UNIVERSITÉ DE POITIERS
Parcours Renforcé – Première Année
2009/2010
Paul Broussous

Fonctions de plusieurs variables

Seconde version corrigée

Table des matières

1. Un peu de topologie.

- **1.1.** Distance euclidienne, disques et boules.
- **1.2.** Domaines définis par des inéquations.
- **1.3.** Points intérieurs, propriétés.

2. Fonctions de plusieurs variables.

- **2.1.** Champs de scalaires, champs de vecteurs, courbes paramétrées.
- **2.2.** Représentations graphiques, courbes de niveau.
- **2.3.** Continuité et limites.
- **2.4.** Domaines fermés, ouverts. Domaines bornés, compacts.

3. Dérivation.

- **3.1.** Dérivées partielles en un point intérieur au domaine.
- **3.2.** Gradient, différentielle. Dérivée dans une direction.
- **3.3.** Dérivation en chaîne.
- **3.4.** Dérivées partielles d'ordres supérieurs. Lemme de Schwarz.
- **3.5.** Equations aux dérivées partielles.

4. Théorème des fonctions implicites. Gradient et courbes de niveau.

5. Extrema.

- **5.1.** Signe d'une forme quadratique en deux variables.
- **5.2.** Développement limité à l'ordre 2 et extrema locaux.
- **5.3.** Extrema sous contraintes.

6. Introduction à l'intégration des fonctions de plusieurs variables.

- **6.1.** Circulation d'un champ de vecteurs.
- **6.2.** Intégration sur un domaine de $\mathbb{R}^2$.

Introduction

D'un point de vue physique, une fonction de plusieurs variables est une quantité numérique ou vectorielle qui dépend de plusieurs paramètres réels. Par exemple :

– L'altitude (par rapport au niveau de la mer) d'un point à la surface du globe terrestre est une fonction de deux variables (la lattitude et la longitude qui repèrent ce point).
– La température en un point d'une pièce d'habitation est une fonction numérique de trois coordonnées spatiales.
– L'accélération de la pesanteur au voisinage du globe terrestre est une fonction vectorielle de trois coordonnées d'espace.
– Par l'équation des gaz parfaits, $PV = nRT$, on peut considérer la pression $P = nRT/V$ comme étant un fonction numérique des deux variables T (température) et V (volume).

Nous nous intéressons aussi à des quantités vectorielles dépendant d'un seul paramètre réel comme dans l'exemple suivant.

– Une fois fixé un point origine O de l'espace, la trajectoire d'un mobile ponctuel peut être vue comme une fonction vectorielle $\overrightarrow{OM(t)}$ qui dépend de la variable de temps t, où $M(t)$ est la position du mobile à l'instant t.

L'objet de ce cours est de généraliser les techniques de calcul différentiel et intégral (analyse), introduites en classe de terminale, au cas des fonctions de plusieurs variables. Elles seront d'usage constant en physique, chimie et leurs applications.

Ces notes de cours sont en partie inspirées du livre de François Liret *Maths en Pratique, à l'usage des étudiants*, édition Dunod, 1996. En particulier, nous vous conseillons la lecture des chapitres 12 et 13 de ce livre.

1. Un peu de topologie

1.1. Distance euclidienne, disques et boules.

Notre espace de travail sera soit

– un espace euclidien $\mathcal{E}$ (de dimension 3) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$,
– un plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$,
– une droite euclidienne $\mathcal{D}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}})$.

Ici le qualificatif *euclidien* signifie que l'on peut effectuer un produit scalaire :

$$(x_1\vec{\mathbf{i}} + y_1\vec{\mathbf{j}} + z_1\vec{\mathbf{k}}).(x_2\vec{\mathbf{i}} + y_2\vec{\mathbf{j}} + z_2\vec{\mathbf{k}}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \text{ (dans } \mathcal{E})$$

$$(x_1\vec{\mathbf{i}} + y_1\vec{\mathbf{j}}).(x_2\vec{\mathbf{i}} + y_2\vec{\mathbf{j}}) = x_1x_2 + y_1y_2 \text{ (dans } \mathcal{P}) \; (x_1\vec{\mathbf{i}}).(x_2\vec{\mathbf{i}}) = x_1x_2 \text{ (dans } \mathcal{D}) \; .$$

Rappelons que la norme d'un vecteur est donnée par

$$\|x\vec{\mathbf{i}}+y\vec{\mathbf{j}}+z\vec{\mathbf{k}}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ dans } \mathcal{E} \; , \; \|x\vec{\mathbf{i}}+y\vec{\mathbf{j}}\| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ dans } \mathcal{P} \; , \; \|x\vec{\mathbf{i}}\| = |x| \text{ dans } \mathcal{D} \; ,$$

et que la distance entre deux points M et N est donnée par d(M,N)= $\|\overrightarrow{MN}\|$.

On fera fréquemment l'abus de notation suivant. Une origine 0 étant fixée, un point de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$) sera identifié à ses coordonnées (x, y, z) (resp. (x, y), x) dans le repère $(0, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$. Un repère étant fixé on identifiera donc les objets suivants :

– l'espace $\mathcal{E}$ avec l'ensemble noté $\mathbb{R}^3$ des triplets de réels (x, y, z),
– le plan $\mathcal{P}$ avec l'ensemble noté $\mathbb{R}^2$ des couples de réels (x, y),
– la droite $\mathcal{D}$ avec l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Nous ferons de même avec les vecteurs. La notation $M(x, y, z)$ signifie que le point $M \in \mathcal{E}$ a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère $(0, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, et la notation $\overrightarrow{v}(x, y, z)$ signifie que le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$.

Dans la suite X désigne un espace, un plan ou une droite euclidienne.

1.1.1. Théorème. *Soient A, B, C trois points de X et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. On a les propriétés suivantes.*

(i) $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$ *avec égalité si et seulement si B est sur le segment $[AC]$ (première inégalité triangulaire).*

(ii) $|d(A, B) - d(B, C)| \leqslant d(A, C)$ *(deuxième inégalité triangulaire).*

(iii) $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

(iv) $| \; \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \; | \leqslant \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Démonstration. L'assertion (iv) entraîne (i) et (ii) en posant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

On a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ et l'assertion (iii) découle du fait que le cosinus d'un nombre réel est compris entre -1 et 1.

Prouvons la seconde inégalité dans (iv). On a $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$. L'inégalité (iii) entraîne que $\vec{u}.\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$. On obtient donc $(\vec{u} + \vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, c'est-à-dire $(\vec{u} + \vec{v})^2 \leqslant (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$. On conclut en prenant la racine carrée.

Prouvons la première inégalité dans (iv). Ecrivons $\|\vec{u}\| = \| -\vec{v} + (\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{v}\| + \|\vec{u}+\vec{v}\|$. On obtient $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}+\vec{v}\|$. En échangeant les rôles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a aussi $-(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|) \leqslant \|\vec{u}+\vec{v}\|$. D'où $|\ \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\ | \leqslant \|\vec{u}+\vec{v}\|$. CQFD.

1.1.2. Définition. *Soient M_o un point de X et $r>0$ un nombre réel. On appelle* boule fermée de centre M_o et de rayon r, et on note $B_f(M_o,r)$, *l'ensemble des points M de X tels que $d(M_o,M) \leqslant r$. On appelle* boule ouverte de centre M_o et de rayon r, et on note $B_o(M_o,r)$, *l'ensemble des points M de X tels que $d(M_o,M) < r$.*

Ainsi dans le plan euclidien un boule ouverte (resp. fermée) est un disque ouvert (resp. fermé) et dans la droite euclidienne une boule ouverte (resp. fermée) est un intervalle ouvert (resp. fermé). Par exemple, pour un point $M_o(x_o,y_o,z_o)$ de $\mathcal{E}$, l'inéquation définissant $B_f(M_o,r)$ est

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 \leqslant r^2 \ .$$

Pour un point $M_o(x_o)$ de $\mathcal{D}$, l'inéquation défissant $B_o(M_o,r)$ est

$$|x-x_o| < r \iff x_o - r < x < x_o + r \ .$$

En d'autres termes, $B_o(M_o,r)$ est l'intervalle ouvert $]x_o-r, x_o+r[$.

1.2. Domaines définis par des inéquations.

Dans la suite D désigne une partie (ou encore *sous-ensemble*) de X. Une partie D de $\mathcal{E}$ est appelé *domaine défini par des inéquations*, ou plus brièvement *domaine*, si le fait pour un point $M(x,y,z)$ de X d'appartenir à D est caractérisé par des conditions de la forme $f(x,y,z) < a$ ou $f(x,y,z) \leqslant a$, ou $f(x,y,z) = a$. Ici a est un nombre réel et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est un application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On définit de même la notion de domaine dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

En réalité une condition du type $g(x,y,z) > a$ ou $g(x,y,z) \geqslant a$ est aussi permise car on peut toujours l'écrire sous la forme $-g(x,y,z) < -a$ (resp. $-g(x,y,z) \leqslant -a$). De même un condition du type $f(x,y,z) < g(x,y,z)$ peut toujours se récrire $f(x,y,z) - g(x,y,z) < 0$.

Quelques remarques s'imposent.

– Il n'y a pas une unique façon de caractériser un domaine par des inégalités. Par exemple l'intervalle $]-1,1[$ de $\mathcal{D}$ est caractérisé par les conditions $x > -1$ et $x < 1$, mais il est aussi caractérisé par la condition $x^2 < 1$, ou encore $|x| < 1$, ou encore par les trois conditions $x > -1$, $x > -2$, $x < 1$ (la deuxième étant inutile).

– Le terme *domaine* n'est pas une notion bien définie dans la littérature scientifique. La définition que l'on donne ici est propre à ces notes et n'est en aucun cas universelle.

Dans la suite nous nous intéresserons beaucoup à des domaines du plan. Certains types d'inégalité ont une interprétation immédiate.

– Si a, b et c sont trois réels non simultanément nuls, l'inégalité $ax+by+c > 0$ (resp. $ax+by+c \geqslant 0$) correspond à un demi-plan ouvert (resp. fermé). Ce demi-plan est délimité par la droite $ax+by+c=0$. Pour savoir de quel côté de la droite on est, on teste la valeur de $ax+by+c$ en un point $M(x_o,y_o,z_o)$ où cette quantité ne s'annule pas. On peut aussi remarquer que le vecteur $\vec{v}(a, b)$ est un vecteur normal à la droite $ax + by + c = 0$ et qu'il *pointe* dans la direction du demi-plan $ax + by + c > 0$.

– Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application, un point $M(x, y)$ satisfait l'inégalité $y - f(x) > 0$ si, et seulement si, il se trouve au-dessus du graphe de la fonction f.

– Si a, b sont deux réels et r un réel strictement positif, l'inégalité $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 < 0$ définit le disque ouvert de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r, tandis que $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 \geqslant 0$ définit le complémentaire de ce disque ouvert.

1.3. Points Intérieurs, propriétés.

Ici X désigne une espace affine $\mathcal{E}$, un plan affine $\mathcal{P}$ ou une droite affine $\mathcal{D}$. On désigne par A une partie de X. Dans les applications A sera un domaine au sens de la section précédente.

1.3.1. Définition. *On dit qu'un point M de A est* intérieur *(où que M est* intérieur *à A) s'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(M, r)$, de centre M et de rayon r, est elle-même contenue dans A.*

Voici quelques exemples.

– Si $A = B_f(\Omega, R)$ est une boule fermée de centre Ω et de rayon R, un point M de A est intérieur si, et seulement si, il appartient à la boule ouverte $B_o(\Omega, R)$. En particulier un point sur le *bord* de A, c'est-à-dire un point de la "sphère" de centre Ω et de rayon R n'est pas intérieur.

– Si $X = \mathcal{P}$ et A est le demi-plan fermé $ax + by + c \geqslant 0$, alors les points intérieurs à A sont ceux du demi-plan ouvert $ax + by + c > 0$. Les points qui sont sur la *frontière* (ou bord) du demi-plan, c'est-à-dire sur la droite $ax + by + c = 0$ ne sont pas intérieurs.

1.3.2. Proposition. *Supposons $X = \mathcal{E}$. Soit $M_o(x_o, y_o, z_o)$ un point intérieur à A. Alors il existe un réel $a > 0$, tel que si t_1, t_2, t_3 sont des réels vérifiant $|t_1| < a$, $|t_2| < a$ et $|t_3| < a$, le point M de coordonnées $(x_o + t_1, y_o + t_2, z_o + t_3)$ appartient encore à A. On a des résultats similaires dans un plan ou une droite affine.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(M_o, r)$ est contenue dans A. Observons que l'ensemble

$$C(M_o, a) = \{M(x_o + t_1, y_o + t_2, z_o + t_3)\ ;\ |t_1| < a,\ |t_2| < a,\ |t_3| < a\}$$

est un cube de centre M_o et de rayon $2a$. Il suffit donc de choisir a tel que ce ce cube soit contenu dans $B_o(M_o, r)$. Les points les plus éloignés du centre du cube sont ses sommets (qui sont tous à la même distance). Par exemple, un de ces sommets est $S(x_o + a, y_o + a, z_o + a)$ et sa distance à M_o est $\sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Il suffit donc de prendre $a \leqslant r/\sqrt{3}$. CQFD

Exercices du chapitre 1

1. On donne des domaines par des inéquations. Les dessiner et les décrire.

(a) $M(x, y) \in D_1$ ssi $y - 2x^2 - x < 0$, $y - x > 0$, $x > 0$ et $x < 1$.

(b) $M(x, y) \in D_2$ ssi $-1 \leqslant x + y \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y - x \leqslant 1$.

(c) $M(x, y) \in D_3$ ssi $1 < x^2 + y^2 < 4$.

(d) $M(x, y) \in D_4$ ssi $x^2 + y^2 - 2(x + 2y) + 1 \leqslant 0$, $y - 2x \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$.

2. On décrit des domaines géométriquement. Les définir par des inéquations (faire systématiquement un dessin).

(a) D_1 est l'intérieur (bord compris) du triangle ABC avec les données : $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ et $C(4, 2)$.

(b) D_2 est l'ensemble des points qui sont à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$ (bord non compris) et à l'extérieur du disque fermé de centre Ω et de rayon 1, avec les données : $A(1, 0)$, $B(1, 3)$, $C(3, 5)$, $D(4, 1)$, $\Omega(2, 2)$.

3. Sans démonstrations, décrire les points intérieurs des domaines considérés dans les exercices 1 et 2.

4. Soit $R =]a, b[\times]c, d[$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par les deux conditions $a < x < b$ et $c < y < d$. Soit (x, y) un point de R. Déterminer en fonction de x et y un réel $r > 0$ tel que $D_o((x, y), r) \subset R$. En déduire que tous les points de R sont intérieurs.

2. Fonctions de plusieurs variables

2.1. Champs de scalaires, champs de vecteurs, courbes paramétrées.

Ici X est l'un des espaces affines $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$.

2.1.1. Définition. *On appelle fonction de plusieurs variables une application f d'une partie A de X dans un ensemble de la forme $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. L'ensemble A s'appelle le* domaine de définition *de f. Si l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, l'application est encore appelée* fonction numérique *ou* champ de scalaires. *Si l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, l'application est parfois appelée* fonction vectorielle *ou* champ de vecteurs.

Faisons quelques remarques importantes.

– Par souci de simplicité, nous nous sommes restreints à des fonctions d'au plus trois variables à valeurs dans un espace de dimension au plus trois. Bien sûr, on pourrait travailler avec des objets bien plus généraux.

– Dans la plupart des applications, la partie A de X sera un domaine au sens de la section 1.2.

– On peut autoriser $X = \mathcal{D}$. Si l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}$, f n'est rien d'autre qu'une fonction numérique de la variable réelle, notion bien connue des lycéens. Si l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ la fonction f s'appelle aussi un *arc paramétré* : la variable de f est vue comme une variable temporelle et la valeur vectorielle $f(t)$ représente par exemple la position d'un mobile ponctuel à l'instant t.

– Si, sans autre renseignement, la fonction f est définie par une expression donnant la valeur de $f(M)$ en fonction des coordonnées de M, le domaine des définition de f est alors par définition l'ensemble des points où cette expression a un sens. Par exemple l'application du plan affine (muni d'un repère orthonormé) dans $\mathbb{R}$ donnée par $f(M) = \sqrt{2x+y+3}$, si $M(x, y, z)$, a pour domaine de définition le demi-plan fermé $2x+y+3 \geqslant 0$.

– Nous avons décidé que, un repère orthonormé étant fixé, nous identifierions un point M à ses coordonnées. Très concrètement nous pouvons donc voir une fonction d'une ou plusieurs variables comme une application d'une partie de $\mathbb{R}^k$ ($k = 1$, 2 ou 3) dans $\mathbb{R}^l$ ($l = 1$, 2 ou 3). Ici par convention $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Bien noter que l'expression de la fonction *dépend* du choix du repère orthonormé.

2.2. Représentations graphiques, courbes de niveau.

On a appris au lycée à représenter graphiquement une fonction réelle définie sur une partie de $\mathbb{R}$. Il n'existe aucune solution évidente pour représenter graphiquement une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$. Le cas d'une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ se prête lui a des représentations pratiques.

Soit $f : A \subset \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A du plan $\mathcal{P}$. Fixons un repère orthonormé $(0, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ d'un espace affine à trois dimension $\mathcal{E}$. On appelle *représentation graphique* de f, ou *surface représentative* de f l'ensemble S_f des points de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, f(x, y))$, où (x, y) décrit l'ensemble des coordonnées possibles d'un point de A. On dit aussi que S_f est la *surface d'équation* $z = f(x, y)$.

Regardons par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto ax + by + c$, a, b et c étant des réels fixés. La surface S_f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, ax + by + c)$, x et y décrivant $\mathbb{R}$. C'est le plan affine d'équation $z = ax + by + c$.

Soit k un nombre réel. Avec les notations précédentes, on appelle *courbe de niveau* k de la fonction f l'ensemble des points $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées vérifient $f(x, y) = k$. C'est l'image réciproque par f du singleton $\{k\}$·

Donnons deux exemples. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction donnée par $f(x, y) = 2x + y$, ses courbes de niveau sont les droites $2x + y = k$, $k \in \mathbb{R}$. Elles formes une partition du plan en droites affines parallèles.

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2$, ses courbes de niveau sont les ensembles $C_k = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 = k\}$, $k \in \mathbb{R}$. Si $k < 0$, C_k est vide, si $k = 0$, C_k est réduit à l'origine, et si $k > 0$, C_k est le cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{k}$.

De manière générale, on peut faire les observations suivantes.

– La courbe de niveau k est non vide si, et seulement si, k appartient à l'image de f.

– Les courbes de niveaux k et l ne se coupent pas si $k \neq l$.

– Les courbes de niveau pour un paramètre appartenant à l'image de f forment une partition de l'ensemble de départ A. En d'autres termes par un point M de A passe une courbe de niveau et une seule : celle de niveau $f(M)$.

– Notons C_k la courbe de niveau k de f et notons C'_k la courbe de l'espace obtenue *en remontant* C_k *à l'altitude* k. Alors la représentation graphique S_f est la réunion des C'_k, pour k parcourant l'image de f.

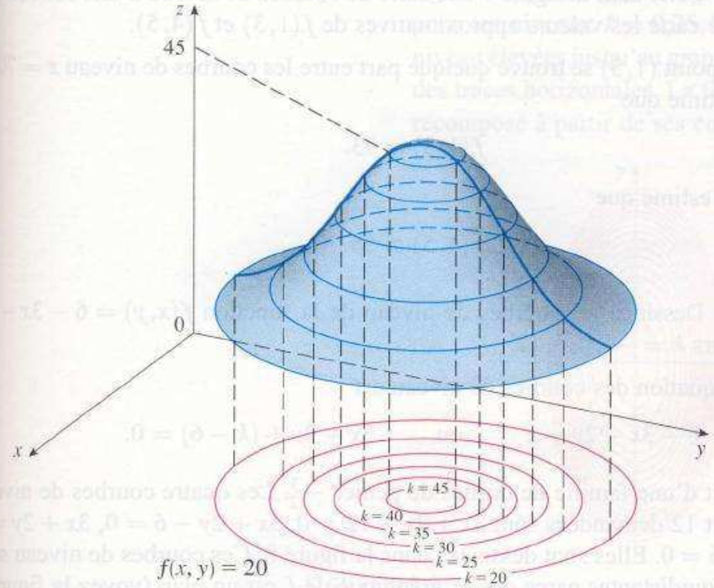


FIGURE 4

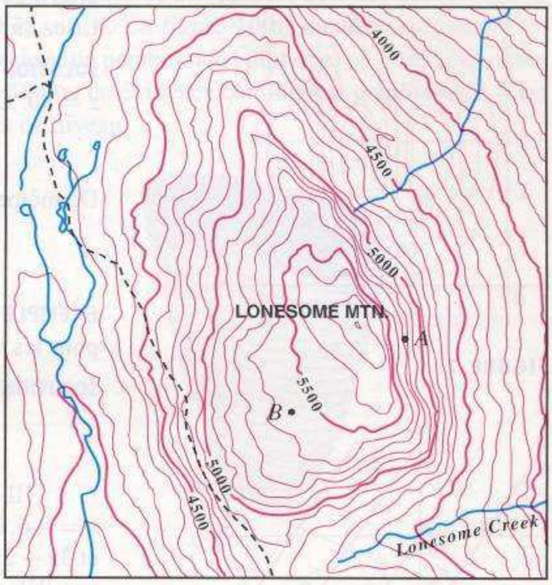


FIGURE 5

L'exemple le plus familier de courbes de niveau est celui des cartes topographiques des régions montagneuses, comme la carte de la figure 5. Les courbes de niveau sont des courbes d'altitude constante au-dessus du niveau de la mer. Si vous marchez à la verticale de ces courbes, vous ne montez ni ne descendez. Un autre exemple très commun est la fonction de température présentée ci-dessous. Les courbes de niveau dans ce contexte sont appelées des courbes **isothermales**. Elles joignent des points de même température. La figure 6 montre une carte météorologique du monde sur laquelle figurent des températures moyennes en janvier. Les isothermes sont les courbes qui séparent les zones de couleurs différentes.

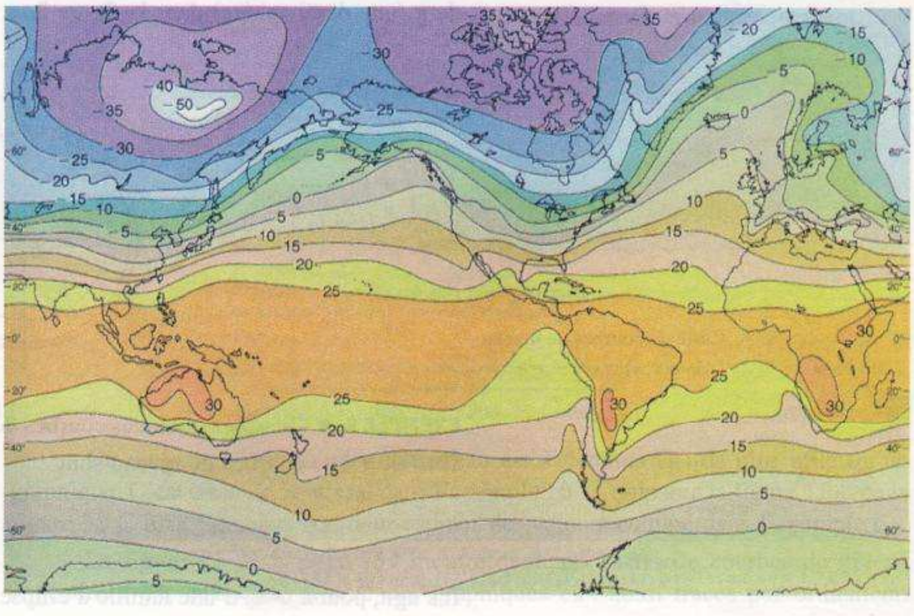
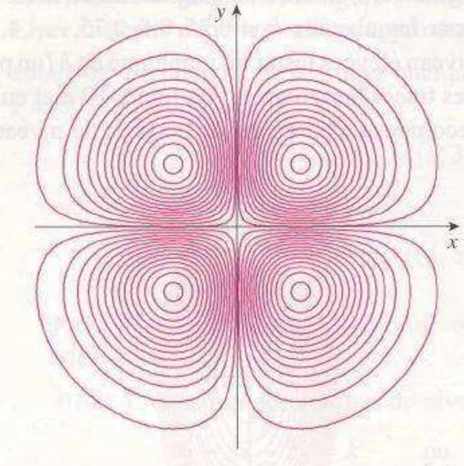
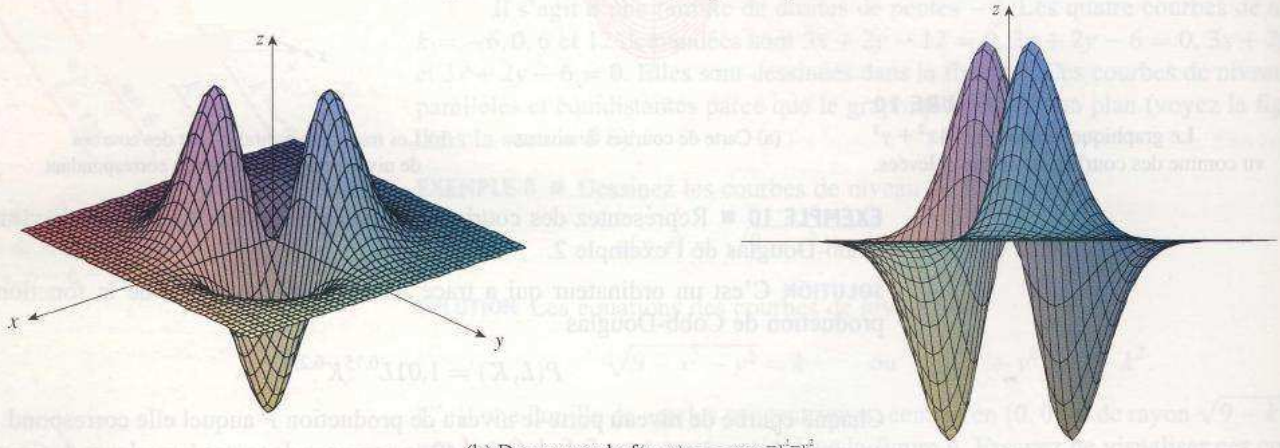


FIGURE 6

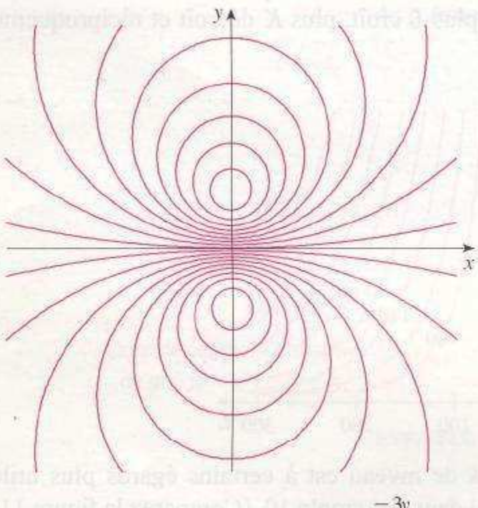
Les températures mondiales moyennes au niveau de la mer en degrés Celsius



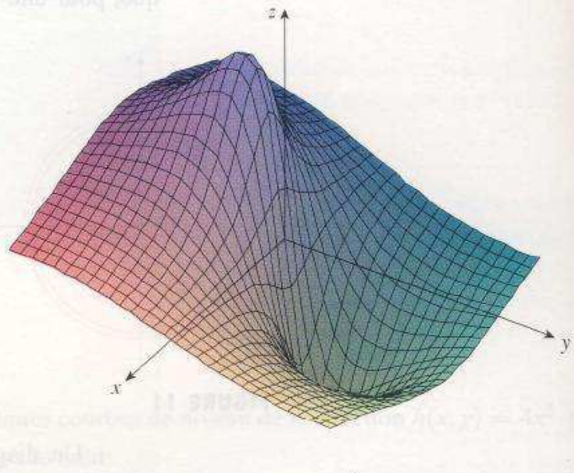
(a) Courbes de niveau de $f(x,y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Deux vues de $f(x,y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(c) Courbes de niveau de $f(x,y) = \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$



(d) $f(x,y) = \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$

FIGURE 12

2.3. Limites et continuité.

Ici A désigne une partie de $X = \mathcal{D}$, $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$, et Y est l'un des espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

2.3.1. Définition. *Soient $f : A \longrightarrow Y$ une application, M_o un point de X et Y_o un point de Y. On dit que f admet la limite Y_o en M_o, ou encore que $f(M)$ tend vers Y_o quand M tend vers M_o, si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\textit{si } M \in A \textit{ et } d(M, M_o) \leqslant \alpha \textit{ alors } d(f(M), Y_o) \leqslant \varepsilon \ .$$

En d'autres termes, on doit pouvoir rendre la distance de $f(M)$ à Y_o arbitrairement petite quitte à prendre M suffisament proche de M_o. On utilise la notation :

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = Y_o \ .$$

On montre facilement l'équivalent suivante. Avec les notations précédentes :

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = Y_o \text{ si et seulement si } \lim_{M \to M_o} d(f(M), Y_o) = 0 \ .$$

Exemples. 1) Soit O un point de $\mathcal{P}$ et considérons la fonction $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto d(O, M)$. En coordonnées (avec un repère orthonormé centré en O), on a $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Alors pour tout point M_o de $\mathcal{P}$, on a

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = d(0, M_o) \ .$$

En effet, on a

$$d(f(M), d(O, M_o)) = |d(O, M) - d(O, M_o)| \leqslant d(M_o, M) \ ,$$

par la deuxième inégalité triangulaire. Donc pour avoir $d(f(M), d(O, M_o)) \leqslant \varepsilon$, il suffit de prendre $d(M, M_o) \leqslant \varepsilon$, i.e. choisir $\alpha = \varepsilon$.
2) Donnons un exemple de fonction n'admettant pas de limite en un point particulier. Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \ .$$

Alors f n'admet pas de limite en $O = (0, 0)$. En effet pour chaque paramètre $t \in \mathbb{R}$, notons D_t la droite d'équation $y = tx$. En un point (x, tx) de D_t différent de l'origine, la valeur de la fonction est $f(x, tx) = \dfrac{t}{1 + t^2}$, valeur qui ne dépend pas de x. Donc f prend une valeur constante sur chaque droite D_t. On voit facilement que si la limite de f existait, elle devrait valoir $t/(1 + t^2)$ quel que soit t dans $\mathbb{R}$, ce qui est impossible.

Le théorème suivant permet de se ramener systématiquement au cas où l'espace d'arrivée est de dimension 1.

2.3.2. Théorème. *Supposons par exemple $Y = \mathbb{R}^3$. Soient $f : A \subset X \longrightarrow Y$ une application, M_o un point de X et $Y_o \in \mathbb{R}^3$. Pour chaque $M \in A$, notons $f_x(M)$, $f_y(M)$*

et $f_z(M)$ les coordonnées de $f(M)$. Notons x_o, y_o et z_o les coordonnées de Y_o. Alors l'assertion $\lim_{M\to M_o} f(M) = Y_o$ est équivalente à :

$$\lim_{M\to M_o} f_x(M) = x_o \text{ et } \lim_{M\to M_o} f_y(M) = y_o \text{ et } \lim_{M\to M_o} f_z(M) = z_o \ .$$

Démonstration admise.

2.3.3. Théorème. (**Limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient**) *Soient f et g deux applications de $A \subset X$ dans $\mathbb{R}$ et M_o un point de X. Supposons que*

$$\lim_{M\to M_o} f(M) = l_1 \text{ et } \lim_{M\to M_o} g(M) = l_2 \ .$$

Alors la fonction produit fg tend vers $l_1 l_2$ quand M tend vers M_o et la fonction somme $f+g$ tend vers $l_1 + l_2$ dans M tend vers M_o. Supposons de plus que g ne s'annule pas sur A et que $l_2 \neq 0$. Alors la fonction quotient f/g tend vers l_1/l_2 quand M tend vers M_o.

Démonstration admise.

2.3.3. Théorème. (**Théorème des Gendarmes.**) i) *Soient f, g et h trois fonctions de A dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité*

$$g(M) \leqslant f(M) \leqslant h(M) \text{ pour tout } M \in A \ .$$

Soit M_o un point de X en lequel les limites de g et h existent et sont égales à un même réel l. Alors la limite de f en M_o existe et vaut l.
ii) *Soient f et g deux fonctions de A dans $\mathbb{R}$ telles que $|f(M)| \leqslant g(M)$, pour tout $M \in A$. Soit M_o un point de X. Alors si f tend vers 0 lorsque M tend vers M_o, il en est de même de f.*

Démonstration admise. (Noter tout de même que le deuxième point est une conséquence facile du premier).

Exemples d'applications du théorème. 1) Supposons par exemple $X = \mathbb{R}^3$. Alors l'applications coordonnée $f : M = (x,y,z) \mapsto x$ tend vers x_o lorsque $M = (x,y,z)$ tend vers (x_o, y_o, z_o). En effet, on a $d(f(M), x_o) = |x - x_o|$. Or on a l'inégalité évidente suivante :

$$|x - x_o|^2 = (x - x_o)^2 \leqslant (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 \ ,$$

qui donne

$$|x - x_o| \leqslant \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2} \ ,$$

c'est-à-dire $0 \leqslant d(f(M), x_o) \leqslant d(M, M_o)$. Puisque $\lim_{M\to M_o} d(M, M_o) = 0$, on conclut avec le théorème des Gendarmes. On a un résultat similaire pour les autres coordonnées. (Noter cependant que l'usage du théorème des Gendarmes est ici artificiel et que l'on conclut aussi vite avec la définition première de la limite).

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application donnée par $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$. De l'inégalité évidente $0 \leqslant (x \pm y)^2$, on tire en développant $\pm 2xy \leqslant x^2 + y^2$, c'est-à-dire $|2xy| \leqslant x^2 + y^2$.

Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}| \leqslant 1$, et donc $|f(x,y)| \leqslant |y|$. Par l'exemple précédente, on sait que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$. On conclut par le théorème des Gendarmes.

2.3.4 Théorème. (**Limite d'une fonction composée**) *Soient $f : A \longrightarrow Y$ une application à valeurs dans $Y = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et $g : B \subset Y \longrightarrow Z$ une application d'une partie B de Y dans $Z = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Supposons que l'image de f est incluse dans B, de sorte que la fonction composée $g \circ f$ est bien définie. Soit X_o un point de A. Supposons que la limite de f en X_o existe et vaut Y_o et que la limite de g en Y_o existe et vaut Z_o. Alors, la limite de $g \circ f$ en X_o existe et vaut Z_o.*

Démonstration admise.

Exemple. Soit $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application donnée par $f(x,y) = \cos[\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}]$. Alors f est la composée de la fonction f de l'exemple 2 du théorème (2.3.3) et de la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos t$. De

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \text{ et} \lim_{t\to 0} \cos t = 1 \ ,$$

on déduit que la limite de F en $(0,0)$ existe et vaut 1.

2.3.5. Définition. *Soient $f : A \longrightarrow Y$ une application, M_o un point de A. On dit que f est continue en M_o si $\lim\limits_{M\to M_o} f(M) = f(M_o)$. On dit que f est continue sur A si f est continue en chaque point de A.*

Exemples 1) Une fonction numérique constante est continue.
2) Soit $O \in \mathcal{E}$ un point fixé. La fonction $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto d(0,M)$ est continue sur $\mathcal{E}$.
3) Les fonction coordonnées dans un repère orthonormée sont continues partout. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les trois fonctions $(x,y,z) \mapsto x$, $(x,y,z) \mapsto y$, $(x,y,z) \mapsto z$, sont continues sur $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Le théorème suivant montre comment se ramener systématiquement au cas d'un fonction numérique.

2.3.6. Théorème. Supposons par exemple $X = \mathbb{R}^3$. Soit $f : A \longrightarrow X$ une application dont les composantes sont données par $f_x(M)$, $f_y(M)$ et $f_z(M)$. Soit M_o un point de A. Alors f est continue en M_o si et seulement si les trois fonctions numériques f_x, f_y et f_z sont continues en M_o.

2.3.7. Théorème (**Composée, somme, produit et quotient de fonctions continues**) i) *Soient f, g deux fonctions d'une partie A de X dans $\mathbb{R}$ et M_o un point de A. Supposons f et g continues en M_o Alors $f+g$ et fg sont continues en M_o. Si de plus g ne s'annule pas sur A, le fonction f/g est continue en M_o.*
ii) *Soient $f : A \longrightarrow Y$ une application à valeurs dans $Y = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et $g : B \subset Y \longrightarrow Z$ une application d'une partie B de Y dans $Z = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Supposons que l'image de f est incluse dans B, de sorte que la fonction composée $g \circ f$ est bien définie. Soit M_o un point de A. Alors si f est continue en M_o et g est continue en $f(M_o)$, la composée $g \circ f$ est continue en M_o.*

Démonstration. Elle découle immédiatement des théorèmes portant sur la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée.

Supposons par exemple $X = \mathbb{R}^3$. On appelle fonction (numérique) *polynomiale* une fonction obtenue en faisant des sommes de *monômes*, c'est-à-dire de fonctions de la forme $ax^l y^m z^n$, $a \in \mathbb{R}$ étant une constante et l, m, n des entiers positifs. En d'autres termes, une fonction polynomiale s'obtient à partir des fonctions coordonnées en faisant des sommes et des produits. Par exemple $f(x, y, z) = x^2 + 2xyz^3 + 5y^2 z$ est polynomiale. Une fonction numérique est dite *fraction rationnelle* s'il elle s'obtient comme quotient de deux fonctions polynomiales.

Comme corollaire du théorème précédent, nous avons le résultat important suivant.

2.3.8. Théorème. *Soit $f : A \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est polynomiale elle est partout continue. De même si f est une fraction rationnelle, elle ext continue sur tout son domaine de définition.*

Les théorèmes (2.3.6), (2.3.7) et (2.3.8) permettent de construire ou reconnaître comme telles la plupart des fonctions continues que nous aurons à traiter.

2.4. Domaines fermés, ouverts. Domaines bornés, compacts.

Ici X désigne un des espaces affine $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$. Soit D un domaine de X au sens de la section (1.2), c'est-à-dire une partie définie par des inégalités strictes ou larges ou des égalités.

2.4.1. Définition. *Le domaine D sera dit* fermé *si on peut le définir avec des conditions de la forme $f(M) \geqslant 0$, où f est une fonction continue définie sur X tout entier. Il sera dit* ouvert *si on peut le définir avec des conditions de la forme $f(M) > 0$, où f est une fonction continue définie sur X tout entier.*

Exemples. Le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x, y)\,; x+y \leqslant 0 \text{ et } x^2+y^2 \geqslant 1\}$ est fermé. En effet les inégalités sont larges et les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x + y) \mapsto x^2 + y^2$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$. L'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon R est ouvert car défini par l'inégalité $d(O, M) < R$, où $M \mapsto d(0, M)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Une boule ouverte d'un espace euclidien est ouverte au sens de (2.4.1). De même une boule fermée d'une espace euclidien est fermée au sens de cette même définition.

Notons que $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$) est un domaine à la fois ouvert et fermé de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$). Par exemple $\mathcal{P}$ est, après le choix d'un système de coordonnées, le domaine fermé défini par l'équation $x^2 + y^2 \geqslant 0$. C'est aussi le domaine ouvert défini par l'équation $x^2 + y^2 + 1 > 0$.

Faisons les remarques importantes suivantes.

– Il existe en mathématiques une notion beaucoup plus générale de partie ouverte ou fermée dans un espace euclidien. Notre définition est *ad hoc*, taillée sur mesure pour les applications que nous avons en vue ; elle n'est pas satisfaisante d'un point de vue théorique.

– Un domaine peut par exemple être fermée bien que définissable par des conditions contenant une inégalité stricte. Par exemple, la partie D définie par $x^2 + y^2 \geqslant 1$ et

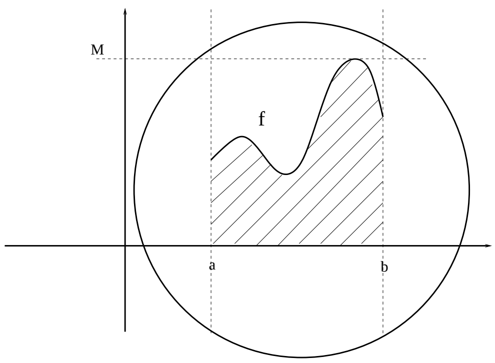
$x+y<4$ est fermée. En effet le disque fermé $x^2+y^2 \geqslant 1$ est contenue dans le demi-plan ouvert $x^2+y^2<4$, de sorte que notre domaine est le disque fermé unité. La condition de la défintion doit être bien comprise : il doit exister une caractérisation de D par des inégalités larges faisant intervenir des fonctions continues.

2.4.2. Théorème. *Soit D un domaine ouvert de X. Alors tout point de D est intérieur.*

Démonstration admise.

2.4.3. Définition. *Un domaine est dit* borné *s'il peut être inclus dans une boule de rayon fini R. Un domaine est dit* compact *s'il est fermé et borné.*

Exemples. 1) Une boule fermé est compacte.
2) Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors la partie D de $\mathbb{R}^2$ située en-dessous du graphe de f, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droite $x=a$ et $x=b$ est un domaine compact. En effet, tout d'abord D est un domaine car il est défini par les inégalités larges $x \geqslant a$, $x \leqslant b$, $y \geqslant 0$ et $f(x)-y \geqslant 0$. Nous savons que les fonctions coordonnées sont continues. De plus la fonction $(x, y) \mapsto f(y)$ est continue car composée de fonctions continues. Il s'ensuit que les fonctions définissant D sont continues : D est fermé. Soit M le maximum de f sur $[a, b]$ (qui existe car f est continue et $[a, b]$ compact). Alors D est contenu dans le rectangle $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant M$, qui lui-même peut être inclus dans un disque de rayon fini. Ainsi D est borné, et donc compact.



Exercices du chapitre 2

1. a) Déterminer les courbes de niveau de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$. Tracer l'allure de quelques unes de ces courbes sur un graphique.

b) Courbes de niveau de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1} \ .$$

i) Déterminer la courbe de niveau 0. Montrer que la courbe de niveau $k \neq 0$ a pour équation :

$$x^2 + (y + \frac{3}{2k})^2 = \frac{9-4k^2}{4k^2} \ .$$

En déduire que la courbe de niveau $k \neq 0$ est soit vide, soit un cercle dont on précisera le rayon et le centre.
ii) Tracer sur un graphique les courbes de niveau k, pour les valeurs suivantes (on pourra se servir d'une calculatrice) :

$$k = -1,5 \ ; \ -1,2 \ ; \ -0.9 \ ; \ -0,6 \ ; \ -0,3 \ ; \ ; 0 \ ; \ 0,3 \ \ 0,6 \ ; \ 0,9 \ ; \ 1,2 \ ; \ 1,5 \ .$$

Quelle est l'image de f ? Quelles sont la plus grande et plus petite des valeurs prises par f ?

c) Déterminer les courbes de niveau et l'image de la fonction définie par $f(x,y) = \sin(x+y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. a) Quel est le domaine de définition de la fonction donnée par

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}} \ .$$

b) Déterminer les lignes de niveau et l'image de f. Tracer quelques lignes de niveau sur un graphique.

3. Quel est le domaine de définition D de la fonction donnée par

$$f(x,y) = \ln(x + 2y + 1) + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ ?$$

Le représenter sur un graphique.

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ .$$

a) Déterminer les lignes de niveau et l'image de f. Tracer quelques lignes de niveau sur un graphique. Au vu de ce graphique, pensez-vous que la limite de f en $(0,0)$ existe ?
b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos 2\theta$.
c) Supposons par l'absurde que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ existe. Obtenez une contradiction en calculant de deux façons différentes $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, pour plusieurs valeurs de θ.

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \ .$$

Calculer $\lim\limits_{t\to 0} f(t^2, t)$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to 0}(t, at)$. La fonction f possède-t-elle une limite en $(0,0)$?

6. Soit f la fonction définie sur le plan privé de la droite d'équation $y = x$ par la formule

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \ .$$

a) En utilisant la formule

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\ ,$$

montrer que pour tout $x_o \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,x_o)} f(x,y) = \cos x_o\ .$$

b) Montrer que la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ \cos x & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Donner une majoration de $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|$ qui ne dépend que de r. En déduire à l'aide du théorème des Gendarmes que f est continue en $(0,0)$.

3. Dérivation

3.1. Dérivées partielles en un point intérieur au domaine.

Pour fixer les idées, nous supposons que l'espace de départ est $\mathbb{R}^3$. En dimension 2 les choses sont similaires. En dimension 1 la notion de dérivée partielle n'apportera rien de nouveau. Rappelons que dans un espace affine de dimension 3, une fois fixé un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, on peut voir une fonction d'un point comme un fonction des trois variables de coordonnées x, y et z.

Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$ et $M_o = (x_o, y_o, z_o)$ un point *intérieur* à D. Supposons f à valeurs dans $Y = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Puisque M_o est intérieur à D, pour $a > 0$ réel assez petit, un point de la forme (x, y_o, z_o), $|x - x_o| < a$ est encore dans D. Ceci nous permet de considérer l'application

$$g\ :\ ]x_o - a, x_o + a[\longrightarrow Y\ ,\ x \mapsto f(x, y_o, z_o)\ .$$

De façon imagée, f est la fonction d'une variable obtenue de f en "gelant" les variables y et z. On dit que f *admet une dérivée partielle en la variable x au point M_o* si la fonction g est dérivable en x_o. La valeur de cette dérivée partielle est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) = g'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x, y_o, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{x - x_o}\ .$$

On définit de même l'existence et les valeurs des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)$ au point M_o et en les variables y et z respectivement.

Exemples. 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2y + \sin y$. Alors les dérivées partielles de f existent en tout point $M_o = (x_o, y_o)$ de $\mathbb{R}^2$ et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = 2x_oy_o \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \cos y_o \ .$$

2) Si f est une fonction d'une seule variable, la dérivée partielle en cette unique variable se confond avec la dérivée habituelle, sauf que nous permettons à l'espace d'arrivée d'être un des espaces $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est la fonction donnée par $f(t) = (2t, t^2 + 1, \sin t)$ et si $t_o \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} = (2, t + t_o, \frac{\sin t - \sin t_o}{t - t_o})$$

de sorte que la dérivée en t_o existe et vaut

$$f'(t_o) = \frac{df}{dt}(t_o) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_o) = (2, 2t_o, \cos t_o) \ .$$

Les dérivées partielles ont l'interprétation géométrique suivante dans le cas de deux variables. Traitons par exemple le cas de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$. L'intersection du graphe de la fonction f (une surface) avec le plan $y = y_o$ donne une courbe qui est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x, y_o)$. Alors la quantité $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ est la pente de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = x_o$.

Lorsque D est ouvert et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_o)$ existe pour tout point M_o de D, on dit que f admet une dérivée partielle en la variable x sur D. La fonction obtenue est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On trouve aussi les notations suivantes :

$$f'_x \quad D_xf \quad \partial_xf \quad \partial_1f \ .$$

Ici l'indice 1 dans ∂_1 signifie que l'on dérive par rapport à la première variable.

Notons que dans la littérature, on rencontre souvent la notation abusive $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ pour désigner la dérivée partielle en la variable x au point (x, y, z). Cette notation est à éviter dans un premier temps car elle utilise x à la fois comme variable muette et véritable variable.

Le résultat suivant nous permettra de nous ramener systématiquement au cas où l'espace d'arrivée est de dimension 1, c'est-à-dire au cas où f est une fonction numérique.

3.1.1. Théorème. *Supposons pour fixer les idées que l'espace d'arrivée est $Y = \mathbb{R}^3$. Pour $M \in D$ notons $X(M)$, $Y(M)$ et $Z(M)$ les composantes du vecteur $f(M)$. Soit M_o un point intérieur à D. Alors la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_o)$ existe si, et seulement si, les trois dérivées partielles*

$$\frac{\partial X}{\partial x}(M_o) \ , \ \frac{\partial Y}{\partial x}(M_o) \ , \ \frac{\partial Z}{\partial x}(M_o)$$

existent. Si c'est le cas on a de plus l'égalité :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_o) = \Big(\frac{\partial X}{\partial x}(M_o), \frac{\partial Y}{\partial x}(M_o), \frac{\partial Z}{\partial x}(M_o)\Big) \ .$$

Le cas particulier $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est intéressant : c'est le cas d'un arc paramétré dans le plan ou l'espace. Dans ce cas-là , les domaines qui nous intéresseront sont de la forme $D =]a, b[$ ou $D = \mathbb{R}$. Une fonction $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (X(t), Y(t), Z(t))$ est dérivable en $t_o \in]a, b[$ si les trois fonctions X, Y et Z le sont et si c'est le cas, on a :

$$f'(t_o) = (X'(t_o), Y'(t_o), Z'(t_o))$$

Si f représente la position d'un mobile ponctuel à l'instant t, $f'(t_o)$ quand il existe s'appelle le *vecteur vitesse* à l'instant t.

Exemple. Lancer d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme. On fixe un repère orthonormé $(0, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{k}})$ d'un plan vertical. On suppose que l'origine 0 est au niveau du sol. On lance un projectile de masse m (supposé ponctuel) depuis le point 0 avec une vitesse initiale $\vec{v}_o$. On suppose que ce vecteur vitesse est de norme v_o et fait un angle de θ avec le vecteur $\vec{\mathbf{i}}$. Si $(x(t), z(t))$ désigne la position du projectile à l'instant t, on trouve les expressions :

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + tv_o \cos\theta \quad , \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + tv_o \sin\theta \ .$$

Les dérivées sont $x'(t) = -gt + v_o \cos\theta$ et $z'(t) = -gt + v_o \sin\theta$, et le vecteur vitesse à l'instant t est donné par

$$v(t) = (-gt + v_o \cos\theta, -gt + v_o \sin\theta) \ .$$

Exercice. A quel instant t la vitesse du projectile est-elle parallèle à l'axe des x ? A quelle distance de O, va-t-il retomber ? Quelle est l'altitude maximale du projectile lors de sa trajectoire ?

3.1.2. Théorème (Développement limité à l'ordre 1**).** *Supposons $X = \mathcal{E}$ pour fixer les idées. Soit f une fonction d'un domaine ouvert D de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ et $M_o(x_o, y_o, z_o)$ un point de D. Supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ existent sur D et sont continues en M_o. Choisissons un réel $R > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(M_o, R)$ soit contenue dans D. Alors on a l'écriture :*

$$f(M) = f(M_o) + (x - x_o)\frac{\partial f}{\partial x}(M_o) + (y - y_o)\frac{\partial f}{\partial y}(M_o) + (z - z_o)\frac{\partial f}{\partial z}(M_o) + \|\overrightarrow{M_oM}\|\varepsilon(\overrightarrow{M_oM})$$

quel que soit $M \in B_o(M_o, R)$, où $\varepsilon : \{\vec{v}\ ; \|\vec{v}\| < R\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui tend vers 0 quand le vecteur $\vec{v}$ tend vers $\vec{0}$. On a une formule similaire en dimension 2.

Démonstration admise.

Remarque. Noter que les hypothèses sont plus fortes que dans le théorème similaire portant sur les fonctions d'une seule variable, où l'on a l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en un réel x_o dès que $f'(x_o)$ existe.

Exemples. 1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Alors les dérivées partielles existent sur tout $\mathbb{R}^2$ et sont partout continues. Elles sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = 2x_o \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 2y_o \ .$$

Le développement limité à l'ordre 1 s'écrit donc :

$$x^2 + y^2 = x_o^2 + y_o^2 + 2x_o(x - x_o) + 2y_o(y - y_o) + \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}\varepsilon(x - x_o, y - y_o)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Une autre façon pratique d'écrire ce développement est d'introduire des variables d'accroissement h et k telles que $x = x_o + h$ et $y = y_o + k$. On obtient :

$$(x_o + h)^2 + (y_o + k)^2 = x_o^2 + y_o^2 + 2x_o h + 2y_o h + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k) \ ,$$

pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Pour vérifier le théorème, on peut calculer ε explicitement. On trouve

$$\varepsilon(h, k) = \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} = \|(h, k)\| \ ,$$

qui tend bien vers 0 lorsque (h, k) tend vers $(0, 0)$.
2) Soit f la fonction définie sur le complémentaire D de la droite $1+x+y = 0$ (D peut par exemple être défini par l'inéquation $(1 + x + y)^2 > 0$), donnée par $f(x, y) = \dfrac{1 + x - y}{1 + x + y}$.
Alors ses dérivées partielles existent et sont continues sur tout D. Elles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = \frac{2v}{(1 + u + v)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = -2\frac{1 + u}{(1 + u + v)^2} \ .$$

En particulier $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -2$. Le développement limité à l'ordre 1 en $(0, 0)$ est donc donné par :

$$f(x, y) = 1 - 2y + \sqrt{x^2 + y^2}\varepsilon(x, y) \ .$$

Ici (x, y) doivent varier dans un disque ouvert de centre O contenu dans D, i.e. de rayon $R < \sqrt{2}/2$.

3.1.3. Proposition. (**Dérivation d'une somme d'un produit d'un quotient**.) *Soient D un domaine de X et M_o un point intérieur à X. Soient f, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions numériques dont les dérivées partielles en M_o existent. Alors $f + g$ et fg admettent des dérivées partielles en M_o et on a par exemple :*

$$\frac{\partial(f + g)}{\partial x}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o) + \frac{\partial g}{\partial x}(M_o) \ , \ \frac{\partial(fg)}{\partial x}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)g(M_o) + f(M_o)\frac{\partial g}{\partial x}(M_o) \ .$$

Si de plus, g ne s'annule pas sur D, on a

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(M_o) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(M_o)g(M_o) - f(M_o)\frac{\partial g}{\partial x}(M_o)}{g(M_o)^2} \ .$$

Démonstration. Comme dans le cas classique d'un fonction d'une variable : les arguments sont strictements les mêmes.

3.1.4. Proposition. *Soit D un domaine ouvert de X. Alors les applications coordonnées admettent des dérivées partielles continues (et même constantes) sur tout D. Une application numérique polynomiale $D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles continues (et* *même encore polynomiales) sur tout D. Une fraction rationnelle définie sur D admet des dérivées partielles continues (et même encore rationnelles) sur tout D.*

Démonstration. La proposition découle de la proposition précédente. En effet les fonctions polynomiales ou rationnelles s'obtiennent des applications coordonnées par la formation de sommes, produits ou quotients.

Cette proposition donne déjà un stock conséquent de fonctions numériques admettant des dérivées partielles continues. Nous verrons plus loin comment élargir ce stock par la composition des fonctions.

3.2. Gradient et Dérivée dans une direction. Fonctions constantes.

Dans cette section, nous travaillons avec une fonction numérique f définie sur un domaine ouvert D de $X = \mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$. On supposera que f admet des dérivées partielles continues sur D tout entier, de sorte que l'on a un développement limité à l'ordre 1 en tout point de D. Pour fixer les idées, on supposera que $X = \mathcal{E}$, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$.

Soient $\vec{v}$ un vecteur de $\mathcal{E}$ et t un réel. Si $M \in \mathcal{E}$, la notation $M + t\vec{v}$ désigne l'unique point N de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MN} = t\vec{v}$. Autrement dit $M + t\vec{v}$ désigne le point N obtenu de M par la translation de vecteur $t\vec{v}$.

3.2.1. Définition. (**Vecteur gradient**) *Soit M un point de D. On appelle* gradient de f en M, *et l'on note* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_M$, *le vecteur*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M)\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}(M)\vec{\mathbf{k}} \ .$$

La fonction vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) : M \mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_M$ est appelée le gradient *de f ou* le champ de gradients *attaché à f. C'est une fonction vectorielle continue.*

Le gradient permet de récrire le développement limité à l'ordre 1 de f en un point $M(x_o, y_o, z_o)$ de D de façon plus géométrique. Soit $(h, k, l) \in \mathbb{R}^3$ tel que le point M de coordonnées $(x_o + h, y_o + k, z_o + l)$ appartienne encore à D. On passe du point M_o au point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Delta M} = (h, k, l) : M = M_o + \overrightarrow{\Delta M}$. La partie linéaire du développement limité en M_o peut s'écrire comme un produit scalaire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)k + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)l = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{M_o}.\overrightarrow{\Delta M} \ .$$

Le développement limité à l'ordre 1 en M_o s'écrit donc :

$$f(M_o + \overrightarrow{\Delta M}) = f(M_o) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{M_o}.\overrightarrow{\Delta M} + \|\overrightarrow{\Delta M}\|\varepsilon(\overrightarrow{\Delta M}) \ ,$$

où la fonction ε tend vers 0 lorsque son argument tend vers le vecteur nul.

3.2.2. Définition. (**Différentielle**) *On appelle* différentielle *de f au point $M_o \in D$, et on note df_{M_o}, l'application qui à un vecteur (h, k, l) de $\mathbb{R}^3$ associe l'expression linéaire en h, k et l donnée par :*

$$df_{M_o}(h, k, l) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)k + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)l \ .$$

En d'autre termes, la différentielle donne la partie linéaire du développement limité de f à l'ordre 1 en M_o.

Pour des raisons historiques remontant au mathématicien allemand Leibniz (1646–1716), une variation du point M_o, $\overrightarrow{\Delta M} = h\vec{\mathbf{i}} + k\vec{\mathbf{j}} + l\vec{\mathbf{k}}$, se note $\overrightarrow{dM} = dx\vec{\mathbf{i}} + dy\vec{\mathbf{j}} + dz\vec{\mathbf{k}}$. On pense intuitivement aux variables numériques dx, dy et dz comme à des *infiniments petits.* De nos jours, les mathématiciens ne fondent plus l'analyse à une ou plusieurs variables sur les infiniment petits. Cependant on continue d'utiliser les notations de Leibniz car elles sont intuitives et pratiques pour le calcul.

Le lien entre la différentielle et le gradient est donnée par

$$df_{M_o} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)dz = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{M_o}.\overrightarrow{dM}\ ,\ dx,\ dy,\ dz \in \mathbb{R}$$

Remarque. Le gradient, tel qu'on l'a défini, semble dépendre du choix du repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$. En fait on peut montrer qu'il n'en est rien. Il dépend en revanche du choix d'un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. Ceci est sans conséquence car le produit scalaire sera toujours fixé une fois pour toute.

3.2.3. Proposition–Définition. (**Dérivée dans une direction**) i) *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur le domaine ouvert D et admettant des dérivées partielles continues sur D. Soient $\vec{v}$ un vecteur de $\mathcal{E}$ et M_o un point de D. Alors la limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(M_o + t\vec{v}) - f(M_o)}{t}$$

existe et s'appelle la dérivée de f en M_o dans la direction $\vec{v}$. *On la note $D_{\vec{v}}f(M_o)$.*
ii) *Supposons $\vec{v}$ de coordonnées (v_x, v_y, v_z). On a les égalités :*

$$D_{\vec{v}}f(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)v_y + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)v_z = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{M_o}\ .\ \vec{v}\ .$$

En particulier on a

$$D_{\vec{\mathbf{i}}}f(M_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)\ ,\ D_{\vec{\mathbf{j}}}f(M_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)\ , D_{\vec{\mathbf{k}}}f(M_o) = \frac{\partial f}{\partial z}(M_o)\ .$$

Démonstration. Le développement limité de f en M_o à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(M_o + \overrightarrow{\Delta M}) = f(M_o) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{M_o}.\overrightarrow{\Delta M} + \|\overrightarrow{\Delta M}\|\varepsilon(\overrightarrow{\Delta M})\ ,$$

où $\varepsilon(\overrightarrow{\Delta M})$ tend vers 0 avec le vecteur $\overrightarrow{\Delta M}$. En substituant $t\vec{v}$ à $\overrightarrow{\Delta M}$, avec t assez petit pour que $M_o + t\vec{v}$ soit dans D, on obtient :

$$f(M_o + t\vec{v}) = f(M_o) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}f_{M_o}.(t\vec{v}) + \|t\vec{v}\|\varepsilon(t\vec{v})\ .$$

On tire :

$$\frac{f(M_o + t\vec{v}) - f(M_o)}{t} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f_{M_o}.\vec{v} + \frac{|t|}{t}\|\vec{v}\|\varepsilon(t\vec{v})\ ,\ t \neq 0\ .$$

L'expression $\frac{|t|}{t}\|\vec{v}\|$ est bornée (vaut $\pm\|\vec{v}\|$) tandis que la fonction $t \mapsto \varepsilon(t\vec{v})$ tend vers 0 en 0. Donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t}\|\vec{v}\|\varepsilon(t\vec{v}) = 0$$

et le résultat en découle.

La dérivée dans la direction $\vec{v}$ a une *interprétation graphique* simple dans le cas d'une fonction de deux variables et lorsque le vecteur $\vec{v}$ est normé. On a vu que $D_{\vec{v}}f(M_o)$ est la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(M_o + t\vec{v})$. Si on coupe la surface représentative de f avec le plan vertical passant par M_o et parallèle à $\vec{v}$ on obtient le graphe de la fonction $t \mapsto f(M_o + t\vec{v})$. Alors la dérivée directionnelle $D_{\vec{v}}f(M_o)$ est la pente de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 dans le repère $(M_o, \vec{v}, \vec{\mathbf{k}})$.

Pour pour voir comparer des dérivées dans des direction différentes en un même point M_o, il faut fixer la norme de $\vec{v}$ une fois pour toute et on impose $\|\vec{v}\| = 1$. La direction donnée par le gradient a l'interprétation suivante :

3.2.4. Proposition. *Prenons les notations et hypothèses de la proposition précédente. Lorsque $\vec{v}$ varie dans l'ensemble des vecteurs unitaires, la dérivée directionnelle $D_{\vec{v}}$ prend un valeur maximum lorsque $\vec{v}$ est parallèle au gradient et a même sens que lui. En d'autres termes, autour d'un point M_o fixé la direction dans laquelle la fonction f varie le plus est celle donnée par le gradient.*

Démonstration. En effet on a

$$D_{\vec{v}}f(M_o) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o} \; . \; \vec{v} = \|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o}\| \; . \; \|\vec{v}\| \cos\theta = \|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o}\| \cos\theta \; ,$$

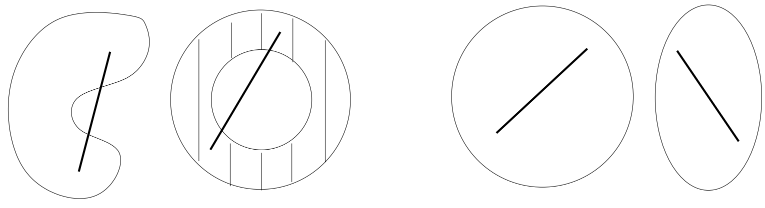
où θ désigne l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o}, \vec{v})$. Il est clair que le maximum est atteint lorsque $\cos\theta = 1$, c'est-à-dire lorsque $\theta \equiv 0$ *modulo* 2π.

En dimension 1, nous savons qu'une fonction dérivable sur un intervalle, et dont la dérivée est nulle, est constante sur cet intervalle. La généralisation de ce phénomène en dimension supérieure est possible mais plus délicate.

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On dit que D est *convexe* si à chaque fois qu'il contient deux points, il contient le segment reliant ces deux points. Un disque, un boule, l'intérieur d'un ellipse sont convexes . Un couronne de $\mathbb{R}^2$ n'est pas convexe.

Enfin on dit qu'un domaine D est *étoilé* par rapport à l'un de ses points 0, si pour tout M dans D, le segment $[0, M]$ est contenu dans D.

On dit qu'un domaine D est *connexe par ligne brisée* si chaque paire de points A et B de D peuvent être reliés par une ligne polygonale contenue dans D. Un domaine convexe ou étoilé est connexe par ligne brisée ; dans le premier cas, il faut utiliser une ligne polygonale à 1 segment, et dans le second cas, une ligne polygonale à 2 segments.



Non convexes Convexes

3.2.5. Théorème. *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ supposé ouvert. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction admettant des dérivées partielles. Supposons que D soit convexe, ou étoilé (ou plus généralement connexe par ligne brisée).*

a) *Si quel que soit $M \in D$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) = \vec{0}$, alors f est constante sur D.*

b) *Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est identiquement nulle sur D, alors la fonction f ne dépend pas de la variable x.*

Démonstration. Admise.

3.3. Dérivation en chaîne.

Nous allons voir que sous certaines conditions une fonction composée admet des dérivées partielles et que l'on peut les calculer avec une règle simple appelée *règle de dérivation en chaîne.*

Commençons par le cas le plus simple où l'on compose une fonction numérique de plusieurs variables avec une fonction numérique d'une variable.

3.3.1. Théorème. *Soit D un domaine de X que nous prendrons égal à $\mathbb{R}^3$ pour fixer les idées. Soit $f : D \longrightarrow I$ une fonction numérique à valeur dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable définie sur I. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

i) *f admet des dérivées partielles en un point M_o intérieur à D ;*

ii) *φ est dérivable en $a_o = f(M_o)$.*

Alors : $\varphi \circ f$ admet des dérivées partielles en M_o et elle sont données par :

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(M_o) = \varphi'(f(M_o))\frac{\partial f}{\partial x}(M_o) \ , \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(M_o) = \varphi'(f(M_o))\frac{\partial f}{\partial y}(M_o) \ ,$$

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial z}(M_o) = \varphi'(f(M_o))\frac{\partial f}{\partial z}(M_o) \ .$$

Démonstration. Supposons que $M_o = (x_o, y_o, z_o)$. Alors, par définition, quand elle existe, la dérivée partielle en la variable x_o de $\varphi \circ f$ en M_o est la dérivée de la fonction composée $t \mapsto \varphi[f(t, y_o, z_o)]$ au point $t = x_o$. Il suffit alors d'appliquer le théorème donnant l'existence et la valeur de la dérivée d'une fonction composée de deux fonctions d'une seule variable.

Regardons ensuite l'autre cas extrême où on compose une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ (par exemple) avec une fonction numérique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

3.2.2. Théorème. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soit φ une application de I dans D (un arc paramétré) donné par ses composantes $(X(t), Y(t), Z(t))$, $t \in I$. Soit f une application numérique de D dans $\mathbb{R}$. Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

i) *φ dérivable en un point $a \in I$,*

ii) *f admet des dérivées partielles sur D qui sont continues au point $M_o = \varphi(a)$.*

Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et on a la formule :

$$
\begin{aligned}
(f \circ \varphi)'(a) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o} \,.\, \varphi'(a) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(M_o) X'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o) Y'(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_o) Z'(a) \ .
\end{aligned}
$$

Démonstration. Par hypothèse, f admet un développement limité à l'ordre 1 en $M_o = \varphi(a)$:

$$f(\varphi(a) + \overrightarrow{H}) = f(M_o) + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o} \,.\, \overrightarrow{H} + \|\overrightarrow{H}\| \epsilon(\overrightarrow{H}) \ .$$

En posant $\overrightarrow{H} = \varphi(t) - \varphi(a)$, pour t proche de a, on obtient :

$$f(\varphi(t)) - f(\varphi(a)) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o} \,.\, (\varphi(t) - \varphi(a)) + \|(\varphi(t) - \varphi(a))\| + \epsilon(\varphi(t) - \varphi(a)) \ .$$

D'où en divisant par $t - a$:

$$\frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(a))}{t - a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{M_o} \,.\, \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a} + \pm \left\| \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a} \right\| \epsilon(\varphi(t) - \varphi(a)) \ .$$

Par définition, le quotient $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a}$ tend vers le vecteur $\varphi'(a)$. La quantité $\pm \left\| \dfrac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a} \right\|$ est bornée, tandis que $\epsilon(\varphi(t) - \varphi(a))$ tend vers 0. Le produit tend donc vers 0 et le théorème en découle.

Nous allons à présent traiter le cas d'une composée de la forme $f \circ \varphi$ où f et φ sont comme suit :

– φ est une application d'un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^3$ dans un ouvert Δ de $\mathbb{R}^3$ et f est une application numérique de $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$,

ou bien

– φ est une application d'un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^3$ dans un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$ et f est une application numérique de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$,

ou bien

– φ est une application d'un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ dans un ouvert Δ de $\mathbb{R}^3$ et f est une application numérique de $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$,

ou bien

– φ est une application d'un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ dans un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$ et f est une application numérique de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Nous n'énoncerons le résultat que dans le premier cas, les autres ayant des formulations similaires.

3.2.3. Théorème. *Soient D et Δ des domaines ouverts de $\mathbb{R}^3$, φ une application de D dans Δ et f une application numérique de Δ dans $\mathbb{R}$. Notons (x, y, z) les coordonnées d'un point $M \in D$ et (u, v, w) les coordonnées d'un point $N \in \Delta$. Notons*

$$(\varphi_u(x, y, z), \varphi_v(x, y, z), \varphi_w(x, y, z))$$

les composantes de $\varphi(x, y, z)$, pour $(x, y, z) \in D$. Soit $M_o = (x_o, y_o, z_o)$ un point fixé de D et posons $\varphi(M_o) = N_o = (u_o, v_o, w_o)$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1) *f admet des dérivées partielles sur D continues au point $N_o = (u_o, v_o, w_o)$,*
2) *les fonctions φ_u, φ_v, φ_w admettent des dérivées partielles en M_o.*

Alors $f \circ \varphi$ admet des dérivées partielles en M_o et l'on a :

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial u}(N_o)\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}(M_o) + \frac{\partial f}{\partial v}(N_o)\frac{\partial \varphi_v}{\partial x}(M_o) + \frac{\partial f}{\partial w}(N_o)\frac{\partial \varphi_w}{\partial x}(M_o) \ ,$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial u}(N_o)\frac{\partial \varphi_u}{\partial y}(M_o) + \frac{\partial f}{\partial v}(N_o)\frac{\partial \varphi_v}{\partial y}(M_o) + \frac{\partial f}{\partial w}(N_o)\frac{\partial \varphi_w}{\partial y}(M_o) \ ,$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial z}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial u}(N_o)\frac{\partial \varphi_u}{\partial z}(M_o) + \frac{\partial f}{\partial v}(N_o)\frac{\partial \varphi_v}{\partial z}(M_o) + \frac{\partial f}{\partial w}(N_o)\frac{\partial \varphi_w}{\partial z}(M_o) \ ,$$

Démonstration. Nous traitons la variable x, les cas de y et z étant identiques. Par définition, nous devons étudier la dérivabilité de la fonction

$$t \mapsto f(\varphi(t, y_o, z_o)) \ ,$$

définie dans un petit intervalle $]x_o - a, x_o + a[$, au point $t = x_o$. Cette fonction peut se voir comme la composée de

$$\psi \ :]x_o - a, x_o + a[\longrightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^3 \ , \ t \mapsto \varphi(t, x_o, y_o)$$

avec la fonction f. Nous sommes alors dans le cadre du théorème (3.2.2). Cette fonction est donc dérivable de dérivée :

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x}(M_o) = \overrightarrow{\text{grad}} f_{N_o} \ . \ \psi'(x_o) \ ,$$

avec

$$\overrightarrow{\text{grad}} f_{N_o} = (\frac{\partial f}{\partial u}(N_o), \frac{\partial f}{\partial v}(N_o), \frac{\partial f}{\partial w}(N_o))$$

et

$$\psi'(x_o) = (\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}(M_o), \frac{\partial \varphi_v}{\partial x}(M_o), \frac{\partial \varphi_w}{\partial x}(M_o)) \ .$$

Le théorème en découle.

Exemple. Vérifions la règle de dérivation en chaîne sur un exemple simple. Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction donnée par

$$f(t) = (\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}) \ ,$$

et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $g(x, y) = x^2 + y^2$. Un calcul simple montre que la composée $g \circ f$ est la fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à t associe 1. Il faut vérifier que $(g \circ f)'(t_o) = 0$, pour tout $t_o \in \mathbb{R}$. Fixons un réel t_o et posons $(x_o, y_o) = f(t_o)$. On a

$$f'(t_o) = (\frac{4t_o}{(1 + t_o^2)^2}, \frac{2(1 - t_o^2)}{(1 + t_o^2)^2}) \ ,$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o) = 2x_o = \frac{2(t_o^2 - 1)}{1 + t_o^2} \ , \ \frac{\partial g}{\partial y}(y_o) = 2y_o = \frac{4t_o}{1 + t_o^2} \ .$$

Donc

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(t_o) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_o)\frac{4t_o}{(1+t_o^2)^2} + \frac{\partial g}{\partial y}(y_o)\frac{2(1-t_o^2)}{(1+t_o^2)^2} \\ &= \frac{8t_o(t_o^2-1)}{(1+t_o^2)^3} + \frac{8t_o(1-t_o^2)}{(1+t_o^2)^3} = 0\ .\end{aligned}$$

3.5. Dérivées partielles d'ordres supérieurs. Théorème de Schwarz.

Pour fixer les idées, soit f une fonction numérique définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^3$. Supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ existent sur D.

Si la dérivée partielle par rapport à x de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en un point M_o de D, on l'appelle un dérivée partielle *seconde* et on la note :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(M_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_o) \ ,$$

De même, si les autres dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en M_o existent, on les notes

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(M_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_o) \text{ et } \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial x})(M_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(M_o) \ .$$

Quand elles existent, on a les autres dérivées partielles *secondes*, ou *d'ordre* 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_o) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M_o), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_o) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(M_o) \ , \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(M_o) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(M_o) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(M_o) \ .$$

Lorsque les dérivées partielles secondes sont définies sur tout D, on obtient donc 9 fonctions numériques définies sur D :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{array}$$

On utilise aussi les notations suivante. On écrit f'_{xx} pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et f'_{xy} pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Attention à l'ordre des variables qui diffère d'une notation à l'autre !

Par récurrence, on définit les dérivées partielles à tout ordre, lorsque bien sûr elles existent. La notation $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y^2 \partial x}$ signifiera que l'on a dérivé f quatre fois : une fois par rapport à x, puis deux fois par rapport à y et une dernière fois par rapport à z.

Il n'est pas toujours vrai que l'on puisse intervertir l'ordre des dérivées partielles : par exemple, lorsqu'elles existent les valeurs $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_o)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_o)$ ne sont pas forcément égales. C'est cependant le cas si les dérivées partielles secondes sont assez régulières, comme le montre le théorème suivant.

3.4.1. Théorème (Dit de Schwarz). *Soit f une fonction numérique définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^3$. Supposons que les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues sur D. Alors pour tout point M de D, on a l'égalité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.*

Démonstration admise.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = x^2y + 2xy + 1$. Puisque f est polynomiale, il est clair que toutes les dérivées de f à tout ordre existent et sont continues (car polynomiales). On a :

– $\dfrac{\partial f}{\partial x} \ : \ (x,y) \mapsto 2yx + 2y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ : \ (x,y) \mapsto 2x + 2$,

– $\dfrac{\partial f}{\partial y} \ : \ (x,y) \mapsto x^2 + 2x$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \ : \ (x,y) \mapsto 2x + 2$,

et le théorème est bien vérifié.

3.5. Equations aux dérivées partielles.

On appelle *équation aux dérivées partielles* (en abrégé *EDP*) une équation qui relie certaines dérivées partielles d'une fonction inconnue f de plusieurs variables. Les équations les plus importantes de la physiques sont des équations aux dérivées partielles faisant intervenir des dérivées d'ordres 1 et 2. Nous allons décrire quelques unes de ces équations.

Exemple 1. Equation de Laplace.

Soit f une fonction de plusieurs variables définie sur un domaine ouvert D et possédant des dérivées partielles d'ordre 2 sur D. L'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

en dimension trois, ou bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en dimension deux, s'appelle le *laplacien* de f. L'équation à l'inconnue f donnée par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

s'appelle *l'équation de Laplace*. C'est par exemple l'équation vérifiée par l'énergie potentielle d'une masse négligeable ponctuelle soumise à un champ de gravitation. Elle est aussi vérifiée par :

– le potentiel électrostatique créé dans le vide par une distribution de charges électriques ;

– la température à l'équilibre dans un matériau.

Exemple 2. Equation des ondes.

Décrivons pour simplifier l'équation des ondes en dimension 1. Soit f une fonction de deux variables x et t, définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et possédant des dérivées partielles à l'ordre 2. Soit v un constante positive. L'*équation des ondes* est l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Physiquement, la variable x est une variable d'espace et la variable t une variable de temps. La fonction f modélise une grandeur physique dépendant de la position et du temps soumise à une variation après une petite perturbation locale du milieu considéré : une onde. Dans le cas d'une onde acoustique f désigne la pression de l'air, dans le cas d'une vague f est la hauteur de l'eau. Dans le cas d'une onde herztienne, f est une des composantes du champ électro-magnétique.

Exercices du chapitre 3

1. Pour chacune des fonctions qui suivent, déterminer le domaine de définition D et pour tout (a, b) intérieur à D, déterminer quand elles existent les dérivées partielles au point (a, b).

$$\text{a)}\ \ xy \quad \text{b)}\ \ \ln(xy) \quad \text{c)}\ \ \mathrm{Arctan}\frac{y}{x} \quad \text{d)}\ \ \mathrm{Arctan}\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\text{e)}\ \ (x^2+y^2)^{1/3} \quad \text{f)}\ \ x^y \quad \text{g)}\ \ \cos(x+y^2)$$

2. Une autre série : même principe que pour l'exercice 1.

(i)	$\frac{x-y}{x+y}$	(ii)	$e^{\sin(t/x)}$
(iii)	$\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$	(iv)	$\int_x^y \frac{e^t}{t}dt$
(v)	x^2yz^3+xy-z	(vi)	$x\sqrt{yz}$
(vii)	$x\sqrt{yz}$	(viii)	$x^{y/z}$
(ix)	$\frac{x-y}{z-t}$	(x)	$xy^2z^3t^4$

3. Soient $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour chacune des fonctions F ci-dessous, déterminer $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ en fonction des dérivées f' et g', lorsque ces nombres existent.

$$\begin{array}{lll} F(x,y)=f(x)+g(y) & F(x,y)=f(x)g(y) & F(x,y)=f(x)/g(y) \\ F(x,y)=f(x+y) & F(x,y)=f(xy) & F(x,y)=f(x/y) \end{array}$$

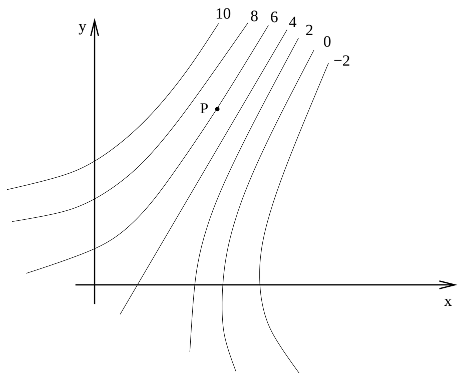
4. On considère la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point (a, b) de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$. Les calculer. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et les calculer. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

5. Soit f la fonction donnée par $f(x, y) = \sqrt{3x-y}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ?
b) Soit $D = \{(x, y) = \mathbb{R}^2\ ;\ 3x - y > 0\}$. Montrer que f possède des dérivées partielles continues à l'ordre 1 sur D.
c) Ecrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(2, 2)$.
d) En déduire une valeur approchée de $f(2,01\,;\,1,99)$. Comparer cette valeur à celle obtenue par une calculatrice.
e) Refaire le même exercice avec :

- la fonction $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et la valeur $f(2,01\,;\,2,01\,;\,1,01)$,
- la fonction $f(x, y, z) = \ln(1 + x + \sin y)$ et la valeur $f(0,01\,;\,-0,02)$.

6. On donne quelques lignes de niveau d'un fonction f supposée très régulière (en particulier les dérivées partielles à l'ordre 1 existent) :



Que dire du signe de $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$) ?

7. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$, a et b étant des réels fixés, et $g\,;\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = x^2 + y^2$. Montrer que la fonction $F = g \circ f$ est partout dérivable et déterminer sa dérivée de deux façons différentes.

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction admettant des dérivées partielles en tout point. Fixons $\theta \in \mathbb{R}$ et définissons $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)\ .$$

Montrer que $F = f \circ g$ admet des dérivées partielles en tout point et calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a, b)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ en fonction de a, b et des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

9. *Sur le théorème de Schwarz.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Montrer que les dérivées partielles premières de f existent sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ et les calculer.

c) Existence et calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

d) Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont-elles continues en $(0, 0)$?

10. Pour les fonctions suivantes, calculer l'expression de toutes les dérivées secondes. Préciser les domaines d'existence :

$f(x, y) = x^2 y + x\sqrt{y}$, $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$, $f(x, y) = \cos^2(5x + 2y)$.

11. Pour les fonctions suivantes vérifier la conclusion du théorème de Schwarz :

$x^5 y^4 - 3x^2 y^3 + 2x^2$, $\sin^2 x \cos y$.

12. Pour les fonctions suivantes, déterminez la dérivée partielle indiquée :

- $f(x,y) = x^2y^3 + 2x^4y$; f'''_{xxx}.
- $f(x,y) = e^{xy^2}$; f'''_{xxy}.
- $f(x,y,z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2$, f'''_{xyz}.
- $f(x,y,z) = e^{xyz}$; f'''_{yzy}.
- $u(x,y,z) = \ln(x + 2y^2 + 3z^3)$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.
- $v(x,y,z) = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 v}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$.

13. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles vérifient, l'équation de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$? (On vérifiera l'équation dans le domaine ouvert d'existence du Laplacien.)

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$.
c) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2$.
d) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.
e) $f(x,y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.

14. *Gradient en coordonnées polaires.* Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction admettant des dérivées partielles premières sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$.

Pour $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in D$, on pose $\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On supposera qu'il existe un domaine ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $(r,\theta) \in \Delta$, on ait $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in D$. En fait pour simplifier, on pourra supposer que D est un disque ouvert $D_o(0,R)$, de sorte qu'on peut prendre

$$\Delta =]0,R[\times\mathbb{R} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < r < R\} \ .$$

a) Pour $(r_o,\theta_o) \in \Delta$, calculer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_o,\theta_o)$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r_o,\theta_o)$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)$, r_o, θ_o, où l'on a posé $x_o = r_o\cos\theta_o$, $y_o = r_o\sin\theta_o$.

b) Résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos\theta_o X + \sin\theta_o Y & = \ A \\ -r_o\sin\theta_o X + r_o\cos\theta_o Y & = \ B \end{cases}$$

où A, B, $r_o \neq 0$, θ_o sont des constantes et X, Y des inconnues.

c) En déduire l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o,y_o)$ en fonction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$, r_o, θ_o, $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (0,1)$, où $(x_o,y_o) \in D$ vérifie :

$$(x_o,y_o) = (r_o\cos\theta_o, r_o\sin\theta_o) \ , \ (r_o,\theta_o) \in \Delta \ , \ r_o \neq 0 \ .$$

d) On pose $\vec{n} = \cos\theta_o\vec{i} + \sin\theta_o\vec{j}$ et $\vec{t} = -\sin\theta_o\vec{i} + \cos\theta_o\vec{j}$. Dessiner les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sur un graphique. Que dire du repère $(\vec{n},\vec{t})$? Montrer qu'avec les notations précédentes, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o,y_o) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_o,\theta_o)\vec{n} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r_o,\theta_o)\vec{t}$$

(formule du gradient en coordonnées polaires).

15. a) Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction donnée par $\gamma(t) = (t^2 + 1, 3t - 2)$. Montrer que γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer γ'.

b) Même question pour l'arc $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donné par $\gamma(t) = (2t^2 + t - 1, t^2 + t + 1)$. Pour quelles valeurs de t le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est-il parallèle à l'axe des x (resp. à l'axe des y) ? Pour quelles valeurs de t est-il colinéaire au vecteur $\vec{v}(1, 1)$ (resp. $\vec{v}(1, -1)$) ?

16. *Equation des ondes en dimension* 1. On veut résoudre l'équation des ondes en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \ , \ c \text{ constante } > 0 \ .$$

Ici f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles secondes continues et l'équation signifie :

$$\text{Quel que soit } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \ , \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \ .$$

a) Soit φ la fonction définie par $\varphi(u, v) = f(\dfrac{u + v}{2}, \dfrac{u - v}{2c})$. Montrer que, quel que soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, t) = \varphi(x + ct, x - ct)$. Existence et calcul de $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}$.

b) En déduire qu'il existe deux fonctions deux fois dérivables F, $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\varphi(u, v) = F(u) + G(v)$, u, $v \in \mathbb{R}$.

c) Donner la forme générale des solutions de l'équation.

17. *Equation de Laplace à symétrie sphérique.* On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ possédant des dérivées partielles continues à l'ordre 2 et vérifiant :

(1) $\Delta f = 0$ (équation de Laplace),

(2) $f(x, y, z) = \varphi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, où φ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (symétrie sphérique).

a) Montrer, effectivement, que si f est définie par $f(x, y, z) = \varphi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, où φ est deux fois dérivable, alors f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0\}$.

b) Soit $\rho : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calculer les dérivées partielles de ρ jusqu'à l'ordre 2.

c) Calculer Δfen fonction de r des des dérivées de φ.

d) Déterminer les solutions de l'équation de Laplace à symétrie sphérique.

e) Répondre aux mêmes questions en remplaçant $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^2$.

4. Théorème des fonctions implicites. Gradient et courbes de niveau.

4.1. Théorème des fonctions implicites.

Le théorème des fonctions implicite dit que sous certaines conditions, lorsque des variables sont reliées par une équation, il est localement possible d'exprimer l'une d'entre elles en fonctions des autres. Par soucis de simplicité, Nous nous nous restreindrons au cas de deux variables.

Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et soit $M_o = (x_o, y_o)$ un point de D. On suppose que f admet des dérivées partielles à l'ordre 1 continues sur D.

4.1.1. Théorème. (**Fonctions implicites, première version**) *Supposons que* $f(x_o, y_o) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$. *Alors il existe :*

- *un disque ouvert* $D_o(M_o, r)$ *centré en* M_o,
- *un intervalle ouvert* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$ *contenant* x_o,
- *une fonction* $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable à dérivée continue (de classe* $\mathcal{C}^1$*),*

tels que :

- *pour tout* $(x, y) \in D_o(M_o, r)$, $f(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x \in]a, b[$ *et* $y = \varphi(x)$.
- *pour tout* $t \in]a, b[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)) \neq 0$

On a :

$$\varphi'(t) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))}{\frac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t))} \ , \ t \in]a, b[$$

en particulier

$$\varphi'(x_o) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)}$$

De plus φ *a la même régularité que* f *: si les dérivées partielles de* f *à l'ordre* k *existent, alors* φ *est* k *fois dérivable.*

Démonstration. Admise. Notons tout de même qu'une fois que l'on sait qu'il existe une fonction dérivable $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

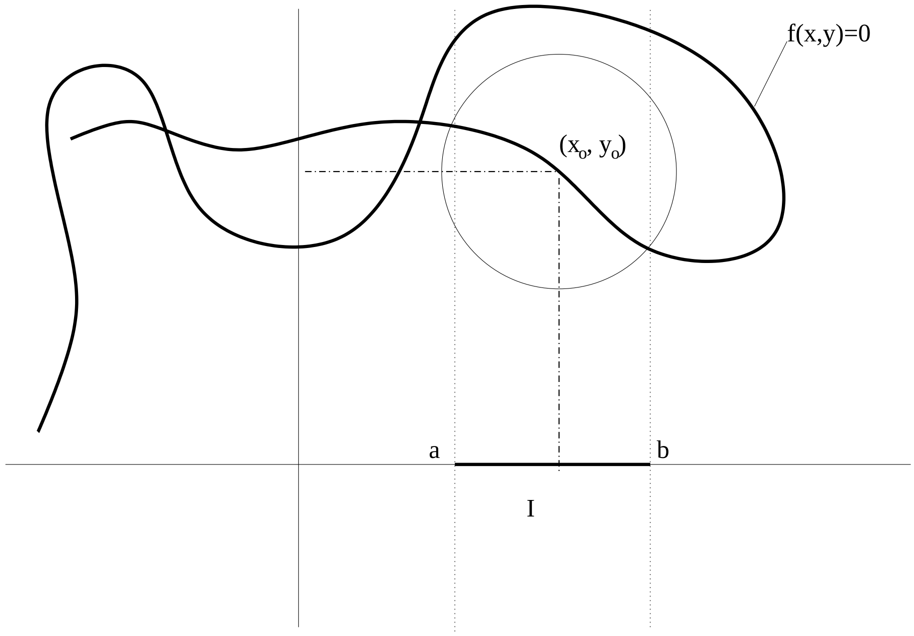
- $f(x, \varphi(x)) = 0$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$,

la dérivée de φ est forcément donnée comme dans le théorème. En effet en dérivant la fonction constante $t \mapsto f(t, \varphi(t))$, composée de $t \mapsto (t, \varphi(t))$ et de $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on obtient (règle de dérivation en chaîne) :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)).1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t)).\varphi'(t) \ , \ t \in)a, b[\ ,$$

d'où la formule.

Notons qu'on a une version similaire du théorème des fonctions implicites lorsque c'est la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ qui ne s'annule pas. Dans ce cas là on peut localement exprimer x comme fonction dérivable de y.



4.1.2. Théorème (**Fonctions implicites, seconde version**) *Supposons que* $f(x_o, y_o) = 0$ *et que le gradient* $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o, y_o)$ *est un vecteur non nul. Alors il existe :*

– *un disque ouvert* $D_o(M_o, r)$ *centré en* M_o*,*
– *un intervalle ouvert* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$ *et un réel* $t_o \in]a, b[$*,*
– *un arc paramétré dérivable à dérivée continue* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$*,* $t \mapsto (x(t), y(t))$*,*

tels que :

– $(x_o, y_o) = (x(t_o), y(t_o))$*,*
– *pour tout* $t \in I$*,* $f(x(t), y(t)) = 0$*, et réciproquement tout point* (x, y) *de* $D_o(x, y)$ *sur la courbe* $f(x, y) = 0$ *s'écrit de façon unique* $(x(t), y(t))$ *pour un paramètre* $t \in I$*,*
– *la dérivée* $\gamma'(t)$ *est non nulle pour tout* $t \in I$*.*

Démonstration. Montrons brièvement comment ce théorème se déduit du théorème précédent. Puisque le vecteur gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o, y_o)$ ne s'annule pas, l'une des deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$ ne s'annule pas. Si, par exemple, la seconde est non nulle, on pose $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, où φ est la fonction donnée par la première version du théorème des fonctions implicites.

Rappelons que, lorsqu'il n'est pas nul, le vecteur dérivée $\gamma'(t)$ est par définition un vecteur directeur de la tangente à l'arc γ au point de paramètre t. Le théorème dit donc que si on intersecte la courbe $f(x, y) = 0$ avec un disque ouvert assez petit centré en M_o, on obtient un arc paramétré dont le vecteur dérivé ne s'annule jamais. Celui-ci admet donc des tangentes en tout point. Par définition la tangente à l'arc γ au point de paramètre t est *la tangente à la courbe* $f(x,y)=0$ *au point* $(x(t),y(t))$. Bien sûr cette définition semble dépendre du choix de l'arc paramétré γ donné par le théorème. En fait on peut démontrer qu'il n'en est rien (ce que l'on admettra).

4.2. Gradient et courbes de niveau.

Soit f une fonction numérique définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Supposons que f admette des dérivées partielles à l'ordre 1 continues sur tout D Pour chaque valeur $k \in \mathbb{R}$ de f, notons C_k la courbe de niveau k, c'est-à-dire l'ensemble des points (x,y) tels que $f(x,y)=k$.

4.2.1. Théorème *Soit* (x_o,y_o) *un point de* D *où le vecteur gradient* $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o,y_o)$ *ne s'annule pas. Posons* $k=f(x_o,y_o)$. *Alors la courbe de niveau* C_k *admet une tangente en* (x_o,y_o) *et celle-ci est perpendiculaire au vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o,y_o)$.

Démonstration. Soit g la fonction définie sur D par $g(x,y)=f(x,y)-k$. Alors $g(x_o,y_o)=0$. De plus on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} g(x_o,y_o)=\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o,y_o)$: on a l'égalité des dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o y_o)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_o y_o)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_o y_o)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_o y_o)\ .$$

D'après la seconde version du théorème des fonctions implicites, on peut paramétrer l'intersection de la courbe $g(x,y)=0$ (c'est-à-dire de C_f) à l'aide d'un arc continûment dérivable $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Ici $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, et $(x_o,y_o)=(x(t_o),y(t_o))$, pour un paramètre $t_o \in I$. De plus le vecteur dérivé de γ ne s'annule jamais. Par définition C_f admet alors une tangente en (x_o,y_o) de vecteur directeur $(x'(t_o),y'(t_o))$. En dérivant la fonction constante $t \mapsto f(x(t),y(t))$ par la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$0=\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o,y_o)\ .\ \gamma'(t_o)\ ,$$

ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_o,y_o)$ et $\gamma'(t_o)$ sont orthogonaux. *CQFD.*

Pour résumer ce que nous savons sur le gradient, nous pouvons énoncer : *lorsqu'il n'est pas nul, le gradient d'une fonction de deux variables (de classe* $\mathcal{C}^1$ *définie sur une domaine ouvert) est perpendiculaire aux courbes de niveau et dirigé selon les valeurs croissantes de* f.

5. Extrema

Dans ce chapitre, nous allons étudier les extrêmas des fonctions numériques de plusieurs variables (maximums et minimums). La plupart des faits que nous énoncerons se généralisent à nombre quelconque de variables, mais par soucis de simplicité nous nous restreindrons aux fonctions définies sur un domaine du plan.

5.1. Signe d'un forme quadratique en deux variables.

On appelle *forme quadratique en deux variables* x et y une application polynomiale Q de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$Q(x,y) = px^2 + 2qxy + ry^2 \ ,$$

où p, q et r sont des constantes réelles. On appelle *discriminant* de Q le nombre réel $\Delta = q^2 - pr$.

Le but de cette section est l'étude du signe d'une telle fonction.

Notons tout de suite que si les deux nombres p et r sont nuls, l'étude du signe de Q est immédiate. Plus précisément, on voit que Q est soit nulle (cas $q = 0$), soit de signe variable. Nous travaillerons donc sous l'hypothèse $p \neq 0$ et même $p > 0$, à laquelle on peut se ramener en changeant Q en $-Q$.

Hypothèse de travail : $p > 0$.

Observons que $Q(x,0) = px^2 \geqslant 0$ et que $Q(x,0) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Si $y \neq 0$, on a

$$Q(x,y) = y^2(p(\frac{x}{y})^2 + 2q\frac{x}{y} + r) \ ,$$

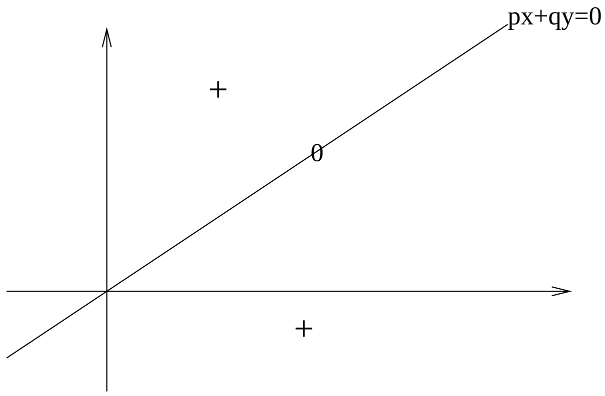
de sorte que le signe de $Q(x,y)$ ne dépend que de la valeur du polynôme du second degré $P(t) = pt^2 + 2qt + r$ en x/y. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta' = 4q^2 - 4pr = 4\Delta$.

Premier cas. $\Delta < 0$. Alors $P(t)$ est toujours strictement positif.On trouve donc que $Q(x,y) > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $Q(0,0) = 0$.

Deuxièmes cas. $\Delta = 0$. L'unique racine de P est $-q/p$ et l'on a :

$$Q(x,y) = y^2 p(\frac{x}{y} + \frac{q}{p})^2 = \frac{1}{p}(px + qy)^2 \ .$$

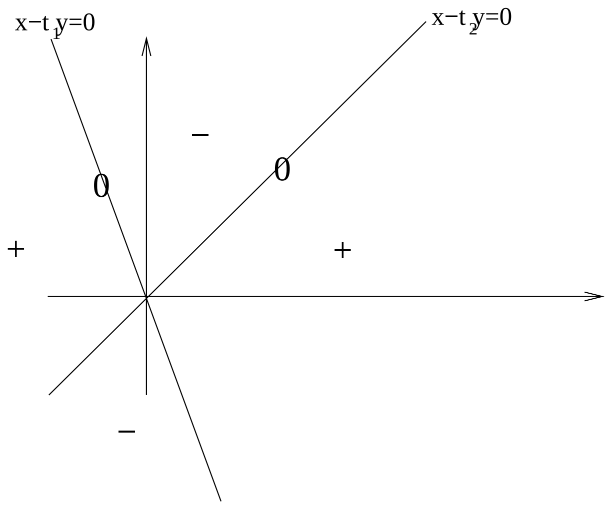
On a donc que Q s'annule sur la droite $px + qy = 0$ et est de signe strictement positif en dehors de cette droite.



Troisième cas. $\Delta > 0$. Le polynôme P a deux racines t_1 et t_2 et l'on a :

$$Q(x,y) = py^2(\frac{x}{y} - t_1)(\frac{x}{y} - t_2) = p(x - t_1 y)(x - t_2 y) \ .$$

Le signe de Q est alors donné comme sur le dessin ci-dessous (Noter que Q change de signe quand on traverse l'une des deux droites et qu'elle est positive lorsque $y = 0$ et x non nul).



Comme corollaire de cette discussion nous avons le théorème suivant.

5.1.1. Théorème. *Soit $Q(x, y) = px^2 + 2qxy + ry^2$ une forme quadratique en deux variables telles qu'au moins un des deux nombres p ou r est non nul. Alors si son discriminant $\Delta = q^2 - pr$ est strictement négatif, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0\}$. Ce signe constant est donné par le signe commun de p et de r. Si le discriminant Δ est strictement positif, la forme quadratique est de signe variable . Finalement si le discriminant et nul, la forme quadratique est $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ sur tout $\mathbb{R}^2$ et s'annule sur une droite.*

Démonstration. Noter, en effet, que la relation $q^2 - pr < 0$ entraîne que p et r sont non nuls de même signe.

5.2. Dévéloppement limité à l'ordre 2 et extrema locaux.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$.

5.2.1. Définition. *On dit que f possède un* minimum local *en un point M_o de D, s'il existe un rayon $R > 0$ tel que la boule $B_o(M_o, R)$ soit contenue dans D et tel que pour tout $M \in B_o(M_o, R)$ on ait : $f(M) \geqslant f(M_o)$. On dit que ce minimum local est* strict *si pour tout $M \in B_o(M_o, M)$ différent de M_o, on a $f(M) > f(M_o)$. On définit de même la notion de* maximum local (strict).

L'exemple le plus simple de fonction à deux variables admettant un minimum local est la fonction f définie sur tout $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ici le mimimum est réalisé en $(0, 0)$. Il est strict.

Lorsque D est un domaine ouvert de $\mathbb{R}$ et lorsque f est dérivable, une condition nécessaire pour que f admette un extremum local en $x_o \in D$ est connue des élèves de terminales : on doit avoir $f'(x_o) = 0$. En fait, on peut être plus précis.

5.2.2. Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, si f admet un extremum local en x_o, on a $f'(x_o) = 0$. Réciproquement, supposons f deux fois dérivables avec $f''(x_o) \neq 0$, on a les implications suivantes :*

i) *si $f'(x_o) = 0$ et $f''(x_o) > 0$, la fonction f admet un miminum local strict en x_o ;*
ii) *si $f'(x_o) = 0$ et $f''(x_o) < 0$, la fonction f admet un maximum local en x_o.*

Démonstration. Supposons que f admette par exemple un minimum local en x_o. Le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_o s'écrit :

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)f'(x_o) + (x - x_o)\varepsilon(x - x_o) \ ,$$

où x varie dans un petit intervalle autour de x_o et où la fonction ε tend vers 0 en 0. Par hypothèse, pour x assez proche de x_o, l'expression $f(x) - f(x_o)$ est $\geqslant 0$. Or pour $x - x_o$ assez petit et $x \neq x_o$, on a

$$f(x) - f(x_o) = (x - x_o)(f'(x_o) + \varepsilon(x - x_o)).$$

Si jamais on avec $f'(x_o) \neq 0$, l'expression $(f'(x_o) + \varepsilon(x - x_o))$ serait du signe de $f'(x_O)$ pour $x - x_O$ assez petit, ce qui impliquerait que $f(x) - f(x_o)$ n'est pas de signe constant : absurde.

Montrons la réciproque proposée. Supposons par exemple $f'(x_o) = 0$ et $f''(x_o) > 0$. Puisque f est deux fois dérivable, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en x_o :

$$f(x) - f(x_o) = (x - x_o)f'(x_o) + \frac{1}{2}(x - x_o)^2 f''(x_o) + (x - x_o)^2\varepsilon(x - x_o)$$

$$= \frac{1}{2}(x - x_o)^2 f''(x_o) + (x - x_o)^2\varepsilon(x - x_o) = (x - x_o)^2(\frac{1}{2}f''(x_o) + \varepsilon(x - x_o)) \ ,$$

pour x assez proche de x_o, $x \neq x_o$ et où la fonction ε tend vers 0 en 0. Or pour x assez proche de x_o, la quantité $\frac{1}{2}f''(x_o) + \varepsilon(x - x_o)$ est > 0 et le résultat en découle.

L'objet de cette section est de généraliser ce dernier théorème au cas de deux variables.

5.2.3. Théorème. *Soit f un fonction numérique, définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$, admettant des dérivées partielles continues. Soit $M_o = (x_o, y_o)$ un point de D. Alors si f admet un extremum local en M_o les dérivée directionnelles $D_{\vec{v}}f(M_o)$ sont nulles quel que soit le vecteur $\vec{v}$. En particulier on a :*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(M_o) = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 0 \ .$$

Démonstration. Supposons pour fixer les idées que cet extremum est un minimum. Par hypothèse, il existe un disque ouvert $D_o(M_o, R)$ tel que $f(M) \geqslant f(M_o)$, pour tout $M \in D_o(M_o, R)$. Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque. Alors par la continuité de f en M_o, si t appartient à un intervalle assez petit centré en 0 (disons de la forme $]-a, a[$, le point $M_o + t\vec{v}$ appartient à $D_o(M_o, R)$. En posant $g(t) = f(M_o + t\vec{v})$, on a donc

$$g(t) = f(M_o + t\vec{v}) \geqslant f(M_o) = g(0) \ , \ t \in]-a, a[\ .$$

Il s'ensuit que g possède un minimum local en 0. Or elle est dérivable en ce point de dérivée $D_{\vec{v}}f(M_o) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f(M_o)\ .\ \vec{v}$. Ainsi $D_{\vec{v}}f(M_o) = 0$, quel que soit $\vec{v}$, d'après le théorème des extrema locaux en dimension 1.

On voit donc que l'annulation du gradient est une condition nécessaire pour l'existence d'une extremum d'un fonction de classe $\mathcal{C}^1$. C'est condition n'est pas suffisante comme le montrent les exemples qui suivent.

– La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ admet un minimum local en $(0,0)$ et comme le prévoit le théorème, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x_o,y_o) = 2x_o\vec{\mathbf{i}} + 2y_o\vec{\mathbf{j}}$ s'annule bien en $(0,0)$.

– La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ a un gradient nul en $(0,0)$, puisque $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x,y) = 2x\vec{\mathbf{i}} - 2y\vec{\mathbf{j}}$. Cependant la fonction ne garde pas un disque constant sur tout disque centré en $(0,0)$. En effet le signe de $x^2 - y^2$ dépend dans laquelle des quatre régions du plan définies par les droites $x + y = 0$ et $x - y = 0$ se trouve le point (x,y).

Un point (x_o,y_o) de D où s'annule le gradient de f sera appelé un *point critique de* f. Comme nous l'avons vu, il peut être ni un maximum ni un minimum.

Pour donner une réciproque au dernier théorème , il nous faut étudier, comme dans le cas d'une variable, le développement à l'ordre 2.

5.2.4. Définition. *Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et $M_o = (x_o,y_o)$ un point de D. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage du point M_o, s'il existe un disque ouvert $D_o(M_o,R)$ centré en M_o et contenu dans D, et des constantes a, b, c, d, e, tels que pour tout $(x,y) \in D_o(M_o,R)$, $f(x,y)$ s'exprime par*

$$f(x_o,y_o)+a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(x-x_o)^2+d(x-x_o)(y-y_o)+e(y-y_o)^2+\|\overrightarrow{M_oM}\|^2\epsilon(\overrightarrow{M_oM})$$

où $\epsilon(\vec{v})$ tend vers 0 quand le vecteur $\vec{v}$ tend vers $\vec{0}$. Autrement dit, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\sqrt{s^2+t^2} \leqslant R$, on doit avoir :

$$f(x_o+s,y_o+t) = f(x_o,y_o) + as + bt + cs^2 + dst + et^2 + (t^2+s^2)\epsilon(s,t)\ ,$$

où $\epsilon(s,t)$ tend vers 0 quand (s,t) tend vers $(0,0)$.

Nous allons donner une condition suffisante pour qu'une fonction admette un développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point.

5.2.5. Théorème. *Avec les notations de la définition précédente supposons que f possède des dérivées partielles à l'ordre 2 continues sur D. Alors f possède un développement limité à l'ordre 2 en M_o et celui-ci a la forme :*

$$f(x_o+s,y_o+t) = f(x_o,y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)s + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)t$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_o)s^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_o)st + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_o)t^2\Big) + (s^2+t^2)\epsilon(s,t)\ .$$

Démonstration admise.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = \sin(x+y)$. Elle admet des dérivées partielles secondes continues et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,b) = \cos(a+b) \ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = -\sin(a+b) \ , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Le développement limité en $(0, \frac{\pi}{6})$ à l'ordre 2 est donné par

$$f(0+x, \frac{\pi}{6}+y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) - \frac{1}{4}(x+y)^2 + (x^2+y^2)\epsilon(x,y) \ .$$

Si f est une fonction deux fois continûment partiellement dérivable sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et si M_o est un point fixé de D, on utilisera les notations suivantes :

$$p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_o) \ , \ q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_o) \ , \ r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_o) \ ,$$

de sorte que le développement limité de f au voisinage de M_o à l'ordre 2 s'écrit :

$$f(x_o+s, y_o+t) = f(x_o,y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_o)s + \frac{\partial f}{\partial y}(M_o)t + ps^2 + 2qst + rt^2 + (s^2+t^2)\varepsilon(s,t) \ .$$

5.2.6. Théorème. (Dit des extrema locaux) *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles continues à l'ordre 2 sur D. Soit $M_o \in D$ un point critique de f :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_o) = 0 \ .$$

a) *Si $\Delta = q^2 - rp < 0$, alors p et r sont de même signe et deux cas se présentent :*
 – *$p, r > 0$ et f admet un minimum local strict en M_o,*
 – *$p, r < 0$ et f admet un maximum local strict en M_o.*

b) *Si $p \neq 0$ ou $r \neq 0$ et si $\Delta > 0$, f n'admet pas de minimum local en M_o et un tel point est qualifié de* point selle *ou de* col.

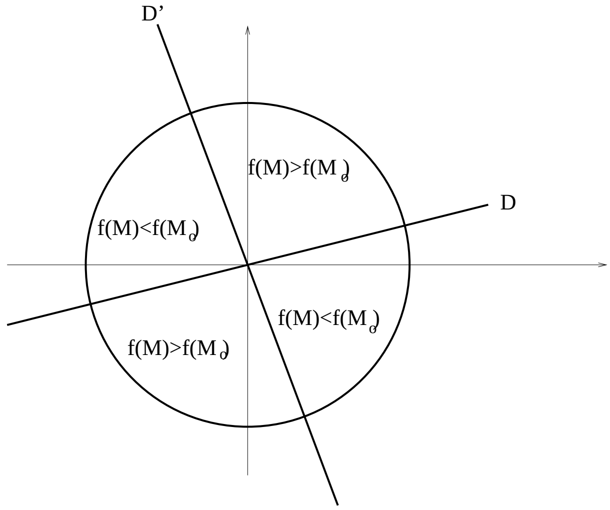
c) *Dans les autres cas, le théorème de permet pas de conclure : tout peut arriver.*

Démonstration. a) Plaçons nous par exemple dans le cas $p, r > 0$. Faisons le changement de variables $s = \rho\cos\theta$ et $s = \rho\sin\theta$ dans le développement limité à l'ordre 2 en M_o (passage en coordonnées polaires). On obtient :

$$f(x_o+s, y_o+t) - f(x_o,y_o) = \rho^2\Big(1/2(p\cos^2\theta + 2q\cos\theta\sin\theta + r\sin^2\theta) + \epsilon(s,t)\Big) \ .$$

La fonction $\theta \mapsto p\cos^2\theta + 2q\cos\theta\sin\theta + r\sin^2\theta$ est strictement positive par le théorème 5.1.1 (noter que $(\cos\theta, \sin\theta)$ est toujours différent de $(0,0)$ et continue sur $[0, 2\pi]$. Elle admet un minimum m qu'elle atteint en un certain point $\theta_o \in [0, 2\pi]$. Il s'ensuit que ce miminum est > 0. Puisque $\epsilon(s,t)$ tend vers 0 en $(0,0)$, pour (s,t) dans un disque centré en $(0,0)$ assez petit, l'expression $1/2(p\cos^2\theta + 2q\cos\theta\sin\theta + r\sin^2\theta) + \epsilon(s,t)$ est du signe de m, donc strictement positive. Le résultat en découle.

b) En passant en coordonnées polaires, toujours en utilisant le théorème 5.1.1 que le signe de $p\cos^2\theta + 2q\cos\theta\sin\theta + r\sin^2\theta + \epsilon(s,t)$ au voisinage de $(0,0)$ dépend de θ. En fait on peut trouver deux droite D et D' passant M_o et un disque centré en M_o tels que l'on soit dans la situation représenté par le dessin suivant.



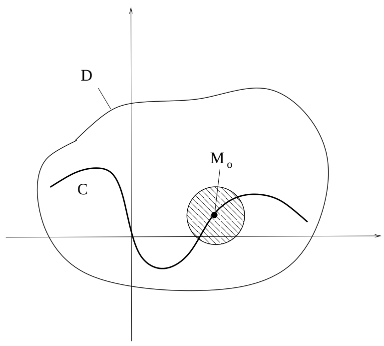
c) Si $p \neq 0$ ou $r \neq 0$ et si $\Delta = 0$, la forme $ps^2 + 2rst + rt^2$ est toujours positive ou nulle, ou négative ou nulle, et s'annule sur une droite D. Cependant on ne peut rien dire sur l'existence d'un extremum. En effet si un point (x,y) non nul est sur la droite D, le signe de $f(x_o+s, y_o+t) - f(x_o, y_o)$ est celui du reste $(s^2+t^2)\epsilon(s,t)$ et celui-ci dépend du signe de ϵ sur D, dont on ne sait rien a priori. Par exemple $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^4$ admet un minimum en $(0,0)$, tandis que $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$ n'admet ni maximum ni minimum en $(0,0)$. En effet, dans ce dernier exemple, la droite D a pour équation $x = y$ et en un point (t,t) de cette droite, le reste vaut $(t+t)^3 = 8t^3$ qui a un signe qui varie avec t.

5.3. Extrema sous contrainte

Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction numérique possédant des dérivées partielles à l'ordre 1 continues. Fixons une autre fonction $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de même régularité que f et considérons la ligne de niveau $C = \{(x,y) \in D \ ; \ g(x,y) = 0\}$.

Nous allons nous intéresser aux extrema de f sur la courbe C, c'est-à-dire aux extrema de la restriction $\tilde{f}$ de f à C. On parle "d'extrema sous contrainte". En effet on cherche à optimiser la quantité $f(x,y)$ lorsque les variables x et y sont assujéties à la contrainte $g(x,y) = 0$.

On dit que $\tilde{f}$ admet un minimum local (resp. un maximum local) en un point M_o de C, s'il existe un disque ouvert $D_o(M_o, r)$ contenu dans D, tel que pour tout $M \in C \cap D_o(M_o, r)$, on ait $f(M) \geqslant f(M_o)$ (resp. $f(M) \leqslant f(M_o)$).



5.3.1. Théorème. (**dit des extrema liés, ou sous contrainte**) *avec les notations précédentes, soit M_o un point de C vérifiant $\overrightarrow{\text{grad}} g(M_o) \neq \vec{0}$. Alors si f admet un extremum local en M_o, les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_o)$ et $\overrightarrow{\text{grad}} g(M_o)$ sont liés : il doit exister un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M_o) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} g(M_o) \ .$$

Démonstration. Par le théorème des fonctions implicites, puisque $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_o) \neq \vec{0}$, au voisinage de M_o, on peut paramétrer localement la courbe C par un arc continûment dérivable $]-a,a[\longrightarrow D$, $t \mapsto (x(t), y(t)$, avec $M_o = (x(x0), y(0))$: il existe un disque ouvert $D_o(M_o)$ tel que pour tout $M \in D$, on a $M \in D_o(M_o, r)$ si et seulement si $M = (x(t), y(t))$ pour un unique $t \in]-a,a[$. Quitte à réduire r, on peut supposer que $D_o(M_o, r)$ est contenu dans D. Alors si f admet, par exemple, un minimum local en M_o, quitte à encore réduire D, pour tout $t \in]-a,a[$, $f(x(t), y(t)) \geqslant f(x(0), y(0))$. Cela signifie que la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ admet un minimum local en $t = 0$. Donc

$$h'(0) = \overrightarrow{\text{grad}} f(M_o) \ . \ (x'(0), y'(0)) = 0 \ .$$

Ainsi $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_o)$ est orthogonale au vecteur non nul $(x'(0), y'(0))$, qui est un vecteur directeur de la tangente à C au point M_o. Or on sait que que $\overrightarrow{\text{grad}} g(M_o)$ est un vecteur non nul orthogonal à la tangente en M_o à C. Il s'ensuit que les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_o)$ et $\overrightarrow{\text{grad}} g(M_o)$ sont liés. CQFD.

Exemple. Prenons $D = \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ et $f(x,y) = x^3 + y^3$. Ici C est le cercle de centre l'origine et de rayon 1. C'est un domaine fermé et borné de $\mathbb{R}^2$; c'est donc un domaine compact. Notons que le gradient de g est donné par $\overrightarrow{\text{grad}} g(x,y) = 2x\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}}$ et qu'il ne s'annule pas sur C (il ne s'annule qu'en l'origine). Puisque C est un domaine compact et que f est continue, cette fonction admet un minimum et un maximum absolus sur C. Soit (x,y) l'un de ces points. Alors la restriction de f à C admet un extremum local en (x,y). Nous sommes sous les conditions d'applications du théorème de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = 3x^2\vec{\mathbf{i}} + 3y^2\vec{\mathbf{j}}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} g(x,y) = 2x\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}}$ sont liés. Le déterminant suivant est donc nul :

$$\begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2y & 3y^2 \end{vmatrix} = 6xy \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 6xy(y-x) \ .$$

On trouve 6 solutions possibles au problème (noter que le théorème ne donne qu'une condition nécessaire à l'existence d'un extremum, mais pas suffisante en général).

– $x = 0$ donne $(x, y) = \pm(0, 1)$ et $f(x, y) = \pm 1$,
– $y = 0$ donne $(x, y) = \pm(1, 0)$ et $f(x, y) = \pm 1$,
– $y = x$ donne $(x, y) = \pm(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $f(x, y) = \pm\sqrt{2}/2$.

Il s'ensuit que le maximum absolu de f sur C vaut 1 et qu'il est atteint en $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et que le minimum absolu de f sur C vaut -1, atteint en $(-1, 0)$ et $(0, -1)$.

Exercices du chapitre 5

1. Pour chacune des fonctions suivantes, écrire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (x_o, y_o), et donner une valeur approchée de $f(x_1, y_1)$. Comparer cette valeur avec la valeur donnée par une calculatrice.

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3$, $(x_o, y_o) = (1, 1)$, $(x_1, y_1) = (0,99\ ;\ 1,01)$.
b) $f(x, y) = e^{x+2y}$, $(x_o, y_o) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (0,02\ ;\ 0,03)$.
c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, $(x_o, y_o) = (5, 3)$, $(x_1, y_1) = (5,1\ ;\ 2,9)$.

2. Pour les fonctions suivantes, déterminer les points critiques et étudier les extréma locaux.

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.
b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
c) $f(x, y) = x^3 + y^3$.

3. Soient a, b, c des nombres réels avec $c > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\ .$$

Déterminer les points critiques de f, ses extréma locaux et montrer que f admet un maximum global que l'on déterminera.

4. Soient a, b, c des nombres réels avec $c \neq 0$. Soit $M_o(x_o, y_o)$ un point du plan qui n'est pas sur la droite $(x, y) = ax + by + c = 0$. En utilisant le théorème des extréma liés, montrer que le minimum de la fonction $f(M) = d(M_o, M)$ sur D est donné par

$$m = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

Quelle est la distance du point M_o à la droite D ? *Indication : on pourra dans le calcul remplacer la fonction f par son carré (pourquoi ?).*

5. Etudier les extréma (existence, valeurs) de la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3$ sur le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, et ceci de deux façons :

a) en paramétrant le cercle par $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$;
b) En appliquant le théorème des extréma liés.

6. Etudier les extréma de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

a) Déterminer les extréma locaux de f.

b) La fonction f possède-t-elle des extréma globaux sur $\mathbb{R}^2$?

c) Représenter le domaine

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ x+y \leqslant 1\}$$

Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum absolus de f sur T. Les déterminer.

9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4 \ .$$

a) Déterminer les extréma locaux de f.

b) Montrer l'inégalité $f(x,y) \leqslant 2r^2 - \frac{r^4}{4}$, où $r^2 = x^2 + y^2$. En étudiant le maximum de la fonction $r \mapsto 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $f(x,y) \leqslant 4$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Déterminer le maximum global de f et les points où il est atteint. La fonction f possède-t-elle un minimum global ?

10. Trouver le point de la droite $2x+3y = 1$ le plus proche de l'origine. On utilisera trois méthodes : extréma liés, paramétrisation de la droite, méthode géométrique (projection orthogonale de l'origine sur la droite).

11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$.

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Déterminer les points critiques de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

c) Existence et valeurs des maxima et minima de f restreinte au disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

12. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy \ e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

a) Etudier les extréma locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra simplifier cette étude en utilisant les symétries de la fonction f).

b) Existence et valeur du maximum M_r et du minimum m_r de f restreinte au cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r (deux méthodes : paramétrisation ou extréma liés).

c) Montrer que l'ensemble des nombres $\{M_r \ ; \ r \in \mathbb{R}_+\}$ (resp. $\{m_r \ ; \ r \in \mathbb{R}_+\}$) admet un maximum (resp. un minimum).

d) En déduire que f prend sur $\mathbb{R}^2$ des valeurs maximales et minimales que l'on déterminera.

6. Introduction à l'intégration des fonctions de plusieurs variables

Il est hors de question de donner dans ce cours un traitement général de l'intégration des fonctions de plusieurs variables. Les concepts requis dépassent largement le niveau d'un première année d'université. Ce chapitre consistera en le développement d'exemples et d'idées simples.

6.1. Circulation d'un champ de vecteurs

Motivation. Considérons un mobile ponctuel pouvant se déplacer dans un plan et repérons son mouvement par sa position $M(t)$ au temps t. Supposons qu'il se déplace sous l'action d'un champ de forces $\vec{F}(M)$, ce champ n'étant pas forcément constant et pouvant donc dépendre de la position M. Dans un petit intervalle de temps $[t_o, t_o + h]$, h petit, le mobile subit la translation $\overrightarrow{M(t_o)M(t_o + h)}$. Si l'on considère que le champ de forces varie peu sur l'intervalle $[M(t_o)M(t_o + h)]$, on définit le travail de $\vec{F}$ dans ce déplacement élémentaire comme étant le produit scalaire :

$$\Delta W \simeq \vec{F}(M(t_o)) \ . \ \overrightarrow{M(t_o)M(t_o + h)} \ .$$

Pour un "grand" intervalle de $[t_o, t_1]$, on se ramène au cas précédent en le divisant en petits intervalles de longueur h, où $h = (t_2 - t_1)/n$ et n un entier assez grand :

$$[t_o, t_o + h], \ [t_o + h, t_o + 2h], \ \ldots, [t_o + (n-1)h, t_1] \ .$$

On définit une apporximation du travail effectué par la force dans ce laps de temps comme somme de "petits travaux élémentaires" :

$$(1) \ W_{t_o \longrightarrow t_1} \simeq \vec{F}(M(t_o)).\overrightarrow{M(t_o)M(t_o + h)} + \cdots + \vec{F}(M(t_o + (n-1)h)).\overrightarrow{M(t_o + (n-1)h)M(t_1)} \ .$$

On définit le travail $W_{t0 \longrightarrow t_1}$ comme la limite, quand elle existe de l'expression (1) lorsque n tend vers $+\infty$. On démontre que si la fonction $M \mapsto \vec{F}(M)$ est continue sur un domaine ouvert D du plan et si l'arc paramétré $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est à valeurs dans D et est une fonction continûment dérivable de t, alors cette limite existe et est donnée par :

$$W_{t0 \longrightarrow t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(M(t)) \ . \ (x'(t), y'(t))dt \ .$$

Ceci nous amène à donner une définition générale de la circulation d'un champs de vecteurs le long d'un arc paramétré.

6.1.1. Définition. *Soient D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{V} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs continu. Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un arc paramétré continûment dérivable. On appelle circulation de $\vec{V}$ le long de γ l'expression :*

$$\int_\gamma \vec{V}(M) \ . \ \overrightarrow{dM} := \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \ . \ \gamma'(t) \ dt \ .$$

Remarque. Cette définition a bien un sens. En effet la fonction $t \in [a, b] \longrightarrow \vec{V}(\gamma(t))$ est continue comme composée de fonctions continues et il en est de même de $t \mapsto \gamma'(t)$ par hypothèse. Il est alors facile de voir que la fonction $t \mapsto \vec{V}(\gamma(t)) \ . \ \gamma'(t)$ est continue sur $[a, b]$ et son intégrale a donc un sens.

6.1.2. Proposition. *Soient D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{V_1}, \vec{V_2} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ des champs de vecteurs continus. Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un arc paramétré continûment dérivable. Alors pour tous réels λ et μ, on a*

$$\int_\gamma (\lambda\vec{V_1}(M) + \mu\vec{V_2}(M)) \ . \ \overrightarrow{dM} = \lambda \int_\gamma \vec{V_1}(M) \ . \ \overrightarrow{dM} + \mu \int_\gamma \vec{V_2}(M) \ . \ \overrightarrow{dM} \ .$$

Démonstration. Cette propriété découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale d'une fonction continue et de celle du produit scalaire.

Pour la pratique, on a besoin de définir la circulation d'un champ de vecteur sur des arcs beaucoup plus généraux. On dit qu'un champ de vecteur $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est continûment dérivable par morceaux (ou encore de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, si γ est continue et si l'on peut partitionner l'intervalle $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles $[a = a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{n-1}, a_n = b]$ tels que pour tout $k = 0, ..., n-1$, la restriction de γ à $[a_k, a_{k+1}]$ est continûment dérivable.

Exemple. Prenons $[a,b] = [0,3]$ et γ défini par

- $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$,
- $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [1,2]$,
- $\gamma(t) = (t, 2)$, $t \in [2,3]$.

Alors pour $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ décrit un arc de parabole, du point $\gamma(0) = (0,0)$ au point $\gamma(1) = (1,1)$, puis, pour $t \in [1,2]$, emprunte la première bissectice $y = x$ jusqu'au point $(2,2)$, et enfin, pour $t \in [2,3]$ décrit un segment horizontal d'ordonné 2 jusqu'au point $(3,2)$. On vérifie facilement que γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Noter que, comme on le voit sur cet exemple, on ne demande pas à la fonction γ d'être dérivable aux bords des intervalles de la partition : les dérivées à gauche et à droite existent mais ne sont pas forcément égales.

6.1.3. Théorème-Définition. *Soient D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{V} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs continu. Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $[a = a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{n-1}, a_n = b]$ de $[a,b]$ une partition de $[a,b]$ telle que pour $k = 0, ..., n-1$, la restriction de γ à $[a_k, a_{k+1}]$ soit continûment dérivable. Alors la quantité :*

$$\int_\gamma \vec{V}(M) \ . \ \overrightarrow{dM} := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \vec{V}(\gamma(t)) \ . \ \gamma'(t) \ dt$$

ne dépend pas du choix de la partition de $[a,b]$ et s'appelle la circulation de $\vec{V}$ le long de γ.

On dit qu'un champ de vecteur $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ *dérive d'un potentiel*, s'il existe une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles en tout point, telle que $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{V}$. Quand elle existe, la fonction f est appelée *un potentiel* associée $\vec{V}$. Elle n'est pas unique : si $\vec{V}$ dérive de f, il dérive aussi de $f + c$, pour toute constante réelle c.

6.1.4. Théorème. *Soient D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{V} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur continu. Supposons que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel f.*

a) *Pour tout arc continûment dérivable $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$, on a*

$$\int_\gamma \vec{V}(M) \ . \ \overrightarrow{dM} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(b)) \ .$$

En particulier la circulation de $\vec{V}$ sur un arc ne dépend que de l'origine et de l'extrémité de l'arc.

b) *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ est un arc continûment dérivable contenu dans un ligne de niveau de f, alors*

$$\int_\gamma \vec{V}(M) \ . \ \overrightarrow{dM} = 0 \ .$$

Démonstration. a) On a

$$\int_\gamma \vec{V}(M)\ .\ \overrightarrow{dM} = \int_a^b \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\gamma(t))\ .\ \gamma'(t)dt\ .$$

Par la formule de dérivation en chaîne, la fonction $t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\gamma(t))\ .\ \gamma'(t)$ est la dérivée de la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$. La formule en découle.

b) On a vu que si l'image de γ est contenue dans une ligne de niveau, alors $\gamma'(t)$, lorqu'il n'est pas nul, est un vecteur tangent à cette courbe au point $\gamma(t)$, et que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\gamma(t))$ est un vecteur normal à cette tangente. Il s'ensuit que dans l'intégrale

$$\int_a^b \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\gamma(t))\ .\ \gamma'(t)dt$$

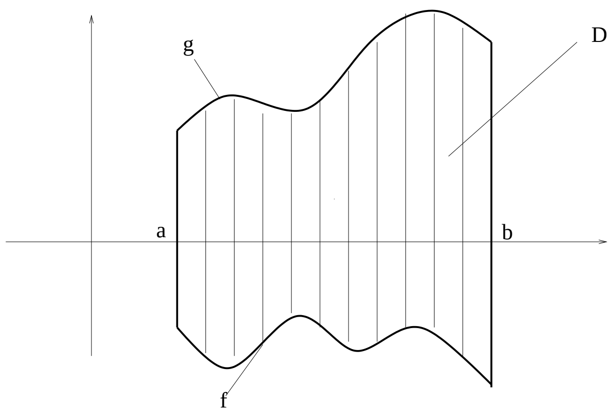
le produit scalaire est toujours nul et que cette intégrale est nulle. CQFD.

6.2. Intégration sur un domaine de $\mathbb{R}^2$.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f,\ g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, b]$. On considére le domaine D de $\mathbb{R}^2$ donné par les inégalités :

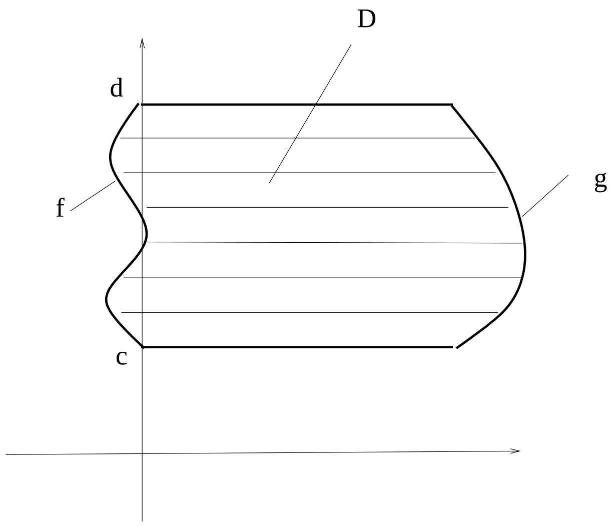
– $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$,
– $a \leqslant x \leqslant b$.

Un tel domaine compact sera appelé un domaine élémentaire vertical.



On définit un *domaine élémentaire horizontal* en échangeant les rôles des variables x et y. On se donne un intervalle $[c, d]$ de $\mathbb{R}$, des fonctions continues $f,\ g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(y) \leqslant g(y)$, $\in [c, d]$, et on définit D par les inégalités :

– $f(y) \leqslant x \leqslant g(y)$,
– $c \leqslant y \leqslant d$.



Exemples. Un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées sont des domaines élémentaires à la fois verticaux et horizontaux. Un disque est un domaine élémentaire à la fois vertical et horizontal. Par exemple, le disque unité $x^2 + y^2 \leqslant 1$ peut être définit comme le domaine élémentaire vertical

- $-1 \leqslant x \leqslant 1$,
- $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$,

ou comme le domaine élémentaire horizontal :

- $-1 \leqslant y \leqslant 1$,
- $-\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}$.

Un domaine compact du plan sera dit *admissible* si on peut le partitionner en petits domaines élémentaires verticaux ou horizontaux en le sectionnant par des droites parallèles aux axes des coordonnées.

Par exemple, la couronne C délimitée par les cercles de centre l'origine et de rayons 1 et 2 n'est pas un domaine élémentaire. Comme domaine, elle peut être présentée par les inégalités $x^1 + y^2 \geqslant 1$ et $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Cependant si l'on sectionne C par l'axe des abscisses, on obtient deux demi-couronnes qui sont des domaine éléméntaires verticaux :

$$C_+ \ : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \text{ et } y \geqslant 0 \ ,$$

$$C_- \ : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \text{ et } y \leqslant 0 \ ,$$

En effet, si $f \ [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction continue définie par

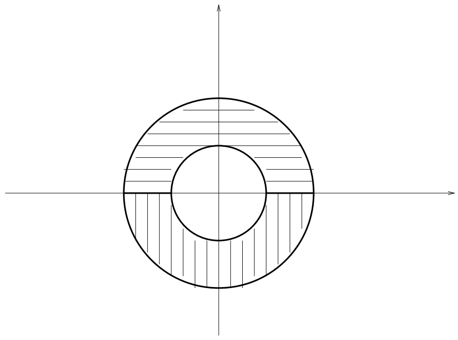
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [-2, -1] \cup [1, 2] \end{cases}$$

alors C_+ peut être présentée par

$$-2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \ ,$$

et C_- par

$$-2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant -f(x) \ .$$



6.2.1. Théorème–Définition. *Soit D un domaine élémentaire vertical défini comme précédemment. Soit $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'application*

$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x,y)dy$$

est continue sur $[a,b]$. On définit alors l'intégrale de φ sur D comme étant :

$$\iint\limits_D \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big\{ \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x,y)dy \Big\} dx\ .$$

Démonstration admise.

Remarque importante. Le réel x étant fixé, la fonction $y \mapsto \varphi(x,y)$ est continue comme composée de deux fonctions continues. On peut donc l'intégrer sur le segment $[f(x), g(x)]$ pour considérer la quantité

$$\int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x,y)dy\ .$$

En d'autres termes, cette quantité se calcule en considérant x comme une constante et y comme une variable muette.

6.2.2. Théorème–Définition. *Soit D un domaine élémentaire horizontal défini comme plus haut. Soit $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'application*

$$[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ y \mapsto \int_{f(y)}^{g(y)} \varphi(x,y)dx$$

est continue sur $[a,b]$. On définit alors l'intégrale de φ sur D comme étant :

$$\iint\limits_D \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big\{ \int_{f(y)}^{g(y)} \varphi(x,y)dx \Big\} dy\ .$$

Démonstration admise.

6.2.3. Théorème. *Soient D un domaine fondamental du plan, à la fois vertical et horizontal, et $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'intégrale de φ sur D est la* *même que l'on considère D comme un domaine vertical ou horizontal. En particulier, si D est le rectangle $[a,b] \times [c,d]$, on a l'égalité :*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big\{ \int_a^b \varphi(x,y)dx \Big\} dy = \int_a^b \Big\{ \int_c^d \varphi(x,y)dy \Big\} dx \ .$$

Démonstration admise.

6.2.4. Théorème-Définition. *Soient D un domaine compact admissible et $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Partitionnons D en domaines élémentaires D_1, ...,D_n en le coupant avec des droites horizontales ou verticales. Alors le nombre*

$$\iint\limits_{D} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

ne dépend pas du partitionnement de D choisi et s'appelle l'intégrale de φ sur le domaine D.

Démonstration admise.

L'intégrale d'une fonction continue de deux variables sur un domaine compact admissible possède les interprétations géométriques suivantes. Tout d'abord si φ est la fonction constante de valeur 1, l'intégrale

$$\mathcal{A} = \iint\limits_{D} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} dx\,dy$$

est par définition *l'aire du domaine compact admissible D.*

Supposons φ par forcément constante mais positive. Soit V_φ le domaine de l'espace défini comme l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) vérifiant :

$$(x,y) \in D \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant \varphi(x,y) \ .$$

C'est la partie de l'espace située au-dessus de D et en-dessous de la surface d'équation $z = \varphi(x,y)$. Alors l'intégrale

$$\mathcal{V} = \iint\limits_{D} \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

est par définition le *volume du domaine V_φ.*

$$\boxed{\textbf{Annales de l'année précédente}}$$

UNIVERSITÉ DE POITIERS
L1 Parcours Renforcé
Mathématiques
Fonctions de Plusieurs Variables
Année 2008-2009

Devoir Libre

Problème I.

Soit f la fonction numérique de deux variables définie par

$$f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y \ .$$

1. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine de définition de f. Montrer que D est un domaine ouvert. Montrer qu'on peut l'écrire comme la réunion disjointe des trois domaines ouverts suivants :

$$D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy < 0\} \ , \ D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy > 1, \ x > 0, \ y > 0\} \ ,$$

$$D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy > 1, \ x < 0, \ y < 0\} \ .$$

2. Montrer que le domaine D_0 est étoilé par rapport à l'origine $O(0,0)$, c'est-à-dire que si $M(x,y) \in D_0$, alors le segment $[OM]$ est encore dans D_0.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 1$.

4. Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points de D_+ et $t \in [0,1]$. Soit $M(x,y)$ le barycentre de M_1 affecté du coefficient t et M_2 affecté du coefficient $(1-t)$, de sorte que $x = tx_1 + (1-t)x_2$ et $y = ty_1 + (1-t)y_2$. Montrer qu'on a les inégalités successives suivantes :

(i) $xy > (\dfrac{t}{y_1} + \dfrac{1-t}{y_2})(ty_1 + (1-t)y_2)$,

(ii) $xy > t^2 + (1-t)^2 + t(1-t)(\dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{y_2}{y_1})$,

(iii) $xy > t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1$.

5. En déduire que D_+ est convexe. Expliquez rapidement pourquoi D_- est lui aussi convexe.

6. Calculer les dérivées partielles de f sur D.

7. Montrer que f est constante sur chacun des domaines D_0, D_- et D_+.

8. Calculer $f(0,0)$, $f(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ et $f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. En déduire les valeurs des constantes de la question 7.

9. (*Question bonus.*) Donner une autre démonstration du fait que f est constante sur chacun des domaines D_-, D_+, D_0.

Problème II.

Soit f la fonction numérique de deux variables données par

$$f(x,y) = \frac{2(y-x)}{x^2+y^2+2} \ .$$

On fixe un plan euclidien $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, de sorte que l'on identifie f à une fonction définie sur $\mathcal{P}$.

1. Donner le domaine de définition de f et l'ensemble sur lequel les dérivées partielles premières sont définies.

On note C_λ la courbe de niveau $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, décrire C_λ géométriquement.

3. Quelle est l'image de f ?

4. Montrer que f admet un minimum et un maximum absolus. Déterminer en quels points ils sont atteints et leurs valeurs.

5. Calculer le gradient de f en tout point où il est défini.

6. Montrer qu'en tout point de C_0, le gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

7. Ecrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(1,1)$. En déduire une valeur approchée de $f(0,99\ ;\ 1,02)$, que l'on comparera avec la valeur donnée par une calculatrice (donner le pourcentage d'erreur).

8. (*Question bonus.*) Montrer qu'en tout point (x,y), $\mathrm{grad}f(x,y)$ est orthogonal à la ligne de niveau passant par (x,y). Remarque : *on dit qu'un vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à un cercle $\mathcal{C}$ en un point $M \in \mathcal{C}$, si $\vec{v}$ est orthogonal à la tangente à $\mathcal{C}$ en M, autrement dit, s'il est parallèle au rayon passant par M.*

UNIVERSITÉ DE POITIERS
L1 Parcours Renforcé
Mathématiques
Fonctions de Plusieurs Variables
Année 2008-2009

Contrôle de Mathématiques

Vendredi 10 avril 2009, 10h30–12h30

Question de cours

Soient U un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, et $M_o(x_o, y_o)$ un point de U.

1. Préciser sous quelles hypothèses la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de M_o et donner la forme de celui-ci.

Soit f la fonction numérique de deux variables définie par $f(x, y) = \ln(y - \sin x)$.

2. Déterminer le domaine de définition de f. Quelle propriété remarquable possède-t-il ?

3. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $M_o(1, 0)$ et donner son expression.

4. Comparer la valeur approchée de $f(1,1; 0,9)$ donnée par votre calculatrice à celle obtenue par le développement limité à l'ordre 1 de f.

Exercice I

On note U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0 \text{ et } y > 0\} \ .$$

On se propose de déterminer toutes les fonctions numériques $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles continues à l'ordre 1, qui vérifient l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \quad , \quad (x, y) \in U \ .$$

1. Montrer que U est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $\varphi : U \longrightarrow U$ l'application donnée par $\varphi(x, y) = (xy, y/x)$. Montrer que φ est une bijection de U dans U et exhiber sa bijection réciproque.

On fixe $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles premières continues et vérifiant (E). On pose :

$$g(u, v) = f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \ , \ (u, v) \in U \ .$$

3. Montrer que g admet des dérivées partielles premières continues et les calculer en fonction de celles de f. Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{u} \ , \ (u,v) \in U \ .$$

4. En déduire que g doit être de la forme $(u,v) \mapsto \ln(u) + h(v)$, où h est une fonction continûment dérivable.

5. En déduire que les solutions de (E) doivent être de la forme : $f(x,y) = \ln(xy) + h(y/x)$, où h est une fonction continûment dérivable.

6. Réciproquement, montrer que les fonctions données en 5. sont bien solutions de (E).

Exercice II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction numérique donnée par $f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$.

1. Montrer que le gradient de f existe en tout point de $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer la courbe C_λ de niveau λ. Quelle est l'image de f ?

3. Pour tout $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M)$ est orthogonal à la courbe de niveau passant par M.

4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant f par la fonction g donnée par $g(x,y) = \arctan(y/x)$, et $\mathbb{R}^2$ par le domaine ouvert

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0\} \ .$$

Remarque. On rappelle que arctan est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$ vérifiant $\tan(\arctan(x)) = x$.

UNIVERSITÉ DE POITIERS
L1 Parcours Renforcé
Mathématiques
Fonctions de Plusieurs Variables
Année 2008-2009

Examen de Mathématiques

Vendredi 29 mai 2009, 9h–12h

Exercice I

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+y)\ e^{-(x^2+y^2)}$. L'objet de cet exercice est de déterminer les extrema absolus de f sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer l'existence, et donner les valeurs, des dérivées partielles premières et secondes de f en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que les points critiques de f sont $A(1/2, 1/2)$ et $B(-1/2, -1/2)$.

3. Déterminer la nature des points A et B (maximum ou minimum local, point selle, ...).

Pour r réel $\geqslant 0$, on note C_r la courbe de niveau 0 de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$.

4. Expliquer pourquoi f possède un maximum global M_r (resp. un minimum global m_r) sous la contrainte $g(x,y) = 0$?

5. Montrer que $M_r = \sqrt{2}r\ e^{-r^2}$ et $m_r = -\sqrt{2}\ r\ e^{-r^2}$.

6. Etudier les variations de la fonction $h\ \ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \longrightarrow \sqrt{2}r\ e^{-r^2}$ et montrer qu'elle possède un maximum M, dont on donnera la valeur.

7. Conclure quant à l'existence et la valeur du maximum absolu (resp. minimum absolu) de f sur $\mathbb{R}^2$. En quels points ces valeurs sont-elles atteintes ?

Exercice II

L'objet de cette exercice est l'étude d'une *lemniscate* de Bernoulli. Elle est donnée par la ligne $\mathcal{L}$ de niveau 0 de la fonction suivante :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 4(x^2-y^2)\ ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

1. En quels points de $\mathcal{L}$ le gradient de f s'annule-t-il ? En quels points peut-on affirmer que $\mathcal{L}$ admet une tangente ?

2. Vérifier que le point $M_0(\sqrt{5/8}, \sqrt{3/8})$ est sur la courbe $\mathcal{L}$. Montrer qu'au voisinage de M_0 la courbe $\mathcal{L}$ est le graphe d'une fonction dérivable φ de x, définie sur un certain intervalle I contenant $\sqrt{5/3}$.

3. Donner une formule exprimant $\varphi'(x)$ en fonction de x et $\varphi(x)$. Quelle est la valeur de $\varphi'(\sqrt{5/3})$?

4. En quels points de $\mathcal{L}$ la tangente, si elle est définie, est-elle verticale ?

5. Rechercher de même les tangentes horizontales.

6. Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{L}$. Montrer que $(x^2 + y^2)^2 \leqslant 4(x^2 + y^2)$. En déduire que la courbe $\mathcal{L}$ est contenue dans le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 2.

Montrer que $\mathcal{L}$ est un domaine compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice III

Soient D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique admettant des dérivées partielles premières continues. On suppose que la courbe de niveau $C = \{(x, y) \in D \ ;\ g(x, y) = 0\}$ est un domaine *compact* de $\mathbb{R}^2$. On suppose de plus que le gradient de g ne s'annule pas sur C.

Soit $A(a, b)$ un point fixé de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à C.

1. Montrer que la fonction $\mathbb{R}^2 \longrightarrow RR$, $M \longrightarrow d(A, M)$, admet un maximum et un minimum sur la courbe C. Ici $d(A, M) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ désigne la distance de A à $M(x, y)$.

2. Soit B un point de C où la fonction $M \mapsto d(A, M)$ admet un extremum sous contrainte. Montrer que la droite (A, B) est perpendiculaire à la tangente $\mathcal{T}_B(C)$ en B à la courbe C. *Indication* : on pourra étudier les extrema de la fonctions $M \longrightarrow d(A, M)^2$ sur C.