Groupe de Travail p-adique

La Steinberg vue de l'immeuble

Paul Broussous, le 9/02/2002

Séance du 4/3/2002

Introduction

On utilise les notations habituelles : F, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p} = \pi\mathfrak{o}$, $k = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, $q = |k|$, $G = \mathrm{GL}_n(F)$. La représentation de Steinberg **St** de G est une représentation très importante possédant d'intéressantes applications (théorie des formes automorphes, cohomologie des sous-groupes arithmétiques, ...). Elle possède les caractérisations équivalentes suivantes :

a) $\mathbf{St} = \sum_{\Theta\subset\Delta} (-1)^{|\Theta|}\mathrm{Ind}_{P_\theta}^G \mathbf{1}$, où Δ est une base d'un système de racines et P_Θ le parabolique standard attaché à Θ.
b) Elle est duale de la représentation triviale dans la dualité de Zelevinsky (cf. [Aubert], [Schneider-Stuhler]).
c) Elle correspond au caractère signe de l'algèbre d'Iwahori-Hecke (voir plus loin).
d) C'est la représentation de G dans l'espace de cohomologie à support compact $H_c^{n-1}(X, \mathbb{C})$, où X est l'immeuble affine de G.

L'équivalence entre (a) et (b) découle rapidement de la définition de la dualité (une fois qu'on a montré qu'elle est bien définie). Celle entre (a) et (d) découle des travaux de Borel et Serre [Borel-Serre]sur le calcul de la cohomologie de l'immeuble via sa compactification par l'immeuble topologique de Tits à l'infini. L'objet de cet exposé est de montrer l'équivalence entre (c) et (d). La preuve est inspiré de l'article de Borel [Bo], mais ne suit pas exactement son traitement. D'une part, nos arguments s'appliquent *mutatis mutandis* à un groupe réductif, simplement connexe, quasi-simple, quelconque, et simplifient la preuve de Borel; d'autre part, nous traitons le cas non-simplement connexe de GL_n, non couvert par son travail.

1. Le système de Tits généralisé.

Nous allons utiliser d'autres notations que celles de Howe [Howe]. Pour $i = 1, \ldots, n-1$, on note s_i la matrice de la transposition $(i, i+1)$. On note :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \pi & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que pour $i = 1, \ldots, n-1$, on a $\Pi s_i \Pi^{-1} = s_{i-1}$. On pose $s_0 = \Pi s_1 \Pi^{-1}$. Posons $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$. Alors le groupe W engendré par S s'identifie au groupe de Weyl affine de $\mathrm{SL}(n, F)$. Le produit semidirect $\tilde{W} =< \Pi > W$ est un système de représentants de $I\backslash G/I$, où I est le sous-groupe d'Iwahori standard (matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}$). La paire (W, S) est un système de Coxeter affine de type $\tilde{A}_{n-1}$, mais $(\tilde{W}, S \cup \{\Pi\})$ non. On parle alors de système de Tits généralisé (voir [Iw]). La structure de l'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G, I)$ ne va se compliquer que légèrement par rapport au cas standard car Π normalise I.

Normalisons la mesure de Haar de G de sorte que $\mathrm{vol}(I) = 1$. Pour chaque $w \in \tilde{W}$, notons e_w la fonction caractéristique de IwI. Nous introduisons d'abord la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{H}(n, q)$ de présentation :

(H1) *Générateurs* : des symboles $[s_i]$, $i = 0, \ldots, n-1$, $[P]$, $[P']$.
(H2) *Relations* :

(i) $[P][P'] = [P'][P] = 1$;
(ii) $[s_i]^2 = (q-1)[s_i] + q$ (ou encore $([s_i]+1)([s_i]-q) = 0$), $i = 0, \ldots, n-1$;
(iii) $[P][s_0] = [s_{n-1}][P]$;
(iv) $[P][s_i] = [s_{i-1}][P]$, $i = 1, \ldots, n-1$;
(v) $[s_i][s_{i+1}][s_i] = [s_{i+1}][s_i][s_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$;
(vi) $[s_i][s_j] = [s_j][s_i]$, $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, $|i-j| \geqslant 2$.

On a le :

(1.1) Théorème. *L'application $[s_i] \mapsto e_{s_i}$, $[P] \mapsto e_\Pi$ s'étend de façon unique en un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}(N, q) \simeq \mathcal{H}(G, I)$.*

Une *expression minimale* pour un élément w de $\tilde{W}$ est une écriture $w = \Pi^a w_1 w_2 \ldots w_l$, où $w_1 w_2 \ldots w_l$ est une écriture minimale dans W. L'entier l s'appelle la *longueur* de w. Avec les arguments du cas classique et le fait que Π normalise I et permute les $[s_i]$, on montre facilement le :

(1.2) Lemma. *Si $w = \Pi^a w_1 w_2 \ldots w_l$ est une écriture minimale dans $\tilde{W}$, alors*

$$e_w = e_\Pi^a e_{w_1} \ldots e_{w_l}.$$

(On utilisé le fait que e_Π est inversible).

(1.3) Corollaire *Soit ϵ_o le signe de la permutation circulaire $(0, \ldots, n-1) \mapsto (1, 2, \ldots, n-1, 0)$. Il existe un et un seul caractère χ de l'algèbre $\mathcal{H}(G, I)$ satisfaisant $\chi(e_s) = -1$ et $\chi(e_\Pi) = \epsilon_o$. Il vérifie :*

$$\chi(e_{\Pi^a w_1 w_2 \ldots w_l}) = \epsilon_o^a (-1)^l$$

pour tout écriture minimale $\Pi^a w_1 w_2 \ldots w_l$ dans $\tilde{W}$.

Nous aurons besoin d'une variante des résultats précédents. Nous allons en effet nous intéresser par la suite à l'action de $\bar{G} = \mathrm{PGL}_n(F)$. Tout ce que nous avons énoncé reste vrai en faisant les modifications suivantes :

(a) Remplacer G par $\bar{G}$ et I par $\bar{I} = F^\times I \bmod F^\times$;
(b) Considérer les élements de $\tilde{W}$ comme des représentants dans G;
(c) Ajouter la relation $[P]^n = 1$ dans la présentation.

2. Une équivalence de catégories.

Je vais rappeler quelques faits concernant les vecteurs fixes des représentations de G sous un compact ouvert K quelconque (cf. [Cass]; ceci est en fait valable pour tout groupe réductif). Soit V une représentation lisse de G. L'espace des vecteurs fixes V^K est naturellement un $\mathcal{H}(G, K)$-module à gauche. Si V est irréductible, alors ([Cass] Prop. (2.2.4)) V^K est soit nul, soit irréductible comme $\mathcal{H}(G, K)$-module. Il n'y a pas de réciproque évidente; cependant :

(2.1) Proposition ([Cass] Prop. (2.2.2) et (2.2.4)) *Soient V_1, V_2 des représentations lisses de G telles que :*

(i) V_1 est engendrée par V_1^K comme G-module,

(ii) tout sous-G-module non-trivial de V_2 contient un vecteur non-nul fixe sous K.

Alors on a un isomorphisme canonique :

$$Hom_G(V_1, V_2) \simeq Hom_{\mathcal{H}(G,K))}(V_1^K, V_2^K).$$

De plus si V, représentation lisse, satisfait (i) et (ii), alors V est irréductible dès que V^K l'est comme $\mathcal{H}(G,K)$-module.

Soit $\mathcal{S}_K(G)$ la catégorie formée des représentations lisses V de G qui sont engendrées par V^K comme G-modules. Le foncteur

$$\mathbf{M}_K \ : \mathcal{S}_K(G) \longrightarrow \mathcal{H}(G,K) - \mathrm{mod}\ ,\ V \mapsto V^K$$

n'est en géneral pas une équivalence de catégories (ça n'est par exemple pas le cas si K est le compact maximal). En fait c'est le cas exactement quand $\mathcal{S}_K(G)$ contient les sous-quotients de ses objets (cf. [BKTypes] (3.3)).

On a le résulat :

(2.2) Théorème ([Borel]) *Lorque K est le sous-groupe d'Iwahori I, le foncteur $\mathbf{M}_I$ est une équivalence de catégories. Son inverse est donné par le foncteur*

$$\mathbf{I}_I \ : \ \mathcal{H}(G,I) - mod \ \longrightarrow \mathcal{S}_I(G)\ ,\ E \mapsto \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G,I)} E.$$

Ici $\mathcal{H}(G)$ est l'algèbre de convolution des fonctions complexes localement constantes et à support compact sur G. On dit que le caractère trivial de I est un *type* pour G (cf. [BKTypes]). Je ne développerai pas cet aspect plus loin.

On a tout en main pour donner la :

(2.3) Définition *La représentation de Steinberg* **St** *de G est la représentation lisse irréducible de G correspondant au caractère χ de I (défini dans le corollaire (1.3)) via l'équivalence de (2.2).*

Tout ce que nous venons d'énoncer reste vrai, ou a un sens, lorsque l'on remplace G par $\bar{G}$ et I par $\bar{I}$.

Remarques. **1.** La définition première de la représentation de Steinberg est la définition (a) de l'introduction (équivalent à la (d) par [Borel-Serre]). Ce sera l'objet de la suite de montrer que ces définitions sont les mêmes.
2. Dans son article [Howe], Howe semble ne pas prendre le bon *caractère spécial* de $\mathcal{H}(G,I)$ (cf. [Borel]). Il demande en effet que $\chi(e_\Pi)$ soit égal à 1.

3. Rappels sur l'immeuble.

Je ne vais pas redéfinir l'immeuble X de G, mais simplement rappeler les propriétés qui seront utiles. Pour commencer X est un complexe simplicial, connexe, de dimension $n-1$, localement compact et dénombrable à l'infini. Ses simplexes maximaux ont même dimension n et on les appelle des *chambres*. L'immeuble X est étiquetable : il existe une application simpliciale $\lambda : X \longrightarrow \Delta_{n-1}$ qui préserve la dimension des simplexes (ici Δ_{n-1} est le simple standard bâti sur $\{0,\ldots,n-1\}$). Si σ est un simplexe de X, $\lambda(\sigma)$ sera appelé son *type*. Un étiquetage de X est unique à un automorphisme de Δ_n près. On en fixe un pour la suite.

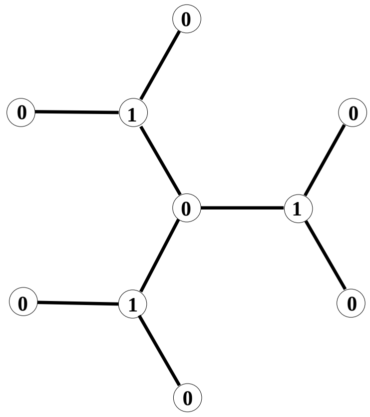

Fig.1 Etiquetage pour $GL_2(\mathbb{Q}_2)$

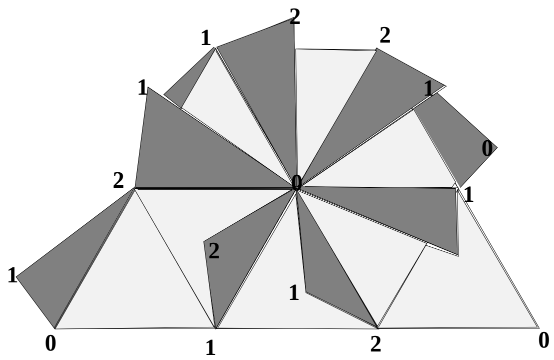

Fig.2 Etiquetage pour $GL_3(\mathbb{Q}_2)$

Le groupe G ne préserve pas l'étiquetage. Cependant le sous-groupe

$$G^o = \{g \in G \ ; \ \mathrm{val}_F[\mathrm{dét}(g)] \in U_F\}$$

le préserve.

On a le produit semidirect $G = < \Pi > G^o$ et l'élément Π agit sur le type d'une chambre par permutation circulaire. À W, on associe son *complexe de Coxeter* $\mathcal{A}_W$. C'est une complexe simplicial de réalisation géométrique $\mathbb{R}^{n-1}$. Il est de dimension $n-1$, étiquetable, et muni d'une action simpliciale de W qui préserve l'étiquetage. L'ensemble des chambres de $\mathcal{A}_W$ est un espace principal homogène sous W.

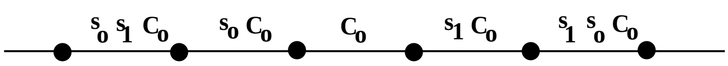

Fig.3 Complexe de Coxeter pour GL_2

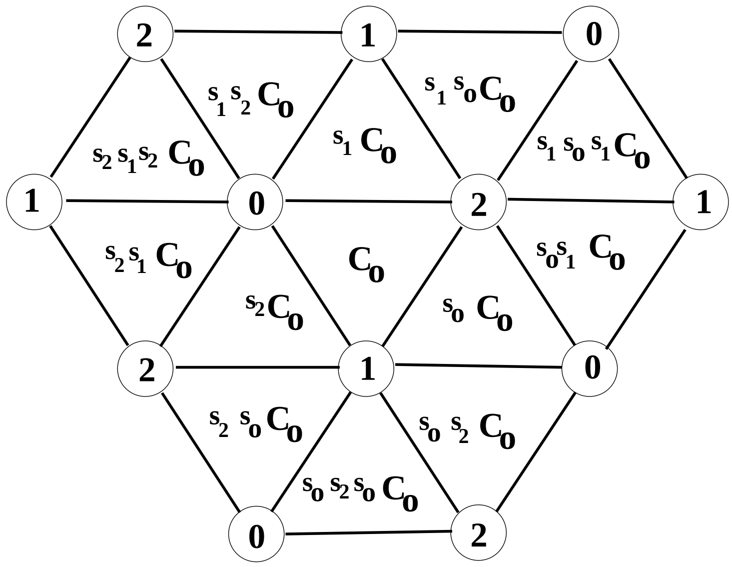

Fig.4 Complexe de Coxeter pour GL_3

Les propriétés de l'immeuble dont nous avons besoin sont les suivantes :

(I1) Le groupe G^o agit transitivement sur l'ensemble des chambres de X.
(I2) Le centre de G agit trivialement.
(I3) L'immeuble X est réunion de sous-complexes (appelés appartements), tous isomorphes à $\mathcal{A}_W$, et G^o agit transitivement sur les appartements.
(I4) Deux chambres sont dans un appartement commun.
(I5) Si $\mathcal{A}$ est un appartement et U une partie de $\mathcal{A}$, alors le fixateur de U dans G^o agit transitivement sur les appartement de X contenant U.

Nous pouvons préciser la propriété (I3) de la façon suivante : comme G-ensemble, l'ensemble des appartements $\mathcal{A}$ de X est isomorphe à l'ensemble des tores déployes maximaux T de X pour l'action par conjugaison. En fait $\mathcal{A}$ correspond à T si, et seulement si, le normalisateur de T stabilise $\mathcal{A}$ globalement.

Soit $\mathcal{A}_o$ l'appartement associé au tore diagonal T_o. Il est muni d'une action de $\tilde{W}$, héritée de celle du normalisateur de T_o. Il existe une unique chambre C_o de $\mathcal{A}_o$ stabilisée par $< \Pi > I$. Soit $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ les sommets de C_o. On peut alors choisir l'indexation de sorte qu'avec les notations du paragraphe 1 :

(1) s_iC_o est l'unique chambre de $\mathcal{A}_o$ qui soit adacente à C_o et telle que l'intersection $s_iC_o \cap C_o$ soit le $n-2$-simplexe $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}\}\backslash\{\sigma_i\}$;
(2) $\Pi\sigma_i = \sigma_{i-1}$ (indexation prise modulo n).

Remarque. Avec les propriétés (I1) à (I5), on peut retrouver la décomposition de Bruhat $G = I\tilde{W}I$. En effet soit $g \in G$; considérons la chambre gC_o. On peut écrire $g = g_o\Pi^a$, avec $g_o \in G^o$, de sorte que $gC_o = g_oC_o$. Par (I4), il existe un appartement $\mathcal{A}_1$ qui contient C_o et g_oC_o. Par (I5), il existe un élement i_1 de I, le stabilisateur de C_o dans G^o, vérifiant $i_1g_oC_o \subset \mathcal{A}_o$. Par l'action transitive de W sur les chambres de $\mathcal{A}_o$, il existe $w \in W$ tel que $wi_1g_oC_o = C_o$. On obtient $wi_1g \in < \Pi > I$, d'où l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ et d'un $i_2 \in I$ tel que $g = i_2\Pi^kwi_1$. CQFD.

4. Opérateurs de Hecke vues comme correspondances sur les chambres

Nous allons donner une interprétation à l'espace homogène $\bar{G}/F^\times I = \bar{G}/\bar{I}$. Le sous-groupe $F^\times I$ est le fixateur point par point de C_o. Considérons les paires (C, i), où C est une chambre de X et $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ une étiquette. Nous avons vu que G agit sur les étiquettes (en fait via le quotient $G/G^o \simeq <\Pi>$) par $g.i = \lambda(g\sigma)$ pour n'importe quel sommet σ de X tel que $\lambda(\sigma) = i$. Le groupe $<\Pi>$ agissant de façon transitive sur les étiquettes, on a une action transitive de G sur les paires (C, i). Le groupe G agissant sur les étiquettes par permutations circulaires, le fixateur de (C_o, i) est $F^\times I$. On notera Ch^* l'ensemble de ces couples.

Notons que $\tilde{W}$ code les positions relatives de deux paires (C, i), (D, j). En effet l'application

$$\bar{G}/\bar{I} \times \bar{G}/\bar{I} \longrightarrow \bar{I}\backslash\bar{G}/\bar{I}\ ,\ (x\bar{I}, y\bar{I}) \mapsto \bar{I}y^{-1}x\bar{I}$$

passe au quotient pour donner une bijection entre les orbites de $\bar{G}$ dans $\bar{G}/\bar{I} \times \bar{G}/\bar{I}$ et $\bar{I}\backslash\bar{G}/\bar{I}$. On notera $(C, i) \sim_w (D, j)$ lorsque les paires (C, i) et (D, j) sont dans l'orbite correspondant à $w \in \tilde{W}$.

Nous savons que $\mathcal{H}(\bar{G}, \bar{I})$ s'indentifie à l'algèbre d'entrelacement de l'induite compacte $\text{c-Ind}_{\bar{I}}^{\bar{G}} \mathbf{1}_{\bar{I}}$. Soit $\mathbb{C}[\mathrm{Ch}]^*$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base Ch^* (on notera la base canonique $u_{(C,i)}$, $(C, i) \in \mathrm{Ch}^*$) . On a un isomorphisme naturel de G-modules entre $\mathbb{C}[\mathrm{Ch}]^*$ et $\text{c-Ind}_{\bar{I}}^{\bar{G}} \mathbf{1}_{\bar{I}}$. C'est un excellent exercice de montrer que l'action naturelle (à droite) de $\mathcal{H}(\bar{G}, \bar{I})$ sur $\mathbb{C}[\mathrm{Ch}]^*$ est donnée par

$$u_{(C,i)} \star e_w = \sum_{(D,j) \sim_w (C,i)} u_{(D,j)}. \tag{4.1}$$

En particulier, pour $s \in S$,

$$u_{(C,i)} \star e_s = \sum u_{(D,i)}\ , \tag{4.2}$$

où D décrit les chambres de X distinctes de C et ayant une facette de codimension 1, d'étiquette s, en commun avec C.
On a aussi :

$$u_{(C,i)} \star e_\Pi = u_{(C,\Pi.i)}.$$

Nous allons appliquer tout ça pour donner une première description de la représentation de Steinberg. Nous abrévions $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}(\bar{G}, \bar{I})$. Nous avons $\mathbf{St} = \mathcal{H}(\bar{G}) \otimes_{\mathcal{H}_o} \chi$. L'idempotent $e_{\bar{I}}$ associé au compact ouvert $\bar{I}$ étant l'élément neutre de $\mathcal{H}_o$, on a $\mathbf{St} = \mathcal{H}(\bar{G}) \star e_{\bar{I}} \otimes_{\mathcal{H}_o} \chi = \mathcal{H}(G/\bar{I}) \otimes_{\mathcal{H}_o} \chi$. Par définition, ce produit tensoriel est le quotient de $\mathcal{H}(\bar{G}/\bar{I})$ par le sous-espace engendré par les $f \star e_w - \chi(w)f$, $w \in \tilde{W}$. Des générateurs pour ce sous-espace sont donc

$$\sum_{(D,i) \sim_s (C,i)} u_{(D,i)} + u_{(C,i)},\ s \in S \tag{4.3}$$

$$u_{(C,\Pi^a.i)} - \epsilon_o^a u_{(C,i)},\ a \in \mathbb{Z} \tag{4.4}$$

pour $(C, i) \in \mathrm{Ch}^*$.

On a un caractère $\epsilon : G \longrightarrow \{\pm 1\}$ défini de la façon suivante : si $C = (\sigma_o, \ldots, \sigma_{n-1})$ est une chambre quelconque de X, $\epsilon(g)$ est la signature de la permutation

$$(\lambda(\sigma_o), \ldots, \lambda(\sigma_{n-1})) \mapsto (\lambda(g\sigma_o), \ldots, \lambda(g\sigma_{n-1})).$$

Notons que $\epsilon(\Pi) = \epsilon_o$. De (4.3) et (4.4), on déduit le fait suivant :

(4.5) Proposition. *Soit $\mathbb{C}[Ch]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base les v_C, C chambre de X. Définissons une action de $\bar{G}$ sur $\mathbb{C}[Ch]$ par $g.C = \epsilon(g)gC$. Soit $\mathbb{C}[Ch]^o$ le sous-$\bar{G}$-module engendré par les $\sum_{C \supset F} v_C$, où F décrit les simplexes de codimension 1. Alors le quotient $\mathbb{C}[Ch]/\mathbb{C}[Ch]^o$ est canoniquement isomorphe à* **St** *comme $\bar{G}$-module.*

5. La cohomologie de l'immeuble.

Nous rappelons la construction du $n-1$-ème espace de cohomologie à support compact $H_c^{n-1}(X, \mathbb{C})$ et décrivons sa structure de $\bar{G}$-module (les espaces $H_c^i(X, \mathbb{C})$, $i = 0, \ldots, n-2$, sont triviaux (cf. [Borel-Serre])).

Un q-simplexe *ordonné* de X est une suite $(\sigma_o, \ldots, \sigma_q)$ telle que $\{\sigma_o, \ldots, \sigma_q\}$ soit un q-simplexe de X. On dit que deux simplexes ordonnés sont équivalents si les simplexes correspondants sont les mêmes et si les indexations diffèrent d'une permutation paire. On notera $< \sigma_o, \ldots, \sigma_q >$ la classe de $(\sigma_o, \ldots, \sigma_q)$. On note $X_{(q)}$ l'ensemble des q-simplexes orientés et $\mathbb{C}[X_{(q)}]$ l'espace vectoriel de base $X_{(q)}$. L'ensemble $C_c^{or}(X_{(q)}, \mathbb{C})$ des *q-cochaînes orientées* de X est le sous-ensemble du dual de $\mathbb{C}[X_q]$ formé des f vérifiant :

(i) f est à support fini,

(ii) $f(< \sigma_{t(0)}, \ldots, \sigma_{t(q)} >) = \mathrm{sgn}(t) f(< \sigma_0, \ldots, \sigma_q >)$, pour toute permutation t de $\{0, \ldots, q-1\}$, et où sgn désigne la signature d'une permutation.

On définit un cobord

$$d \ : C_c^{or}(X_{(q)}, \mathbb{C}) \longrightarrow C_c^{or}(X_{(q+1)}, \mathbb{C})$$

$$df(< \sigma_0, \ldots, s_{q+1} >) = \sum_{i=0,\ldots,q+1} (-1)^i f(< \sigma_0, \ldots, \hat{\sigma}_i, \ldots, \sigma_{q+1} >).$$

On vérifie qu'on a un complexe de cochaînes $(C_c^{or}(X_{(q)}, \mathbb{C}), d)$. Le groupe agit sur les cochaînes par

$$g.f(< \sigma_0, \ldots, \sigma_q >= f(< g^{-1}\sigma_0, \ldots, g^{-1}\sigma_q >).$$

Les cobords sont des morphismes de G-modules, de sorte que les groupes de cohomologie sont munis d'une action de G. Le i-ème groupe s'avère être le groupe de cohomologie à support compact $H_c^i(X, \mathbb{C})$ pour n'importe quelle théorie cohomologique raisonnable (cf. [Massey]).

Il est classique le complexe que l'on a construit est isomorphe à un complexe beaucoup plus simple (en tant que complexe de $\mathbb{C}$-espaces mais pas de G-modules!). On va se servir du fait que l'étiquetage λ permet de fixer une orientation des simplexes. On note $C_c^q(X, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel de base les q-simplexes. On définit un nombre d'incidence $[E : D]$ entre un q-simplexe $D = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_q\}$ et un $q+1$-simplexe $E = \{\tau_o, \ldots, \tau_{q+1}\}$, tels que $D \subset E$, de la façon suivante :

$$[E : D] = (-1)^i \text{ si } \{\lambda(\tau_o), \ldots, \lambda(\tau_{q+1})\} \backslash \{\lambda(\sigma_0), \ldots, \lambda(\sigma_q)\} = \{i\}.$$

On définit un opérateur cobord d sur la base par :

$$d\ : C_c^q(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C_c^{q+1}(X,\mathbb{C})\ ,\ d(D) = \sum_{E\supset D} [E:F].E. \tag{5.1}$$

On a une action évidente de $\bar{G}^o$ sur les espaces $C_c^q(X,\mathbb{C})$. Les cobords sont des $\bar{G}^o$-morphismes car $\bar{G}^o$ préserve l'étiquetage et il découle d'un cacul simple (encore basé sur le fait que l'action de $\bar{G}^o$ préserve l'étiquetage) que les deux complexes considérés sont isomorphes comme complexes de $\bar{G}^o$-modules.

Pour relier la cohomologie de X à la représentation de Steinberg nous montrons d'abord le

(5.2) Lemma. *Les $\bar{G}$-modules $\mathbb{C}[Ch]$ et $C_c^{n-1}(X,\mathbb{C})$ sont les mêmes.*

Preuve. En effet dans l'isomorphisme entre les deux complexes (que l'on n'a pas exhibé), l'action de g sur $C_c^{n-1}(X,\mathbb{C})$ se reflète par $g.C = \epsilon(g)g.C$, $g \in \bar{G}$, C chambre de X.

(5.3) Théorème. *On a un isomorphisme de $\bar{G}$-modules :* $\mathbf{St} \simeq H_c^{n-1}(X,\mathbb{C})$.

Preuve. Il faut montrer que les sous-espaces $dC_c^{n-2}(X,\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[\mathrm{Ch}]^o$ sont les mêmes. Soit D un simplexe de dimension $n-2$. Par la formule (5.1), $d(D) = \sum_C [C:D]C$, où C décrit les chambres contenant D. Les coefficients d'incidence $[C:D]$ sont tous les mêmes car le sommet dans $C\backslash D$ a l'unique type qui n'est pas un type d'un sommet de D. D'où le résultat par définition de $\mathbb{C}[\mathrm{Ch}]^o$.

Remarque finale. Tous nos arguments s'appliquent *mutatis mutandis*, pour montrer que dans le cas d'un groupe réductif simplement connexe, quasi-simple, le caractère signe de l'algèbre de Hecke-Iwahori correspond bien à la représentation de Steinberg. Il suffit de reprendre le raisonnement de Borel et de le simplifier en utilisant le complexe de cochaînes orientées par l'étiquetage. En effet dans ce cas-là, l'action du groupe respecte l'étiquetage. Je ne connais pas de référence couvrant le cas non-simplement connexe (même pour PGL_n!).

Références

[Aubert] A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique*, Transact. AMS 347 (1995), 2179-2189.

[Bki] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. IV.

[Borel] A. Borel, *Admissible representations of a semisimple group over a local field with fixed vectors under an Iwahori subgroup*, Inv. Math. 35, 233-259 (1976).

[Borel-Serre] A. Borel et J.-P. Serre, *Cohomologie à support compact des immeubles de Bruhat-Tits; application à la cohomologie des groupes S-arithmétiques*, CRAS, 272, 110-113 (1971).

[Cass] W. Casselman, *Introduction tto the theory of admissible representations of $\mathfrak{p}$-adic reductive groups.*

[Howe] R. Howe, *Hecke Algebras and p-adic GL_n*, Cont. Math. Vol. 177, 1994.

[Iw] N. Iwahori, *Generalized Tits systems (Bruhat decomposition) on p-adic semisimple groups.* Algebraic groups and discontinuous subgroups (A. Borel et G. Mostow edd.), PSPM IX (AMS, Providence, 1966), 71-83.

[Massey] W. Massey, *Homology and cohomology theory*, Pure and appl. Math., v. 46, Dekker, 1978.

[Schneider-Stuhler] P. Schneider et U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, pub. IHES.