124.

Bibliography

[ABT02] Marc Arnaudon, Robert O. Bauer, and Anton Thalmaier. A probabilistic approach to the Yang-Mills heat equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 81(2):143–166, 2002.

[ACT] Marc Arnaudon, Kolehe Abdoulaye Coulibaly, and Anton Thalmaier. Horizontal diffusion in c^1 path space, journal = arXiv, http://arxiv.org/abs/0904.2762v1, mrclass = 58J65 (53C44 60G46 60J65), mrnumber = MR2427080,.

[ACT08] Marc Arnaudon, Kolehe Abdoulaye Coulibaly, and Anton Thalmaier. Brownian motion with respect to a metric depending on time: definition, existence and applications to Ricci flow. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(13-14):773–778, 2008.

[ADT07] Marc Arnaudon, Bruce K. Driver, and Anton Thalmaier. Gradient estimates for positive harmonic functions by stochastic analysis. *Stochastic Process. Appl.*, 117(2):202–220, 2007.

[Arn97] Marc Arnaudon. Differentiable and analytic families of continuous martingales in manifolds with connection. *Probab. Theory Related Fields*, 108(2):219–257, 1997.

[Arn99] M. Arnaudon. Appendix to the preceding paper: “A remark on Tsirelson’s stochastic differential equation” [in *séminaire de probabilités, xxxiii*, 291–303, Lecture Notes in Math., 1709, Springer, Berlin, 1999; MR1768002 (2001e:60111)] by M. Émery and W. Schachermayer. Natural filtration of Brownian motion indexed by **R** in a compact manifold. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 304–314. Springer, Berlin, 1999.

[AT98a] M. Arnaudon and A. Thalmaier. Complete lifts of connections and stochastic Jacobi fields. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 77(3):283–315, 1998.

[AT98b] Marc Arnaudon and Anton Thalmaier. Stability of stochastic differential equations in manifolds. In *Séminaire de Probabilités, XXXII*, volume 1686 of *Lecture Notes in Math.*, pages 188–214. Springer, Berlin, 1998.

129

[AT03] Marc Arnaudon and Anton Thalmaier. Horizontal martingales in vector bundles. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*, pages 419–456. Springer, Berlin, 2003.

[ATW06] Marc Arnaudon, Anton Thalmaier, and Feng-Yu Wang. Harnack inequality and heat kernel estimates on manifolds with curvature unbounded below. *Bull. Sci. Math.*, 130(3):223–233, 2006.

[BÉ85] D. Bakry and Michel Émery. Diffusions hypercontractives. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.

[CC99] Fernanda Cipriano and Ana Bela Cruzeiro. Flows associated to tangent processes on the Wiener space. *J. Funct. Anal.*, 166(2):310–331, 1999.

[CC05] Fernanda Cipriano and Ana Bela Cruzeiro. Flows associated with irregular $\mathbb{R}^d$-vector fields. *J. Differential Equations*, 219(1):183–201, 2005.

[CE75] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.

[CH] Xiaodong Cao and Richard S. Hamilton. Differential harnack estimates for time-dependent heat equations with potentials.

[CK04] Bennett Chow and Dan Knopf. *The Ricci flow: an introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Coua] A. K. Coulibaly. Brownian motion with respect to time-changing riemannian metrics, applications to ricci flow. Preprint http://arxiv.org/abs/0901.1999v1.

[Coub] A. K. Coulibaly. Some stochastic process without birth, linked to the mean curvature flow. Preprint.

[Cra91] M. Cranston. Gradient estimates on manifolds using coupling. *J. Funct. Anal.*, 99(1):110–124, 1991.

[Cru83] Ana Bela Cruzeiro. Équations différentielles sur l'espace de Wiener et formules de Cameron-Martin non-linéaires. *J. Funct. Anal.*, 54(2):206–227, 1983.

[CT] R.J. Mc Cann and P.M. Topping. Ricci flow, entropy and optimal transportation. Preprint (2007).

[DeT83] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Differential Geom.*, 18(1):157–162, 1983.

[Dri92] Bruce K. Driver. A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold. *J. Funct. Anal.*, 110(2):272–376, 1992.

[EL94] K. D. Elworthy and X.-M. Li. Formulae for the derivatives of heat semigroups. *J. Funct. Anal.*, 125(1):252–286, 1994.

[ELJL99] K. D. Elworthy, Y. Le Jan, and Xue-Mei Li. *On the geometry of diffusion operators and stochastic flows*, volume 1720 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Elw88] David Elworthy. Geometric aspects of diffusions on manifolds. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV–XVII, 1985–87*, volume 1362 of *Lecture Notes in Math.*, pages 277–425. Springer, Berlin, 1988.

[Eme79] M. Emery. Une topologie sur l'espace des semimartingales. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 260–280. Springer, Berlin, 1979.

[Éme89] Michel Émery. *Stochastic calculus in manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989. With an appendix by P.-A. Meyer.

[Éme90a] Michel Émery. On two transfer principles in stochastic differential geometry. In *Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89*, volume 1426 of *Lecture Notes in Math.*, pages 407–441. Springer, Berlin, 1990.

[Éme90b] Michel Émery. On two transfer principles in stochastic differential geometry. In *Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89*, volume 1426 of *Lecture Notes in Math.*, pages 407–441. Springer, Berlin, 1990.

[Eme00] Michel Emery. Martingales continues dans les variétés différentiables. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1998)*, volume 1738 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–84. Springer, Berlin, 2000.

[ES64] James Eells, Jr. and J. H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.

[ES92a] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(1):321–332, 1992.

[ES92b] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. III. *J. Geom. Anal.*, 2(2):121–150, 1992.

[ES95] Lawrence C. Evans and Joel Spruck. Motion of level sets by mean curvature. IV. *J. Geom. Anal.*, 5(1):77–114, 1995.

[ÉS99a] M. Émery and W. Schachermayer. Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 267–276. Springer, Berlin, 1999.

[ES99b] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I [MR1100206 (92h:35097)]. In *Fundamental contributions to the continuum theory of evolving phase interfaces in solids*, pages 328–374. Springer, Berlin, 1999.

[ESS92] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transitions and generalized motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(9):1097–1123, 1992.

[EY93] K. D. Elworthy and M. Yor. Conditional expectations for derivatives of certain stochastic flows. In *Séminaire de Probabilités, XXVII*, volume 1557 of *Lecture Notes in Math.*, pages 159–172. Springer, Berlin, 1993.

[FL] S. Fang and D. Luo. Quasi-invariant flows associated to tangent processes on the wiener space. J. Funct. Analysis (2007), no.2, 647–674.

[GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.

[GZ07] Fuzhou Gong and Jingxiao Zhang. Flows associated to adapted vector fields on the Wiener space. *J. Funct. Anal.*, 253(2):647–674, 2007.

[Ham82] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2):255–306, 1982.

[Hsu95] Elton P. Hsu. Quasi-invariance of the Wiener measure on the path space over a compact Riemannian manifold. *J. Funct. Anal.*, 134(2):417–450, 1995.

[Hsu02] Elton P. Hsu. *Stochastic analysis on manifolds*, volume 38 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Hui84] Gerhard Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differential Geom.*, 20(1):237–266, 1984.

[IW89] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989.

[Jos84] Jürgen Jost. *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, volume 4 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1984.

[Jos05] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005.

[JS03] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[Ken86] Wilfrid S. Kendall. Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property. *Stochastics*, 19(1-2):111–129, 1986.

[KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Kun90] Hiroshi Kunita. *Stochastic flows and stochastic differential equations*, volume 24 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Lee97] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.

[Lot07] John Lott. Optimal transport and Ricci curvature for metric-measure spaces. In *Surveys in differential geometry. Vol. XI*, volume 11 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 229–257. Int. Press, Somerville, MA, 2007.

[Mey81] P.-A. Meyer. Géométrie stochastique sans larmes. In *Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French)*, volume 850 of *Lecture Notes in Math.*, pages 44–102. Springer, Berlin, 1981.

[Nor92] J. R. Norris. A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds. In *Séminaire de Probabilités, XXVI*, volume 1526 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–209. Springer, Berlin, 1992.

[OW05] Felix Otto and Michael Westdickenberg. Eulerian calculus for the contraction in the Wasserstein distance. *SIAM J. Math. Anal.*, 37(4):1227–1255 (electronic), 2005.

[RY99] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[Sch82] Laurent Schwartz. Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle. In *Seminar on Probability, XVI, Supplement*, volume 921 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–148. Springer, Berlin, 1982.

[ST03] H. Mete Soner and Nizar Touzi. A stochastic representation for mean curvature type geometric flows. *Ann. Probab.*, 31(3):1145–1165, 2003.

[SV06] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1997 edition.

[Top] P. Topping. $\mathcal{L}$-optimal transportation for ricci flow. Preprint, 2007.

[Top06] Peter Topping. *Lectures on the Ricci flow*, volume 325 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[TW98] Anton Thalmaier and Feng-Yu Wang. Gradient estimates for harmonic functions on regular domains in Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.*, 155(1):109–124, 1998.

[vRS05] Max-K. von Renesse and Karl-Theodor Sturm. Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(7):923–940, 2005.

Titre

Étude d'équations d'évolution en géométrie globale avec des méthodes probabilistes

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, à une famille de métriques sur une variété nous associons un mouvement brownien. Nous construisons un transport parallèle stochastique au-dessus de ce processus. Avec une forme intrinsèque du flot stochastique, nous définissons une notion de transport parallèle déformé au-dessus de ce processus. Nous caractérisons le flot de Ricci comme étant le seul flot sur les métriques garantissant l'égalité du tranport parallèle et du transport parallèle déformé.

Dans ce cas, le transport parallèle déformé est une isométrie. Nous en déduisons des propriétés sur le flot de Ricci. Dans une seconde partie, nous nous intéressons au flot à courbure moyenne d'une hypersurface. Nous construisons ainsi un processus sans naissance et nous montrons son unicité en loi quand la variété de départ est strictement convexe. Quand l'hypersurface de départ n'est pas strictement convexe nous avons néanmoins une famille de martingales dont les points de départ sont sur une "variété" singulière.

Dans la dernière partie, nous construisons une diffusion dans l'espace des courbes sur une variété. Nous en déduisons des conditions suffisantes pour obtenir des propriétés de contraction - pour plusieurs distances de Wasserstein - entre deux mesures de probabilité représentant la densité de deux diffusions d'opérateur elliptique inhomogène quelconque. Ainsi, cette nouvelle construction produit une alternative entièrement probabiliste aux calculs d'Otto utilisés par Lott pour arriver à des résultats similaires.

Mot-clefs

Flots géométriques, courbure de Ricci, flot de Ricci, flot de curvature moyenne, mouvement Brownien, martingales à valeur dans un fibré vectoriel, flot stochastique, transport parallèle déformé, distance de Wasserstein, problème de Monge-Kantorovich.

Abstract

In the first part of this thesis, for a family of metrics on a manifold we associate a Brownian motion. We build a parallel stochastic transport above this process. With a kind of intrinsic stochastic flow, we define a notion of damped parallel transport above this process. We characterize the Ricci flow as the only flow of metrics that guarantees the equality between the parallel transport and the damped parallel transport. We deduce some properties of the Ricci flow.

On the second hand, we study the mean curvature flow of a hypersurface. We build a process without birth and we prove the uniqueness in law of such a process when the initial hypersurface is strictly convex. When it is not strictly convex we obtain a family of martingales that start in a singular "manifold".

In the last part, we build a diffusion in the space of regular curves on some manifold. We deduce sufficient conditions to obtain some contraction properties - for a large class of Wasserstein distances - between two measures of probability that represent the density of two diffusions associated with an inhomogeneous elliptic operator. So this new construction yields a totally probabilistic alternative to the Otto calculus used by Lott to obtain similar results.

Keywords

Geometric flows, Ricci flow, mean curvature flow, Brownian motion, vector bundles valued martingales, stochastic flow, damped parallel transport, Wasserstein distance, Monge-Kantorovich problem.