

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)  
*préparée à l'Institut Fourier*  
*Laboratoire de Mathématiques*  
*UMR 5582 CNRS-UJF*

## VARIÉTÉS HOROSPHÉRIQUES DE FANO

**Boris PASQUIER**

*Soutenue à Grenoble le 27 octobre 2006 devant le jury :*

Victor BATYREV (Tübingen, Allemagne)  
Laurent BONAVERO (Université de Grenoble I)  
Michel BRION (CNRS, Université de Grenoble I), Directeur  
Olivier DEBARRE (Université de Strasbourg), Président  
Laurent MANIVEL (CNRS, Université de Grenoble I)

*Au vu des rapports de Victor BATYREV et Olivier DEBARRE*



# Variétés horosphériques de Fano

Boris Pasquier

27 octobre 2006



## Remerciements

J'ai pris beaucoup de plaisir à faire cette thèse. Cela est en grande partie dû à mon directeur de thèse Michel Brion ; je le remercie beaucoup pour le temps qu'il m'a consacré, pour sa patience et aussi son optimisme.

Je souhaite remercier Olivier Debarre d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. J'ai beaucoup apprécié sa relecture minutieuse ainsi que ses commentaires pertinents. Je remercie aussi Victor Batyrev d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse et d'être venu d'Allemagne pour assister à ma soutenance.

J'aimerais remercier les membres permanents de l'institut Fourier qui intègrent parfaitement les thésards à la vie du labo, dont Laurent Bonavero et Laurent Manivel qui ont accepté de faire partie du jury. Je remercie aussi le personnel administratif pour sa disponibilité et son efficacité.

Enfin, je remercie les thésards actuels et anciens de l'institut Fourier et d'ailleurs, tous mes amis dont Claire, Christophe, Vincent..., et toute ma famille. En particulier, je tiens à exprimer un très très grand merci à mes parents pour ces 26 dernières années et les années à venir !



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Notations</b>	<b>11</b>
<b>2 Variétés horosphériques lisses</b>	<b>21</b>
<b>3 Classification des plongements de Fano</b>	<b>31</b>
<b>4 Majoration du degré et du nombre de Picard</b>	<b>41</b>
4.1 Majoration du degré . . . . .	41
4.2 Majoration du nombre de Picard . . . . .	52
<b>5 Sur l'amplitude des diviseurs d'une variété horosphérique projective</b>	<b>55</b>
<b>6 Détermination des polygones <math>G/H</math>-réflexifs sur certains exemples</b>	<b>59</b>
6.1 Outils de calcul . . . . .	60
6.2 $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ . . . . .	62
6.3 $(SL_2 \times SL_2)/U$ ou $SL_3/U$ . . . . .	69
<b>7 Quelques exemples de variétés horosphériques de Fano</b>	<b>85</b>
7.1 Plongements de $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ . . . . .	85
7.2 Description de quelques plongements de $SL_3/U$ . . . . .	94
<b>Bibliographie</b>	<b>102</b>
<b>Index</b>	<b>105</b>





# Introduction

Une variété complexe projective  $X$  est dite de Fano si elle est normale et si son diviseur anticanonique  $-K_X$  est de Cartier et ample. On sait qu'il existe seulement un nombre fini de familles de variétés lisses, de Fano et de dimension donnée. Cependant ces familles sont seulement connues jusqu'en dimension 3.

Les variétés toriques donnent beaucoup d'exemples de variétés de Fano. Plus précisément, V. Batyrev a classifié les variétés toriques de Fano de dimension  $n$  en termes des polytopes réflexifs de dimension  $n$  [Ba94] : ce sont les polytopes convexes de  $\mathbb{R}^n$  à sommets dans  $\mathbb{Z}^n$  contenant 0 dans leur intérieur et tels que leur polytope dual vérifie les mêmes hypothèses.

De plus, certaines propriétés ou certains invariants géométriques des variétés toriques de Fano, comme la lissité, le nombre de Picard ou le degré, se lisent facilement sur le polytope réflexif associé. Cela a permis à O. Debarre de majorer le degré  $(-K_X)^d$  des variétés toriques lisses de Fano en fonction de la dimension  $d$  et du nombre de Picard [De03]. D'autre part, C. Casagrande a récemment donné une majoration optimale du nombre de Picard des variétés toriques  $\mathbb{Q}$ -factorielles et de Fano en fonction de la dimension [Ca06].

Cette thèse a pour but de généraliser tous ces résultats aux variétés horosphériques. Soit  $G$  un groupe algébrique réductif connexe. Un  $G$ -espace homogène est dit horosphérique de rang  $n$  si c'est un fibré en tores  $(\mathbb{C}^*)^n$  sur une variété de drapeaux. Voici quelques exemples d'espaces homogènes horosphériques  $G/H$  :

	$G$	$H$	rang	dimension
1	$(\mathbb{C}^*)^n$	$\{1\}$	$n$	$n$
2	$G$	un sous-groupe parabolique $P$	0	$\dim G - \dim P$
3	$SL_2$	$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	1	2
4	$SL_2 \times \mathbb{C}^*$	$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \times \{1\}$	2	3
5	$SL_2 \times SL_2$	$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	2	4
6	$SL_3$	$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	2	5

Une variété horosphérique est un plongement d'un espace homogène horosphérique  $G/H$ , c'est-à-dire une  $G$ -variété normale contenant une orbite ouverte isomorphe à  $G/H$ ; son rang est celui de  $G/H$ . Parmi les variétés horosphériques, on compte les variétés toriques (lorsque  $G/H$  est un tore : exemple 1) et les variétés de drapeaux (exemple 2). Ces dernières sont lisses et de Fano.

Les variétés horosphériques font partie de la famille des variétés sphériques. Les plongements d'un espace homogène sphérique  $G/H$  fixé ont été classifiés en termes d'éventails coloriés par D. Luna et T. Vust [LV83]. Lorsque  $G/H$  est horosphérique de rang  $n$ , on montre que les plongements de Fano de  $G/H$  sont classifiés en termes de certains polytopes rationnels, dits  $G/H$ -réflexifs (voir la définition 3.3). Ces polytopes sont de dimension  $n$  (tout comme les éventails coloriés). Il est important de remarquer que la dimension de  $G/H$  est plus grande que  $n$ , avec égalité si et seulement si  $G/H$  est un tore; dans ce dernier cas, les polytopes  $G/H$ -réflexifs sont les polytopes réflexifs définis par V. Batyrev. A rang égal, les polytopes  $G/H$ -réflexifs peuvent être beaucoup plus nombreux que les polytopes réflexifs. Lorsque  $G$  et  $H$  sont comme dans l'exemple 6, il y a, à automorphisme près, 398 polytopes  $G/H$ -réflexifs (calcul effectué dans la partie 6.3). En comparaison, on compte seulement 16 polytopes réflexifs de dimension 2.

V. Alexeev et M. Brion ont montré que l'ensemble des classes d'isomorphisme des variétés sphériques de Fano de dimension fixée est fini [AB04]. On verra que la classification précédente permet d'avoir une version effective de ce résultat pour les variétés horosphériques de Fano dont l'orbite ouverte est fixée.

Dans le premier chapitre de la thèse, on présente la classification de Luna et Vust dans le cas d'un espace homogène horosphérique  $G/H$ .

Un critère de lissité est donné pour les variétés horosphériques dans le second chapitre. Ce critère, qui généralise le résultat de F. Pauer [Pa83], a aussi été obtenu récemment par D. Timashev [Ti06, th. 28.3]. On montre aussi que, comme dans le cas torique, toute sous-variété irréductible et stable par  $G$  d'une variété horosphérique lisse, est aussi lisse.

Dans le chapitre suivant, on classe les plongements de Fano de  $G/H$  en termes de polytopes  $G/H$ -réflexifs, et on donne une borne explicite du nombre de classes d'isomorphisme de plongements de Fano de  $G/H$ .

Grâce à cette classification, on démontre les résultats suivants, dans le chapitre 4.

**Théorème 0.1.** *Soit  $X$  une variété horosphérique de Fano, localement factorielle, de dimension  $d$ , de rang  $n$  et de nombre de Picard  $\rho$ . Si  $\rho > 1$  alors*

$$(-K_X)^d \leq d! d^{d\rho+n}.$$

Si  $\rho = 1$ , on a

$$(-K_X)^d \leq d! (d+1)^{d+n}.$$

Remarquons qu'une variété lisse est toujours localement factorielle. La réciproque est vraie pour les variétés toriques mais elle est fautive pour les variétés horosphériques.

**Théorème 0.2.** *Soit  $X$  une variété horosphérique de Fano,  $\mathbb{Q}$ -factorielle, de dimension  $d$ , de rang  $n$  et de nombre de Picard  $\rho$ . On a*

$$\rho \leq n + d \leq 2d$$

avec  $\rho = 2d$  si et seulement si  $d$  est paire et  $X = (S_3)^{d/2}$  où  $S_3$  est l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en trois points non alignés.

Les preuves de ces deux résultats sont inspirées de celles des résultats analogues dans le cas torique ([De03], [Ca06]). Il faut prendre en compte le fait que les polytopes  $G/H$ -réflexifs ne sont pas à sommets entiers comme dans le cas torique. Cependant, les sommets non entiers sont parmi un nombre fini de points rationnels qui dépendent seulement de  $G/H$ , ce qui permet

de contrôler les changements qui apparaissent entre les cas torique et horosphérique. On utilisera alors des arguments de géométrie convexe ainsi que des éléments de combinatoire sur les groupes algébriques réductifs.

On remarquera que les variétés de nombre de Picard 1 sont souvent étudiées à part : quelles sont ces variétés ? Les seules variétés toriques lisses et de nombre de Picard 1 sont les espaces projectifs. Par contre, parmi les variétés horosphériques lisses de nombre de Picard 1, on compte les variétés de drapeaux  $G/P$  avec  $P$  maximal, mais aussi des variétés non homogènes. L'étude de ces variétés est en cours.

Dans le chapitre 5, on démontre le résultat suivant.

**Théorème 0.3.** *Soient  $X$  une variété horosphérique projective de rang  $n$ , et  $D$  un diviseur de Cartier et ample. Alors  $(n - 1)D$  est très ample. Si de plus  $X$  est localement factorielle, alors  $D$  est très ample.*

Dans le cas torique, la première partie de ce théorème est due à G. Ewald et U. Wessels [EW91], et la deuxième partie à M. Demazure [De70]. On utilisera un résultat combinatoire de [EW91] pour démontrer ce résultat.

Une question naturelle se pose : est-ce que ces trois théorèmes peuvent se généraliser aux variétés sphériques ?

La première assertion du théorème 0.3 reste vraie pour les variétés sphériques. Quant au reste, on sait que toute variété sphérique de Fano  $X$  dégénère en une variété horosphérique (ou même torique)  $X_0$  qui est projective et  $\mathbb{Q}$ -Fano, c'est-à-dire, il existe un entier positif  $k$  tel que  $-kK_{X_0}$  est de Cartier et ample [BA04]. Mais l'entier  $k$  peut être très grand, et la variété  $X_0$  est en général très singulière. Ainsi tous ces résultats ne sont qu'une première étape dans la classification des variétés sphériques de Fano.

Enfin dans les deux derniers chapitres (6 et 7), on étudie quelques exemples en rang 2. Le chapitre 6 est consacré au calcul de polytopes  $G/H$ -réflexifs pour trois espaces homogènes horosphériques particuliers :  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ ,  $(SL_2 \times SL_2)/U$  et  $SL_3/U$  (exemples 4, 5 et 6). Dans le dernier chapitre, on montre que les plongements projectifs de  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$  et  $(SL_2 \times SL_2)/U$  sont toriques. Il faut aller jusqu'en dimension 5 pour obtenir des exemples de variétés horosphériques lisses, de Fano et de rang 2, qui ne sont pas toriques (par exemple les plongements de  $SL_3/U$ ). On obtient la liste des 16 plongements lisses de Fano de  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ . Ensuite on étudie quelques exemples

de plongements de Fano de  $SL_3/U$ , et on explique comment décrire les 27 plongements lisses de Fano de  $SL_3/U$  en termes d'éclatements de centres (lisses) et  $G$ -stables. Ce dernier point n'est pas surprenant, car on sait que tout morphisme propre birationnel et  $G$ -équivariant entre variétés sphériques lisses de rang 2 est une suite d'éclatements de sous-variétés irréductibles et stables par  $G$  [Br94].

# Chapitre 1

## Notations

Toutes les variétés considérées sont des variétés algébriques sur  $\mathbb{C}$ .

On se donne un groupe algébrique  $G$  réductif (c'est-à-dire qui ne contient aucun sous-groupe distingué isomorphe à  $\mathbb{C}^n$ ) et connexe sur  $\mathbb{C}$ , un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ , un tore maximal  $T$  de  $B$  et le radical unipotent  $U$  de  $B$ . On note  $R$  l'ensemble des racines de  $(G, T)$ ,  $R^+$  l'ensemble des racines positives (c'est-à-dire l'ensemble des racines de  $(B, T)$ ),  $S$  l'ensemble des racines simples,  $\Lambda$  (respectivement  $\Lambda^+$ ) le groupe des caractères de  $B$  ou de  $T$  (respectivement l'ensemble des caractères dominants) et  $W$  le groupe de Weyl de  $(G, T)$ . Pour toute racine simple  $\alpha$ , on note  $\check{\alpha}$  sa coracine et  $\omega_\alpha$  le poids fondamental associé à  $\alpha$ .

Pour tout sous-groupe fermé  $H$  de  $G$ ,  $N_G(H)$  désigne le normalisateur de  $H$  dans  $G$ , et  $R_u(H)$  est le radical unipotent de  $H$ .

Lorsque  $I \subset S$ , on note  $W_I$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions simples  $s_\alpha$  pour tout  $\alpha \in I$ , et de même  $R_I$  (respectivement  $R_I^+$ ) désigne l'ensemble des racines (respectivement positives) qui sont combinaisons linéaires des racines simples de  $I$ . On note  $P_I$  le sous-groupe parabolique de  $G$  engendré par  $B$  et  $W_I$ . Alors  $I \mapsto P_I$  est une bijection entre l'ensemble des parties de  $S$  et l'ensemble des sous-groupes paraboliques contenant  $B$  [Sp98, th. 8.4.3].

Pour tout caractère dominant  $\lambda$ , on note  $V(\lambda)$  le  $G$ -module simple de plus grand poids  $\lambda$  [Hu75, ch.XI], et  $V(\lambda)^*$  son dual. On désigne par  $v_\lambda$  un vecteur propre de  $V(\lambda)$  de poids  $\lambda$ , et le stabilisateur de la droite  $\mathbb{C}v_\lambda$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$  qu'on note  $P(\lambda)$ . En écrivant

$\lambda = \sum_{\alpha \in S} x_\alpha \omega_\alpha$ , les  $x_\alpha$  étant des entiers positifs ou nuls, on a  $P(\lambda) = P_I$  où  $I$  est l'ensemble des racines simples  $\alpha$  telles que  $x_\alpha$  soit nul.

Les  $G$ -modules considérés seront toujours rationnels et de dimension finie. Si  $V$  est un  $G$ -module, on note  $V^G$  (respectivement  $V^U$ ) l'ensemble des points fixes de  $V$  sous l'action de  $G$  (respectivement  $U$ ), et  $V^{(B)}$  l'ensemble des vecteurs propres de  $V$  sous l'action de  $B$ . Comme  $V$  est semi-simple, on a une décomposition en  $G$ -modules simples (où les  $m_\lambda$  sont des entiers positifs ou nuls) :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} V(\lambda)^{\oplus m_\lambda} \quad \text{et} \quad V^U = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} (\mathbb{C}v_\lambda)^{\oplus m_\lambda}.$$

**Définition 1.1.** Un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  contenant  $U$  est dit *horosphérique*. Dans ce cas, on dit aussi que l'espace homogène  $G/H$  est horosphérique.

**Exemple 1.2.** Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$  et soient  $\chi_1, \dots, \chi_n$  des caractères de  $P$ . Alors l'intersection des noyaux des  $\chi_i$  dans  $P$  est un sous-groupe horosphérique.

En fait tout sous-groupe horosphérique  $H$  est de cette forme.

**Proposition 1.3.** *Soit  $H$  un sous-groupe horosphérique de  $G$ . Il existe une unique sous-groupe parabolique  $P$  contenant  $B$  tel que  $H$  soit l'intersection de noyaux de caractères de  $P$ . De plus,  $P = N_G(H)$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème de Chevalley [Hu75, 11.2], il existe un  $G$ -module  $V$  et une droite  $L$  de  $V$  telles que  $H$  soit le stabilisateur de  $L$ , c'est-à-dire  $H = \{x \in G \mid x.L = L\}$ .

Décomposons  $V$  en somme directe de  $G$ -modules simples :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0^+} V(\lambda)^{\oplus m_\lambda},$$

avec  $m_\lambda$  non nul pour tout  $\lambda$  dans un sous-ensemble fini  $\Lambda_0^+$  de  $\Lambda^+$ . Comme  $U \subset H$ , on a  $L \subset V^U = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0^+} (\mathbb{C}v_\lambda)^{\oplus m_\lambda}$ . Soit  $\Lambda_1^+ \subset \Lambda_0^+$  un sous-ensemble minimal tel que  $L \subset \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1^+} (\mathbb{C}v_\lambda)^{\oplus m_\lambda}$ . Alors il existe  $V' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1^+} V(\lambda) \subset V$  tel que la projection  $L'$  de  $L$  sur  $V'$  vérifie  $H = \{x \in G \mid x.L' = L'\}$ . On peut donc supposer que  $L$  est engendrée par un vecteur de la forme  $\sum_{\lambda \in \Lambda_1^+} a_\lambda v_\lambda$

avec tous les  $a_\lambda \neq 0$ . Notons  $P = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_1^+} P(\lambda)$ .

Montrons que  $P$  convient. Le théorème de Chevalley nous dit que

$$\begin{aligned} H &= \{x \in G \mid \exists \lambda_0(x) \in \mathbb{C}^*, x.v = \lambda_0(x)v\} \\ &= \{x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda_1^+} P(\lambda) \mid \forall \lambda, \mu \in \Lambda_1^+, \lambda(x) = \mu(x)\}. \end{aligned}$$

Soit  $\mu \in \Lambda_1^+$ , alors  $H = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_1^+} \ker(\lambda - \mu) \subset P$ .

Montrons que  $P = N_G(H)$ . On a clairement  $P \subset N_G(H)$ , de plus  $R_u(H) = R_u(P)$  et  $P = N_G(R_u(P))$ , donc  $N_G(H) \subset N_G(R_u(H)) = P$ .  $\square$

**Définition 1.4.** Soit  $H$  un sous-groupe horosphérique. On note  $I$  le sous-ensemble de  $S$  tel que  $P = P_I$ . Puis on définit  $M$  comme l'ensemble des caractères de  $P$  dont la restriction à  $H$  est triviale; c'est un sous-réseau de  $\Lambda$ . On note  $N$  le réseau dual de  $M$ . Le rang de  $M$  est appelé le rang de  $G/H$ ; on le note  $n$ . On notera aussi  $d$  la dimension de  $G/H$ , on a évidemment

$$d = n + \dim(G/P) = n + \sharp(R^+ \setminus R_I^+). \quad (1.4.1)$$

On pose  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.5.** L'espace homogène  $G/H$  est l'espace total d'une fibration sur la variété de drapeaux  $G/P$  de fibre le tore  $P/H$ . Ce dernier est isomorphe au tore dual de  $M$  par l'application :

$$\begin{array}{ccc} P/H & \longrightarrow & \{\text{homomorphismes de groupes } M \rightarrow \mathbb{C}^*\} \\ pH & \longmapsto & [\chi \mapsto \chi(p)]. \end{array}$$

On va classifier les espaces homogènes horosphériques  $G/H$  en termes de sous-réseaux de  $\Lambda$  et de sous-ensembles de  $S$ .

**Proposition 1.6.** *La constuction ci-dessus qui à un espace homogène horosphérique  $G/H$  associe le couple  $(M, I)$  définit une bijection de l'ensemble des  $G$ -espaces homogènes horosphériques sur l'ensemble des couples  $(M, I)$ , où  $I$  est un sous-ensemble de  $S$  et  $M$  un sous-réseau de  $\Lambda$  tel que pour tous  $\alpha \in I$  et  $\chi \in M$ ,  $\langle \chi, \check{\alpha} \rangle = 0$ .*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que pour tout  $\chi \in \Lambda$ , la condition  $\langle \chi, \check{\alpha} \rangle = 0$  pour  $\alpha \in I$  est équivalente au fait que  $\chi$  s'étend en un caractère de  $P_I$ .



Ensuite, à un couple  $(M, I)$  vérifiant cette condition, on associe l'espace homogène horosphérique  $G/H$ , où  $H$  est l'intersection des noyaux des caractères  $\chi \in M$  dans  $P_I$ . On vérifie alors facilement que les deux applications sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

**Définition 1.7.** Un *plongement* d'un espace homogène  $G/H$  est un couple  $(X, x)$ , où  $X$  est une  $G$ -variété algébrique normale et  $x$  est un point de  $X$ , tels que l'orbite de  $x$  dans  $X$  soit ouverte et isomorphe à  $G/H$ .

Deux plongements  $(X, x)$  et  $(X', x')$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme  $G$ -équivariant de  $X$  sur  $X'$  qui envoie  $x$  sur  $x'$ .

Une *variété horosphérique* est une  $G$ -variété algébrique normale qui contient une orbite ouverte isomorphe à un espace homogène horosphérique. Le rang d'une variété horosphérique est le rang de sa  $G$ -orbite ouverte.

Un espace homogène  $G/H$  est dit *sphérique* s'il contient une orbite ouverte sous l'action d'un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ . Une *variété sphérique* est une  $G$ -variété algébrique normale qui contient une orbite ouverte isomorphe à un espace homogène sphérique. Toute variété horosphérique est sphérique ; ceci résulte en effet de la décomposition de Bruhat.

**Remarque 1.8.** Soit  $(X, x)$  est un plongement d'un espace homogène sphérique (respectivement horosphérique)  $G/H$ . Alors  $X$  est une variété sphérique (respectivement horosphérique).

Inversement, soit  $X$  une variété sphérique (respectivement horosphérique). Soit  $x$  un point de l'orbite ouverte de  $X$ . Notons  $H$  le stabilisateur de  $x$  dans  $G$ . Alors,  $G/H$  est un espace homogène sphérique (respectivement horosphérique), et  $(X, x)$  est un plongement de  $G/H$ . Il faut remarquer que la classe d'isomorphisme du plongement  $(X, x)$  dépend du choix de  $x$ . En effet, soit  $x'$  un autre point de l'orbite ouverte de  $X$ . Les plongements  $(X, x)$  et  $(X, x')$  sont isomorphes si et seulement si le stabilisateur de  $x'$  dans  $G$  est aussi  $H$  ; autrement dit si et seulement si on a  $x' = p.x$ , où  $p \in P = N_G(H)$ . Ainsi, il ne faut pas confondre « classe d'isomorphisme de plongements de  $G/H$  » et « classe d'isomorphisme de variétés horosphériques dont l'orbite ouverte est isomorphe à  $G/H$  ».

Dans la suite de la thèse, le point d'un plongement est sous-entendu : « soit  $X$  un plongement de  $G/H$  » signifie rigoureusement « soit  $(X, x)$  un plongement de  $G/H$  ».

La classification des plongements d'un espace homogène sphérique fixé

est obtenue par l'étude de leurs orbites sous les actions de  $G$  et  $B$ , mais aussi de leurs diviseurs irréductibles stables sous ces actions.

**Définition 1.9.** Soit  $G/H$  un espace homogène sphérique. On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des diviseurs irréductibles de  $G/H$  qui sont stables par  $B$  mais non par  $G$ . Les éléments de  $\mathcal{D}$  sont appelés *couleurs*.

Soit  $X$  un plongement de  $G/H$ . On note  $X_1, \dots, X_m$  les diviseurs irréductibles de  $X$  stables par  $G$ . On peut identifier  $\mathcal{D}$  avec l'ensemble des diviseurs irréductibles de  $X$  qui sont stables par  $B$  mais non par  $G$ . Ainsi,  $\mathcal{D} \cup \{X_1, \dots, X_m\}$  est l'ensemble des diviseurs irréductibles  $B$ -stables de  $X$ .

Une *couleur de  $X$*  est une couleur qui contient une  $G$ -orbite fermée.

**Remarque 1.10.** Attention, l'ensemble des couleurs de  $G/H$  est vide. En effet, toute couleur  $D \in \mathcal{D}$  est de codimension 1 donc  $D$  ne contient pas  $G/H$  (unique orbite fermée du plongement  $G/H$ ). Lorsqu'on aura besoin de préciser à partir de quel espace homogène horosphérique sont définies les couleurs, on dira : « les couleurs associées à l'espace homogène ».

Si  $G/H$  est horosphérique, l'ensemble des  $B$ -orbites de codimension 1 de  $G/H$  est l'ensemble des  $Bw_0s_\alpha P/H$  lorsque  $\alpha$  décrit  $S \setminus I$  et où  $w_0$  est l'élément de longueur maximale dans  $W$ . Les couleurs sont alors les adhérences  $D_\alpha$  des  $B$ -orbites  $Bw_0s_\alpha P/H$  dans  $G/H$  et  $\mathcal{D}$  est en bijection avec  $S \setminus I$ .

**Définition 1.11.** Une variété sphérique est *simple* si elle ne contient qu'une seule orbite fermée. Si  $G/H$  est un espace homogène sphérique, alors tout plongement de  $G/H$  est recouvert par les plongements simples de  $G/H$  qu'il contient.

Une variété sphérique est *toroïdale* si elle n'a aucune couleur.

Soit  $X$  un plongement d'un espace homogène horosphérique  $G/H$ . Définissons une application

$$\sigma : \mathcal{D} \cup \{X_1, \dots, X_m\} \longrightarrow N \quad (1.11.1)$$

de la façon suivante<sup>1</sup>. Soit  $D$  un diviseur  $B$ -stable de  $X$ . Il définit naturellement une valuation  $v_D$ ,  $B$ -invariante, du corps des fonctions rationnelles  $\mathbb{C}(G/H) = \mathbb{C}(X)$ . On en déduit donc un homomorphisme de groupes  $\mathbb{C}(G/H)^{(B)}/\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ . En remarquant ensuite que  $M$  est isomorphe à

---

<sup>1</sup>Elle est définie de la même façon dans le cas sphérique, où on pose  $M = \mathbb{C}(G/H)^{(B)}/\mathbb{C}^*$  (pour plus de détails, se référer à [Kn91]).

$\mathbb{C}(G/H)^{(B)}/\mathbb{C}^*$ , la restriction de  $v_D$  à  $\mathbb{C}(G/H)^{(B)}/\mathbb{C}^*$  définit alors un élément de  $N$  qu'on note  $\sigma(D)$ . Notons que la restriction de  $\sigma$  à  $\mathcal{D}$  ne dépend pas de  $X$  mais que de  $G/H$ . En fait, si  $\alpha \in S \setminus I$ , l'image par  $\sigma$  de la couleur  $D_\alpha$  est simplement la restriction à  $M$  de  $\check{\alpha}$ . Dans ce cas, on notera cette image  $\check{\alpha}_M$  au lieu de  $\sigma(D_\alpha)$ .

**Remarque 1.12.** Il se peut que l'application  $\sigma$  ne soit pas injective. Ainsi, si  $G/H$  est horosphérique,  $\sigma$  n'est pas toujours une bijection entre  $\mathcal{D}$  et l'ensemble  $\{\check{\alpha}_M \mid \alpha \in S \setminus I\}$ . Par exemple, lorsque  $H = P$ , l'application  $\sigma$  est constante car  $N = \{0\}$ .

**Exemples 1.13.** (1) L'espace homogène horosphérique  $SL_2/U$ , de rang 1, est isomorphe à  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . On peut choisir  $B$  (respectivement  $U$ ) égal à l'ensemble des matrices de  $SL_2$  de la forme  $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$  (respectivement  $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ). Ici,  $P = B$ ,  $S = \{\alpha\}$ ,  $I = \emptyset$  et  $U$  est le noyau de  $\omega_\alpha$  dans  $B$ . On remarque que le morphisme  $SL_2/U \rightarrow SL_2/P$  est la projection de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  sur  $\mathbb{P}^1$ .

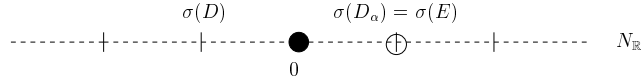
L'action naturelle de  $SL_2$  sur  $\mathbb{C}^2$  induit une action de  $SL_2$  sur  $\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2)$ . En notant  $x_0, x_1, x_2$  les coordonnées homogènes sur  $\mathbb{P}^2$ , on remarque que  $\mathbb{P}^2$  est un plongement de  $SL_2/U$ . En fait  $SL_2/U$  correspond à l'ouvert  $\{[1, x_1, x_2], (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$  de  $\mathbb{P}^2$ . Notons encore  $0$  le point fixe  $[1, 0, 0]$  de  $\mathbb{P}^2$  sous l'action de  $SL_2$ ,  $D$  la droite  $\{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2, x_0 = 0\}$  (de sorte que  $\mathbb{P}^2 \setminus D = \mathbb{C}^2$ ), et  $E$  le diviseur exceptionnel de l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  au point  $0$ . Alors les plongements non triviaux de  $SL_2/U$  sont les 5 variétés présentées dans le tableau suivant.

	plongement $X$ de $SL_2/U$	diviseur(s) $SL_2$ -stable(s)	$SL_2$ -orbite(s) fermée(s)	couleur de $X$
1/	$\mathbb{C}^2$	aucun	$\{0\}$	$D_\alpha$
2/	$\mathbb{P}^2 \setminus \{0\}$	$D$	$D$	aucune
3/	$\mathbb{P}^2$	$D$	$D$ et $\{0\}$	$D_\alpha$
4/	$\mathbb{C}^2$ éclaté en $0$	$E$	$E$	aucune
5/	$\mathbb{P}^2$ éclaté en $0$	$D$ et $E$	$D$ et $E$	aucune

Pour l'espace homogène  $SL_2/U$ ,  $\mathcal{D}$  est le singleton  $\{D_\alpha\}$  où  $D_\alpha$  est l'ensemble  $\{[1, x_1, 0], x_1 \in \mathbb{C}^*\}$ . Les plongements 1/, 2/ et 4/ n'ont qu'une  $SL_2$ -orbite fermée ; ce sont des variétés horosphériques simples. Les plongements 2/, 4/ et 5/ n'ont pas de couleur ; ce sont des variétés horosphériques toroïdales (voir la définition 1.11). On remarque aussi que  $\mathbb{P}^2$  éclaté en  $0$  est

recouvert par  $\mathbb{C}^2$  éclaté en 0 et  $\mathbb{P}^2 \setminus \{0\}$ , puis que  $\mathbb{P}^2$  est recouvert par  $\mathbb{P}^2 \setminus \{0\}$  et  $\mathbb{C}^2$ .

Dans cet exemple, les réseaux  $M$  et  $N$  sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . La figure suivante représente la droite  $N_{\mathbb{R}}$  avec l'image par  $\sigma$  des diviseurs irréductibles stables par  $B$  de  $\mathbb{P}^2$  éclaté en 0 :



(2) Quand  $G/H$  est horosphérique, on rappelle que  $P/H$  est isomorphe au tore dual de  $M$  par l'application  $p \in P \mapsto (\chi \in M \mapsto \chi(p))$ . Soit  $Y$  une variété torique sous l'action de ce tore ;  $P$  agit alors sur  $Y$ .

Soit  $G \times^P Y$  le quotient de  $G \times Y$  par la relation d'équivalence  $(g, y) \sim (gp^{-1}, p.y)$  pour tout  $g \in G$ ,  $p \in P$  et  $y \in Y$ . Alors  $X = G \times^P Y$  est une variété algébrique normale munie d'une fibration  $G \times^P Y \rightarrow G/P$ . C'est aussi un plongement de  $G/H$  et les diviseurs  $X_i$  sont les  $G \times^P Y_i$  où les  $Y_i$  sont les diviseurs irréductibles de  $Y$  stables par le tore. Et pour tout  $\alpha$  dans  $S \setminus I$ ,  $D_\alpha$  est  $\overline{Bw_0s_\alpha P} \times^P Y$ . On remarque alors que chaque couleur ne contient aucune  $G$ -orbite de  $X$  : c'est une variété horosphérique toroïdale. En fait, les variétés horosphériques toroïdales sont toujours de la forme ci-dessus, c'est-à-dire des fibrés sur une variété de drapeaux, de fibre une variété torique (cela résulte du théorème 1.17 et de l'exemple 1.19(3)).

Lorsqu'on se donne un espace homogène horosphérique  $G/H$  de rang  $n$ , on lui associe un sous-groupe parabolique  $P$ , un ensemble  $I \subset S$  et un réseau  $N \subset N_{\mathbb{R}}$  de rang  $n$  (voir la proposition 1.3 et la définition 1.4). On a aussi l'ensemble des couleurs  $\mathcal{D}$  (voir la définition 1.9), et l'application  $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow N$  (1.11.1).

**Définition 1.14.** Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique<sup>2</sup> fixé (avec toutes les données associées ci-dessus).

Un *cône colorié* de  $N_{\mathbb{R}}$  est un couple  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{C}$  est un cône convexe de  $N_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{F}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{D}$  appelé *l'ensemble des couleurs* du cône colorié, tel que

(i)  $\mathcal{C}$  est engendré par un nombre fini d'éléments du réseau  $N$  et contient  $\sigma(\mathcal{F})$ ,

<sup>2</sup>Si  $G/H$  est sphérique, la définition des cônes et éventails coloriés est quasiment identique (voir [Kn91, chap. 4]).

(ii)  $\mathcal{C}$  est saillant (c'est-à-dire ne contient aucune droite) et  $\sigma(\mathcal{F})$  ne contient pas l'origine.

Une *face coloriée* d'un cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  est un couple  $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$  où  $\mathcal{C}'$  est une face du cône  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}'$  est l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F}$  dont l'image par  $\sigma$  est dans  $\mathcal{C}'$ .

Un *éventail colorié* de  $N_{\mathbb{R}}$  est un ensemble fini  $\mathbb{F}$  de cônes coloriés tel que

(i) toute face coloriée d'un cône colorié de  $\mathbb{F}$  est dans  $\mathbb{F}$ ,

(ii) pour tout élément  $u$  de  $N_{\mathbb{R}}$ , il existe au plus un cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  de  $\mathbb{F}$  tel que  $u$  soit dans l'intérieur relatif de  $\mathcal{C}$ .

Un éventail colorié  $\mathbb{F}$  est dit *complet* si pour tout élément  $x$  de  $N_{\mathbb{R}}$ , il existe un cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  de  $\mathbb{F}$  tel que  $x$  soit dans  $\mathcal{C}$ .

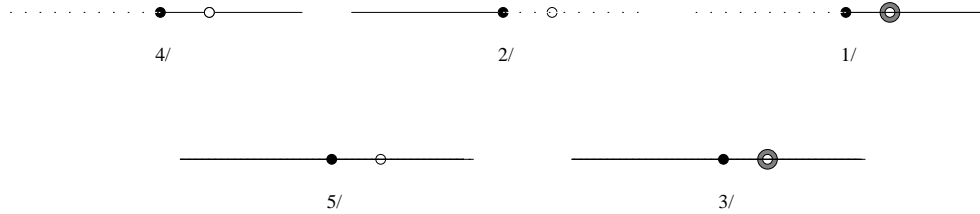
On dira qu'un élément  $D$  de  $\mathcal{D}$  est une *couleur* de  $\mathbb{F}$  s'il existe un cône colorié de  $\mathbb{F}$  dont  $D$  est une couleur.

**Remarques 1.15.** Lorsque  $G$  est un tore, l'ensemble des couleurs  $\mathcal{D}$  est vide, et on retrouve la définition d'un éventail.

La dernière condition dans la définition d'un éventail colorié implique que l'intersection de deux cônes coloriés est une face coloriée commune.

Si deux couleurs ont la même image par  $\sigma$ , alors il se peut qu'un cône colorié ne possède qu'une des deux couleurs.

**Exemple 1.16.** Revenons à l'exemple 1.13(1). Les éventails coloriés non triviaux de  $N_{\mathbb{R}}$  sont les suivants :



On représente l'origine par un point noir, la couleur par un point blanc, et une couleur de l'éventail en ajoutant un anneau gris autour du point blanc. Les arêtes de l'éventail colorié sont les demi-droites noires issues de l'origine.

Comme  $\sigma$  n'est pas injective, un point blanc pourrait être l'image de deux couleurs. Dans toutes les figures de la thèse, ce cas gênant n'aura pas lieu. L'éventail  $i/$  correspond au plongement  $i/$  de  $SL_2/U$  et l'éventail trivial  $\{(\{0\}, \emptyset)\}$  correspond au plongement trivial  $SL_2/U$ .

On obtient un cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  à partir d'un plongement simple  $X$  de la façon suivante. Soit  $Y$  l'unique  $G$ -orbite fermée de  $X$  ; alors  $\mathcal{F}$  est l'ensemble

des couleurs qui contiennent  $Y$ . Ensuite  $\mathcal{C}$  est le cône engendré par  $\sigma(\mathcal{F})$  et l'ensemble des  $\sigma(D)$  lorsque  $D$  parcourt l'ensemble des diviseurs irréductibles de  $X$  stables par  $G$ .

Pour un plongement quelconque  $X$ , l'éventail colorié associé est l'ensemble des cônes coloriés associés aux plongements simples inclus dans  $X$ . On remarque que les couleurs de  $X$  sont les mêmes que les couleurs de l'éventail colorié associé à  $X$ .

**Théorème 1.17 (cas particulier<sup>3</sup> du théorème 4.3 de [Kn91]).** *Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique. La construction ci-dessus définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de plongements de  $G/H$  (définition 1.7) et l'ensemble des éventails coloriés de  $N_{\mathbb{R}}$ . De plus, les plongements complets correspondent aux éventails coloriés complets.*

**Remarques 1.18.** On retrouve la classification des variétés toriques lorsque  $G/H$  est un tore.

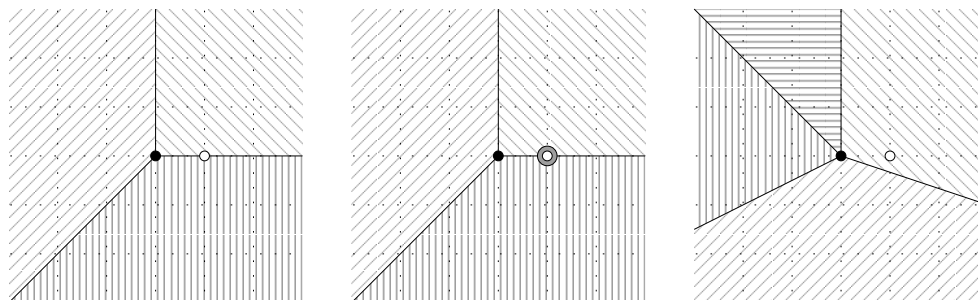
**Exemples 1.19.** (1) Voici un autre exemple de rang 1. Notons  $\alpha$  et  $\beta$  les racines simples de  $SL_3$  et posons  $H = \ker(2\omega_\alpha - \omega_\beta) \subset B$ . Les plongements complets de  $SL_3/H$  sont en bijection avec les éventails coloriés suivants.



(2) Donnons maintenant un exemple de rang 2. Soient  $G = SL_2 \times \mathbb{C}^*$  et  $H = U$ ; alors  $M$  a pour base  $\omega_\alpha$  et le caractère trivial de  $\mathbb{C}^*$ , où  $\alpha$  est la racine simple de  $SL_2$ . Voici quelques exemples d'éventails coloriés complets de  $N_{\mathbb{R}}$  qu'on peut obtenir dans ce cas.

---

<sup>3</sup>L'énoncé du théorème de D. Luna et Th. Vust [Kn91, th.4.3] est le même que celui du théorème ci-dessus avec  $G/H$  sphérique.



On peut facilement remarquer que le nombre d'éventails coloriés est fini lorsque le rang est 1, alors qu'il est infini dès que le rang est au moins 2.

(3) Soit  $X = G \times^P Y$  un plongement toroïdal de  $G/H$  comme dans l'exemple 1.13 (2). Notons  $\mathbb{E}$  l'éventail de  $Y$  dans  $N_{\mathbb{R}}$ ; alors l'éventail colorié associé à  $X$  est l'ensemble des cônes coloriés  $(\mathcal{C}, \emptyset)$  lorsque  $\mathcal{C}$  parcourt  $\mathbb{E}$ . Dans l'exemple (1) ci-dessus, seul le premier éventail correspond à un plongement toroïdal; ce dernier est un fibré en  $\mathbb{P}^1$  sur  $SL_3/B$ . Et dans l'exemple (2) ci-dessus, le premier et le troisième éventails coloriés correspondent à des plongements toroïdaux.

# Chapitre 2

## Variétés horosphériques lisses

F. Pauer a classifié les plongements lisses de  $G/H$  lorsque  $H = U$  [Pa83]. On va généraliser ce résultat à tous les espaces homogènes horosphériques  $G/H$ . Mais avant de donner un critère de lissité pour les variétés horosphériques, on va étudier une condition nécessaire plus simple à caractériser.

**Définition 2.1.** Une variété normale est dite *localement factorielle* si tout diviseur de Weil est de Cartier.

Une variété lisse est toujours localement factorielle. La réciproque est vraie dans le cas torique. Par contre elle ne l'est pas dans le cas sphérique, ni horosphérique. Par exemple, soit  $\omega$  un poids fondamental, soit  $X = \overline{G.v_\omega}$  le cône affine sur  $G/P(\omega)$  dans  $V(\omega)$ ; alors  $X$  est un plongement de rang 1 de  $G/H$  pour  $H = \ker(\omega) \subset P(\omega)$ . On peut vérifier que  $X$  est toujours localement factoriel; mais  $X$  est lisse si et seulement si c'est  $V(\omega)$  tout entier. On donnera d'autres exemples de variétés horosphériques localement factorielles et non lisses à la fin de ce chapitre.

A l'aide de la caractérisation des diviseurs de Cartier sur une variété sphérique [Br89, prop.3.1], on va caractériser les plongements d'un espace homogène horosphérique  $G/H$  qui sont localement factoriels. La preuve est laissée au lecteur.

**Proposition 2.2.** Soit  $X$  un plongement d'un espace homogène horosphérique  $G/H$  d'éventail colorié  $\mathbb{F}$ . Alors  $X$  est localement factoriel si et seulement pour tout cône colorié maximal  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  de  $\mathbb{F}$ ,

- (i) les éléments de  $\mathcal{F}$  ont des images deux à deux distinctes par  $\sigma$ ,
- (ii)  $\mathcal{C}$  est engendré par une partie d'une base de  $N$  contenant  $\sigma(\mathcal{F})$ .



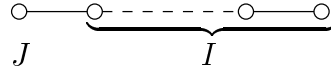
**Remarque 2.3.** Si  $X = G \times^P Y$  est un plongement toroïdal (voir l'exemple 1.13(2)), l'éventail colorié  $\mathbb{F}$  n'a pas de couleur. Donc  $X$  est localement factoriel si et seulement si tout cône colorié maximal  $(\mathcal{C}, \emptyset)$  de  $\mathbb{F}$  est engendré par une base de  $N$ , c'est-à-dire si et seulement si  $Y$  est localement factoriel (et même lisse). En fait, les plongements toroïdaux localement factoriels d'un espace homogène sphérique sont toujours lisses (ceci se déduit de [Br97b, 2.4 prop.1]).

Avant d'énoncer la caractérisation des variétés horosphériques lisses, donnons la définition suivante.

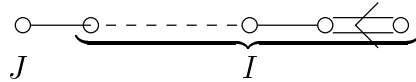
**Définition 2.4.** Soient  $I$  et  $J$  des sous-ensembles disjoints de  $S$ . Notons  $\Gamma_S$  le diagramme de Dynkin de  $G$ , et  $\Gamma_{I \cup J}$  le sous-graphe de  $\Gamma_S$  dont les sommets sont les éléments de  $I \cup J$  et les arêtes sont celles de  $\Gamma_S$  qui relient deux éléments de  $I \cup J$ .

Alors on dira que  $(I, J)$  est lisse si toute composante connexe  $\Gamma$  de  $\Gamma_{I \cup J}$  vérifie l'une des conditions suivantes :

1/  $\Gamma$  est un diagramme de Dynkin de type  $A_n$  dont les sommets sont tous dans  $I$  sauf une des deux extrémités qui est dans  $J$  ;

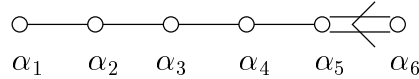


2/  $\Gamma$  est un diagramme de Dynkin de type  $C_n$  dont les sommets sont tous dans  $I$  sauf l'extrémité simple (c'est-à-dire non reliée à l'arête double) qui est dans  $J$  ;



3/  $\Gamma$  est un diagramme de Dynkin de type quelconque dont tous les sommets sont dans  $I$ .

**Exemple 2.5.** Considérons le diagramme de Dynkin suivant :



Si  $I = \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6\}$  et  $J = \{\alpha_1, \alpha_4\}$ , alors  $(I, J)$  est lisse.

Par contre, si  $I = \{\alpha_1, \alpha_3\}$  et  $J = \{\alpha_2\}$ , alors  $(I, J)$  n'est pas lisse.

**Théorème 2.6.** *Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique. Rappelons que  $S$  désigne l'ensemble des racines simples et  $I$  le sous-ensemble de  $S$  associé à  $H$  (voir la définition 1.4).*

*Un plongement  $X$  de  $G/H$ , d'éventail colorié  $\mathbb{F}$ , est lisse si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

*(i)  $X$  est localement factoriel (c'est-à-dire  $\mathbb{F}$  vérifie les conditions de la proposition 2.2).*

*(ii) Pour tout cône colorié maximal  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  de  $\mathbb{F}$ , on note  $J_{\mathcal{F}}$  l'ensemble des  $\alpha \in S \setminus I$  telles que  $D_{\alpha}$  soit dans  $\mathcal{F}$ . Alors  $(I, J_{\mathcal{F}})$  est lisse.*

**Remarque 2.7.** Si  $X$  est un plongement toroïdal, il n'a pas de couleur. Or  $(I, \emptyset)$  est lisse pour tout  $I$ , donc la condition (ii) est toujours vérifiée. On retrouve ainsi le fait que  $X$  est lisse si et seulement si  $X$  est localement factoriel.

La preuve du théorème se fait en plusieurs étapes : après s'être ramené au cas où  $X$  est un plongement simple, on se ramènera au cas où  $X$  est affine, puis lorsque  $X$  est lisse, au cas où c'est un  $G$ -module, et on fera ensuite une liste de tous les  $G$ -modules horosphériques.

Avant de passer à la démonstration du théorème, énonçons quelques lemmes.

**Lemme 2.8.** *Soit  $X$  un plongement simple de  $G/H$ . Notons  $Y = G/H'$  son unique  $G$ -orbite fermée. On peut supposer que  $H' \supset H$ . Alors il existe un unique morphisme  $G$ -équivariant  $\pi : X \rightarrow Y$ .*

*Soient  $P = N_G(H)$ ,  $P' = N_G(H')$  et  $L$  (respectivement  $L'$ ) le sous-groupe de Levi de  $P$  (respectivement  $P'$ ) contenant  $T$ , si bien que  $P \subset P'$  et  $L \subset L'$ . Soit  $Z = \pi^{-1}(P'/H')$ ; c'est une  $L'$ -variété. Alors  $Z$  est une variété horosphérique sous l'action de  $L'$ , c'est un plongement affine (et donc simple) de  $L'/(L' \cap H)$ , dont l'unique  $L'$ -orbite fermée est le tore  $P'/H'$ . De plus le cône colorié de  $Z$  s'identifie à celui de  $X$ .*

**Remarque 2.9.** Si  $X$  est une  $G$ -variété affine alors les  $G$ -orbites fermées de  $X$  sont séparées par  $\mathbb{C}[X]^G$  (voir [Kr85, II.3.3]). Si de plus,  $X$  est une variété sphérique, alors toute fonction de  $\mathbb{C}[X]^G$  est constante. Par conséquent, toute variété sphérique affine est simple.

*Démonstration.* Construisons un morphisme  $G$ -équivariant  $\pi : X \rightarrow Y$ .

On sait que  $X$  est quasi-projectif; autrement dit, il existe un  $G$ -module  $V$  tel que  $X$  soit une sous-variété localement fermée de  $\mathbb{P}(V)$ .

$$\begin{array}{ccccc} G/H & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}(V) \\ & & \uparrow & & \\ & & Y = G/H' & & \end{array}$$

Soient  $v_0 \in V$  tel que  $[v_0] = \iota(y_0)$ ,  $V'$  le sous- $G$ -module de  $V$  engendré par  $v_0$ , et  $\phi : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$  l'application rationnelle  $G$ -équivariante définie par une projection  $pr : V \rightarrow V'$ .

Soit  $x \in X$ ; comme  $X$  est un plongement simple, l'adhérence  $\overline{G.x}$  dans  $X$  de l'orbite de  $x$  contient  $Y$ . Soit  $v \in V$  tel que  $[v] = \iota(x)$ , alors  $v$  ne peut pas être dans le noyau de  $pr$ . Par conséquent, l'application rationnelle  $\phi \circ \iota$  est définie en  $x$ .

De plus, la droite  $\mathbb{C}v_0$  est stabilisée par le sous-groupe  $H'$  contenant  $U$ , donc  $\overline{G.v}$  est une somme de vecteurs propres de plus haut poids. Du fait que  $v_0 \in \overline{G.v}$ , on en déduit que  $\phi \circ \iota(x) \in G.[v_0] \subset \mathbb{P}(V')$ . Via l'isomorphisme  $G.[v_0] \simeq G/H'$ , on peut alors définir  $\pi : X \rightarrow G/H'$  par  $\phi \circ \iota$ .

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}(V) & & \\ \uparrow & \searrow^{\phi \circ \iota} & \swarrow^{\phi} & & \\ G/H' & \xrightarrow{\sim} & G.[v_0] & \hookrightarrow & \mathbb{P}(V') \end{array}$$

La première partie du lemme est alors montrée.

On définit alors  $Z$  comme dans l'énoncé. C'est naturellement une  $L'$ -variété normale car  $\pi : X \rightarrow G/H'$  est une fibration de fibre  $Z$ . L'orbite ouverte de  $Z$  est  $Z \cap (G/H) = P'/H = L'/(L' \cap H)$ . La dernière égalité est donnée par le fait que  $R_u(P') \subset H \subset P'$  implique  $H = (L' \cap H)R_u(P')$ . De plus l'unique  $L'$ -orbite fermée de  $Z$  est  $P'/H'$ , donc  $Z$  est un plongement simple de  $L'/(L' \cap H)$ .

Pour montrer que  $Z$  est affine, étudions les couleurs associées à  $L'/(L' \cap H)$  et celles de  $Z$ .

Les couleurs associées à  $L'/(L' \cap H)$  sont les  $D'_\alpha = D_\alpha \cap (L'/(L' \cap H))$  lorsque  $\alpha$  décrit le sous-ensemble  $J$  de  $S \setminus I$  tel que  $P' = P_{I \cup J}$ .

Soit  $\alpha \in J$ ; alors  $\pi(D_\alpha)$  est l'adhérence dans  $G/H'$  de  $Bw_0s_\alpha P H'/H' = Bw_0s_\alpha P'/H' = Bw_0P'/H'$ , c'est-à-dire  $\pi(D_\alpha) = G/H'$ . Donc l'adhérence de  $D_\alpha$  dans  $X$  contient  $Y$ , c'est-à-dire  $D_\alpha$  est une couleur de  $X$ .

Au contraire, si  $\alpha \in S \setminus (I \cup J)$  alors  $\pi(D_\alpha)$  est de codimension 1 dans  $G/H'$ , donc  $D_\alpha$  n'est pas une couleur de  $X$ .

En résumé,  $J$  est l'ensemble des racines simples associées à une couleur de  $X$ . On a aussi montré que toutes les couleurs associées à  $L'/(L' \cap H)$  sont aussi des couleurs de  $Z$ , car pour tout  $\alpha \in J$ , l'adhérence de  $D'_\alpha$  dans  $Z$  contient  $P'/H'$ . Or un plongement simple dont les couleurs sont exactement celles associées à l'espace homogène est affine [Kn91, th.3.1], donc  $Z$  est affine.

Il reste à montrer que le cône colorié de  $Z$  s'identifie à celui de  $X$ .

Rappelons que le réseau  $M$  associé à  $G/H$  est l'ensemble des caractères  $\chi$  de  $P$  qui s'annulent sur  $H$ . Notons  $M'$  le réseau associé à  $L'/(L' \cap H)$ , c'est-à-dire l'ensemble des caractères de  $L' \cap P$  qui s'annulent sur  $L' \cap H$ . On a immédiatement  $M \subset M'$ . Montrons l'inclusion opposée : soit  $\chi \in M'$ , alors  $\chi$  est un caractère de  $L' \cap P$  donc aussi de  $(L' \cap P)R_u(P') = P$ , de plus  $\chi$  s'annule sur  $L' \cap H$  donc aussi sur  $(L' \cap H)R_u(P') = H$ . On a donc  $M = M'$ .

Les cônes coloriés de  $X$  et  $Z$  sont donc tous les deux dans le même espace  $N_{\mathbb{R}}$  et les images des couleurs  $D_\alpha$  pour tout  $\alpha \in J$ , sont les mêmes dans les deux cas. On a déjà vu que les couleurs de  $X$  et  $Z$  sont les mêmes, il suffit donc de montrer qu'ils ont le même cône, ou encore que les diviseurs irréductibles  $G$ -stables de  $X$  sont les mêmes que les diviseurs irréductibles  $L'$ -stables de  $Z$ . C'est bien le cas, car  $\pi$  définit une fibration  $G$ -équivariante  $X \rightarrow G/P'$  de fibre  $Z$ .  $\square$

Comme le morphisme  $\pi$  est une fibration de fibre  $Z$  sur la variété de drapeaux  $G/P'$ ,  $X$  est lisse si et seulement si  $Z$  est lisse. Le lemme précédent nous ramène donc à une variété horosphérique affine dont la  $G$ -orbite fermée est un tore. On va maintenant se ramener à l'étude des  $G$ -modules horosphériques.

**Lemme 2.10.** *Soit  $X$  un plongement affine (et donc simple) de  $G/H$  dont l'unique  $G$ -orbite fermée  $G/H'$  est un tore. Notons  $H^{10}$  la composante neutre de  $H'$  ; c'est un sous-groupe réductif connexe de  $G$  contenant la partie semi-simple de  $G$ .*

*Alors  $X$  est une fibration homogène sur  $G/H'$  de fibre une  $H^{10}$ -variété horosphérique  $X_0$  avec un point fixe.*

*De plus  $X$  est lisse si et seulement si  $X_0$  est isomorphe à un  $H^{10}$ -module.*

*Démonstration.* Soit  $\pi : X \rightarrow G/H'$  l'application définie au lemme précédent. Notons  $X_0$  la fibre de  $\pi$  au dessus du point  $H'/H'$ . C'est une  $H^{10}$ -variété horosphérique et on a  $X \simeq G \times^{H'} X_0$ .

De plus  $X_0$  est affine car il est fermé dans  $X$ . Le point  $H'/H'$  est un point fixe de  $X_0$  sous l'action de  $H^0$ .

Il existe un  $H^0$ -module  $V$  tel que  $X_0$  soit isomorphe (comme  $H^0$ -variété) à un fermé de  $V$ . Quitte à faire une translation, on peut supposer que le point fixe de  $X_0$  est 0. De plus  $X_0$  est horosphérique, en particulier  $X_0 = H^0.X_0^U$ , donc  $X_0$  est stable par action linéaire de  $\mathbb{C}^*$  dans  $V$  à poids positif. On peut supposer que  $X_0$  engendre le  $H^0$ -module  $V$ , l'espace tangent à  $X_0$  en 0 est alors égal à  $V$ .

Si  $X$  est lisse, alors  $X_0$  l'est aussi et la dimension de  $V$  est égale à celle de  $X_0$ . On en déduit donc que  $X_0$  est le  $H^0$ -module  $V$ .  $\square$

Le lemme suivant donne une condition nécessaire pour qu'un  $G$ -module soit horosphérique, lorsque  $G$  est semi-simple.

**Lemme 2.11.** *Supposons  $G$  semi-simple. On note  $G_1, \dots, G_k$  les sous-groupes simples distingués de  $G$ . On sait alors que  $G$  est le quotient du produit des  $G_i$  par un sous-groupe fini central.*

*Soit  $V$  un  $G$ -module horosphérique. Alors, quitte à réarranger les indices, le  $G$ -module  $V$  est isomorphe à  $\bigoplus_{i=1}^{k'} V(\lambda_i)$  où  $V(\lambda_i)$  est un  $G_i$ -module simple pour tout  $i \in \{1, \dots, k'\}$ , et  $k' \leq k$ .*

Ce lemme découle directement de [Bo75, chap.7 ex. 18] et de la remarque suivante.

**Remarque 2.12.** Soit  $V = \bigoplus_{i=1}^{k'} V(\lambda_i)$  un  $G$ -module horosphérique. Alors pour tout  $i \neq j$ , on a  $V(\lambda_i)^*.V(\lambda_j)^* = V(\lambda_i + \lambda_j)^*$  dans  $\mathbb{C}[V]$  vue comme l'algèbre symétrique de  $V^*$ .

En effet, comme  $V$  est horosphérique,  $\mathbb{C}[V]$  est une sous-algèbre de  $\mathbb{C}[G/U]$ . De plus, comme  $T$  normalise  $U$ , il agit par multiplication à droite sur  $\mathbb{C}[G/U]$ . De plus on sait que pour tout  $\lambda \in \Lambda^+$ ,

$$V(\lambda)^* \simeq \{f \in \mathbb{C}[G] \mid \forall g \in G, \forall b \in B, f(gb) = \lambda(b)f(g)\} \subset \mathbb{C}[G/U].$$

On a ainsi un isomorphisme de  $G \times T$ -modules  $\mathbb{C}[G/U] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} V(\lambda)^*$  et  $V(\lambda)^*.V(\mu)^* = V(\lambda + \mu)^*$  pour tous  $\lambda, \mu \in \Lambda^+$ .

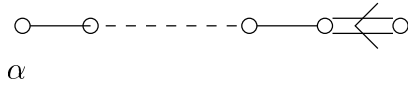
Le lemme précédent nous ramène au cas où  $G$  et  $V$  sont simples, cas décrit dans le lemme suivant.

**Lemme 2.13.** *Supposons que  $G$  est simple. Un  $G$ -module simple  $V(\lambda)$  est horosphérique si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :*

1.  $G = SL_n$  c'est-à-dire le système de racines est de type  $A_{n-1}$ , et  $\lambda$  est le poids fondamental  $\omega_\alpha$  où  $\alpha$  est l'une des deux racines simples situées aux extrémités dans le diagramme de Dynkin;



2.  $G = Sp_{2n}$  c'est-à-dire le système de racines est de type  $C_n$ , et  $\lambda$  est le poids fondamental  $\omega_\alpha$  où  $\alpha$  est la racine simple situées à l'extrémité simple dans le diagramme de Dynkin.



*Démonstration.* Si  $V(\lambda)$  est horosphérique alors  $G/P(\lambda)$  est le projectivisé de  $V(\lambda)$ , donc le groupe de Picard de  $G/P(\lambda)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  engendré par  $\mathcal{O}(1)$ . Donc  $P(\lambda)$  est un sous-groupe parabolique maximal de  $G$ , et  $\lambda$  est un poids fondamental.

Les points fixes dans  $G/P(\lambda)$  d'un tore maximal  $T$  de  $G$  sont tous conjugués par le groupe de Weyl  $W$ , donc les poids de  $V(\lambda)$  le sont aussi : ce sont les  $w(\lambda)$ ,  $w$  dans  $W$ . Cela signifie que  $\lambda$  est un poids minuscule au sens de [Bo75, chap 8, 7.3.].

Il suffit alors de chercher, parmi la liste de ces cas [Bo75, chap 8, 7.3.], ceux qui correspondent effectivement à des  $G$ -modules horosphériques. Pour cela, on calcule les dimensions de  $G/P(\lambda)$  et de  $V(\lambda)$ . Si celle de  $G/P(\lambda)$  vaut celle de  $V(\lambda)$  moins un, alors  $V(\lambda)$  est horosphérique, et réciproquement. On obtient, après calcul, le résultat voulu.  $\square$

Il est maintenant possible de classifier les  $G$ -modules horosphériques, lorsque  $G$  est un groupe réductif quelconque.

**Corollaire 2.14 (des deux lemmes précédents).** *Soient  $C$  la composante neutre du centre de  $G$  et  $G'$  la partie semi-simple de  $G$ . On rappelle que  $G = C.G'$ . On note aussi  $G_1, \dots, G_k$  les sous-groupes simples distingués de  $G'$ .*

*Soit  $V$  un  $G$ -module; alors  $V$  est horosphérique si et seulement si  $V = \bigoplus_{i=1}^n V(\lambda_i)$  de sorte que*

- (1)  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est une famille libre de caractères dominants,
- (2) il existe  $n' \leq n$  tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n'\}$ ,  $V(\lambda_i)$  est un  $G_i$ -module simple comme dans le lemme 2.13, et pour tout  $i \in \{n' + 1, \dots, n\}$ ,  $\lambda_i$  est un caractère de  $C$  (c'est-à-dire  $V(\lambda_i) = \mathbb{C}$ ).

*Démonstration.* Décomposons  $V$  de la façon suivante :  $V = V' \oplus V^{G'}$ . On peut alors écrire  $V$  sous la forme  $\bigoplus_{i=1}^n V(\lambda_i)$  de sorte que  $V' = \bigoplus_{i=1}^{n'} V(\lambda_i)$  et  $V^{G'} = \bigoplus_{i=n'+1}^n V(\lambda_i)$ .

Ainsi, pour  $i \in \{1, \dots, n'\}$ ,  $V(\lambda_i)$  est un  $G'$ -module simple, et pour  $i \in \{n'+1, \dots, n\}$ ,  $V(\lambda_i)$  est un  $C$ -module simple ( $V(\lambda_i) = \mathbb{C}$ ).

Si  $V$  est horosphérique alors  $V'$  l'est sous l'action de  $G'$  et  $V^{G'}$  l'est sous l'action de  $C$ . Donc, par le lemme 2.11, pour tout  $i \in \{1, \dots, n'\}$ ,  $V(\lambda_i)$  est un  $G_i$ -module simple (quitte à réarranger les indices) qui doit bien sûr vérifier le lemme 2.13. De plus,  $(\lambda_{n'+1}, \dots, \lambda_n)$  est une famille libre donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  l'est aussi.

La réciproque se déduit du lemme 2.13.  $\square$

**Remarque 2.15.** Si  $V$  est comme dans le lemme ci-dessus, on note  $J$  l'ensemble des racines simples  $\alpha$  de  $G$  telles que  $\omega_\alpha$  soit l'un des  $\lambda_i$ .

Alors  $V$  est un plongement simple de  $G/H$  où  $H = \bigcap_{i=1}^n \ker \lambda_i \subset P = \bigcap_{i=1}^n P(\lambda_i)$ . Le réseau  $M$  associé à  $V$  est le sous-réseau de  $\Lambda$  engendré par la famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , et le cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  associé à  $V$  est tel que  $\mathcal{F} = \{D_\alpha, \alpha \in J\}$  et  $\mathcal{C}$  est le cône engendré par la base duale de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  dans  $N$ .

De plus,  $(I, J)$  est lisse d'après le lemme 2.13.

On a maintenant tous les outils pour achever la preuve du théorème 2.6. Comme tout plongement de  $G/H$  est recouvert par des plongements simples et que son éventail colorié est donné par l'ensemble des faces des cônes coloriés de ses plongements simples, on en déduit qu'il suffit de montrer le théorème dans le cas où  $X$  est un plongement simple.

On cherche alors les plongements simples de  $G/H$  qui sont lisses. D'après les lemmes 2.8 et 2.10, cela revient à chercher les  $H^0$ -modules horosphériques où  $H^0$  est un groupe réductif dont le diagramme de Dynkin est  $\Gamma_{I \cup J_{\mathcal{F}}}$ .

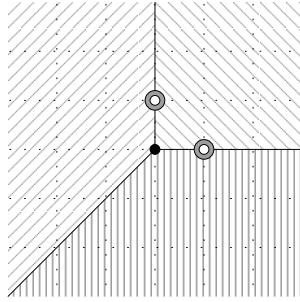
Le corollaire 2.14 montre l'implication ( $X$  lisse  $\implies$  (ii)) du théorème 2.6. L'implication ( $X$  lisse  $\implies$  (i)) étant triviale, il suffit de montrer que (i) et (ii) impliquent que  $X_0$  est un  $H^0$ -module. Le cône colorié de  $X_0$  est le même que celui de  $X$ . Le corollaire 2.14 et la remarque 2.15 nous disent alors que  $X_0$  a le même cône colorié qu'un  $H^0$ -module ;  $X_0$  est donc isomorphe à ce  $H^0$ -module.

**Exemples 2.16.** (1) Les deux plongements projectifs de  $SL_2/U$  sont lisses. En revanche, le seul plongement projectif lisse de  $SL_2/\ker(2\omega_\alpha)$  est le plongement toroïdal ; c'est même le seul plongement localement factoriel.

(2) Les plongements lisses de  $(SL_2 \times \mathbb{C})/U$  sont exactement les plongements localement factoriels.

(3) Regardons les plongements de  $(SL_2 \times SL_2)/U$ . Le réseau  $N$  est de rang 2 engendré par les couleurs  $\check{\alpha}_M = \check{\alpha}$  et  $\check{\beta}_M = \check{\beta}$  (où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines simples de  $SL_2 \times SL_2$ ). Ainsi les plongements lisses de  $SL_2 \times SL_2$  sont encore les plongements localement factoriels.

(4) Intéressons-nous maintenant aux plongements de  $SL_3/U$ . On obtient exactement les mêmes éventails coloriés que pour  $(SL_2 \times SL_2)/U$  car si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines simples de  $SL_3$ , le réseau  $N$  est toujours engendré par les couleurs  $\check{\alpha}_M = \check{\alpha}$  et  $\check{\beta}_M = \check{\beta}$ . Par contre les plongements localement factoriels ne sont pas toujours lisses : la condition d'être localement factoriel ne dépend que de  $N$  et de l'emplacement des couleurs dans  $N$ , par contre la lissité dépend aussi des racines de  $G$ . L'éventail colorié suivant donne un plongement lisse de  $(SL_2 \times SL_2)/U$ , mais aussi un plongement localement factoriel et non lisse de  $SL_3/U$ , car  $(\emptyset, \{\alpha, \beta\})$  n'est pas lisse lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines simples de  $SL_3$ .



Il faut aussi remarquer que, bien que les éventails coloriés soient les mêmes pour  $(SL_2 \times SL_2)/U$  et  $SL_3/U$ , ils représentent dans le premier cas des variétés de dimension 4, et dans le second, des variétés de dimension 5.

A l'aide de la démonstration du théorème 2.6, on va montrer le résultat suivant, déjà connu dans le cas torique.

**Proposition 2.17.** *Toute sous-variété irréductible et stable par  $G$  d'une variété horosphérique lisse est aussi lisse.*

*Démonstration.* Soient  $X$  un plongement lisse d'un espace homogène horosphérique  $G/H$ , et  $Y$  une sous-variété irréductible et stable par  $G$  de  $X$ .

Si  $Y$  est singulière, le lieu singulier de  $Y$  est fermé et stable par  $G$ , donc il contient une  $G$ -orbite fermée de  $X$ . Par conséquent il suffit de montrer que



$Y$  est lisse le long de toute  $G$ -orbite fermée. On peut alors supposer que  $X$  est un plongement simple de  $G/H$ .

Grâce aux lemmes 2.8 et 2.10, on se ramène au cas où  $X$  est un  $H^0$ -module horosphérique et  $Y$  une sous-variété irréductible et stable par  $H^0$  (où  $H^0$  est le groupe réductif connexe défini au lemme 2.10). Il suffit donc de montrer que les sous-variétés irréductibles et stables par  $G$  d'un  $G$ -module horosphérique sont lisses (pour tout groupe réductif connexe  $G$ ).

Pour conclure, on va décrire les  $G$ -orbites des  $G$ -modules horosphériques, en utilisant la description des  $G$ -modules horosphériques donnée dans le corollaire 2.14.

Avec les notations du corollaire 2.14, on sait que pour  $i \in \{1, \dots, n'\}$ , les  $G_i$ -orbites (ou  $G$ -orbites) de  $V(\lambda_i)$  sont le point fixe 0 et  $V(\lambda_i) \setminus \{0\}$ . Et pour  $i \in \{n' + 1, \dots, n\}$ , les  $G$ -orbites de  $V(\lambda_i)$  sont 0 et  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . De plus, les caractères  $\lambda_i$  sont indépendants, donc les  $G$ -orbites de  $V$  sont les sommes partielles des  $V(\lambda_i) \setminus \{0\}$ .

On en déduit que les sous-variétés irréductibles et stables par  $G$  d'un  $G$ -module horosphérique  $V$  sont les sous- $G$ -modules de  $V$ . Elles sont donc évidemment lisses, ce qui montre la proposition.  $\square$

**Remarque 2.18.** Ce résultat n'est pas vrai pour les variétés sphériques (cf [Br94]).

# Chapitre 3

## Classification des plongements de Fano

Le but de ce chapitre est de classier, en termes de polytopes, les plongements projectifs d'un espace homogène horosphérique fixé qui sont de Fano, de façon à généraliser la classification des variétés toriques de Fano.

Rappelons qu'une variété projective est de Fano si elle est normale et si son diviseur anticanonique est de Cartier et ample. Dans ce chapitre, on fixe un espace homogène horosphérique  $G/H$ . Les notations sont celles du chapitre 1.

Lorsque  $G/H$  est de rang 0, c'est-à-dire lorsque  $H$  est un sous-groupe parabolique  $P$ , le seul plongement est la variété de drapeaux  $G/P$ , qui est lisse et de Fano. Je me place maintenant dans le cas où  $G/H$  est de rang au moins 1. Les éventails coloriés complets considérés ne seront donc pas réduits au point 0.

La première étape consiste à déterminer un diviseur anticanonique des plongements de  $G/H$ .

**Proposition 3.1.** *Soit  $X$  un plongement projectif de  $G/H$ . Un diviseur anticanonique de  $X$  est*

$$-K_X = \sum_{i=1}^m X_i + \sum_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha D_\alpha$$

où  $a_\alpha$  est l'entier  $\langle 2\rho^P, \check{\alpha} \rangle$  et  $2\rho^P$  est le caractère donné par  $\sum_{\alpha \in R^+ \setminus R_I} \alpha$ .

Pour prouver ce résultat (qui est un corollaire de [Br97a, th.4.2]), on se ramène au cas où  $X$  est un plongement toroïdal. On note  $\pi : X \rightarrow G/P$  la fibration de fibre torique  $Y$ . On a alors  $K_X = \pi^*(K_{G/P}) + K_\pi$ . La fin de la preuve utilise le résultat connu dans le cas torique  $-K_X = \sum_{i=1}^m X_i$  et le résultat pour les variétés de drapeaux

$$-K_{G/P} = \sum_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha D_\alpha.$$

Par construction de l'éventail colorié associé à  $X$ , les diviseurs irréductibles  $G$ -stables  $X_i$  correspondent aux arêtes de l'éventail  $\mathbb{F}$  associé à  $X$  qui ne sont pas engendrées par une couleur. On note  $x_i \in N$  l'élément primitif de l'arête correspondante à  $X_i$ .

Afin de déterminer les plongements de Fano de  $G/H$ , on utilise la caractérisation suivante des diviseurs amples [Br89, th.3.3].

**Proposition 3.2.** *Soient  $X$  un plongement projectif de  $G/H$ ,  $\mathbb{F}$  son éventail colorié et  $D$  un diviseur de Weil de la forme*

$$\sum_{i=1}^m b_i X_i + \sum_{\alpha \in S \setminus I} b_\alpha D_\alpha,$$

où les  $b_i$  et les  $b_\alpha$  sont dans  $\mathbb{Z}$ .

*Alors  $D$  est de Cartier si et seulement si pour tout cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  de  $\mathbb{F}$ , il existe  $\chi_{\mathcal{C}}$  dans  $M$  tel que*

$$\forall x_i \in \mathcal{C}, \langle x_i, \chi_{\mathcal{C}} \rangle = b_i$$

$$\text{et } \forall D_\alpha \in \mathcal{F}, \langle \check{\alpha}_M, \chi_{\mathcal{C}} \rangle = b_\alpha.$$

*Lorsque  $D$  est de Cartier on peut alors définir une application  $h_D$  de  $N_{\mathbb{R}}$  dans  $\mathbb{R}$ , comme suit. Soit  $x$  un élément de  $N_{\mathbb{R}}$ . Comme  $X$  est projectif,  $\mathbb{F}$  est complet donc il existe un unique cône colorié maximal  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  de  $\mathbb{F}$  tel que  $x$  soit dans  $\mathcal{C}$ , et on pose alors  $h_D(x) = \langle x, \chi_{\mathcal{C}} \rangle$ . C'est une application linéaire sur chaque cône.*

*Le diviseur (de Cartier)  $D$  est ample si et seulement si :*

*(i) l'application  $h_D$  est strictement convexe (c'est-à-dire, pour chaque cône maximal  $\mathcal{C}$ , l'application linéaire  $\chi_{\mathcal{C}}$  est strictement supérieure sur  $\mathcal{C}$  aux applications linéaires  $\chi_{\mathcal{C}'}$ , pour tout cône maximal  $\mathcal{C}'$  distinct de  $\mathcal{C}$ );*

(ii) pour tout cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  de  $\mathbb{F}$  et pour tout  $\alpha$  tel que  $D_\alpha$  ne soit pas dans  $\mathcal{F}$ , on a

$$\langle \check{\alpha}_M, \chi_{\mathcal{C}} \rangle < b_\alpha.$$

Petits rappels (pour plus de détails, voir le chapitre 1) :  $S$  est l'ensemble des racines simples et  $I$  est le sous-ensemble de  $S$  de la définition 1.4. Les réseaux  $N$  et  $M$  sont des réseaux de rang égal au rang de  $G/H$ , et sont duaux l'un de l'autre. Pour tout  $\alpha \in S \setminus I$ ,  $\check{\alpha}_M$  est l'image de la couleur  $D_\alpha$  dans  $N$  par l'application  $\sigma$  (1.11.1).

On définit  $\mathcal{D}_X$  comme l'ensemble des  $\alpha \in S \setminus I$  tels que  $D_\alpha$  soit une couleur de  $X$ .

Lorsque  $D = -K_X$  est ample, l'application  $h_D$  vérifie  $h_D(x_1) = \cdots = h_D(x_m) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , et  $h_D(\check{\alpha}_M) = a_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{D}_X$ . L'ensemble

$$Q = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \forall \mathcal{C} \in \mathbb{F}, \langle \chi_{\mathcal{C}}, u \rangle \leq 1\} \quad (3.2.1)$$

est alors un polytope convexe contenant 0 dans son intérieur et dont les sommets sont  $x_1, \dots, x_m$  et certains des  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  où  $\alpha \in \mathcal{D}_X$ . De plus les points  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  où  $\alpha \notin \mathcal{D}_X$  sont dans l'intérieur de  $Q$ , et les  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  où  $\alpha \in \mathcal{D}_X$  sont dans le bord de  $Q$ . En particulier,  $Q$  est un polytope convexe rationnel.

On définit le polytope dual de  $Q$  par

$$Q^* = \{v \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall u \in Q, \langle v, u \rangle \geq -1\}. \quad (3.2.2)$$

Les sommets de  $Q^*$  sont en bijection avec les faces maximales de  $Q$ . Ainsi  $Q^*$  est l'enveloppe convexe des  $-\chi_{\mathcal{C}}$  où  $\mathcal{C}$  décrit l'ensemble des cônes coloriés maximaux de  $\mathbb{F}$ . En particulier,  $Q^*$  est à sommets dans  $M$ .

Je regroupe toutes ces propriétés dans la définition suivante.

**Définition 3.3.** Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique. Un polytope convexe  $Q$  de  $N_{\mathbb{R}}$  est dit  $G/H$ -réflexif si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(1)  $Q$  est à sommets dans  $N \cup \{\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} \mid \alpha \in S \setminus I\}$ , et contient 0 dans son intérieur.

(2)  $Q^*$  est à sommets dans  $M$ .

(3) Pour tout  $\alpha \in S \setminus I$ ,  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} \in Q$ .

**Exemples 3.4.** Désormais on représentera, dans les figures, les couleurs par les  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  au lieu des  $\check{\alpha}_M$ , et toujours par des points blancs. Les exemples choisis seront tels qu'un point blanc est associé à une seule couleur. Mais il faut tout de même noter qu'il peut y avoir des cas où un même point  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  correspond à plusieurs couleurs.

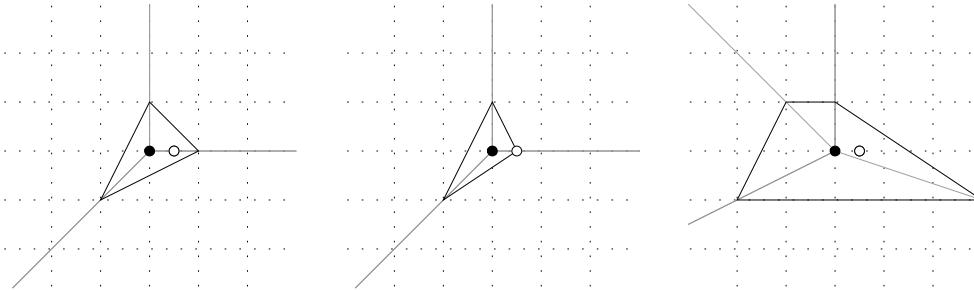
(1) Dans le cas de  $SL_2/U$ , on n'a qu'une couleur et  $a_\alpha = 2$ . Les seuls polytopes  $SL_2/U$ -réflexifs sont les segments suivants.



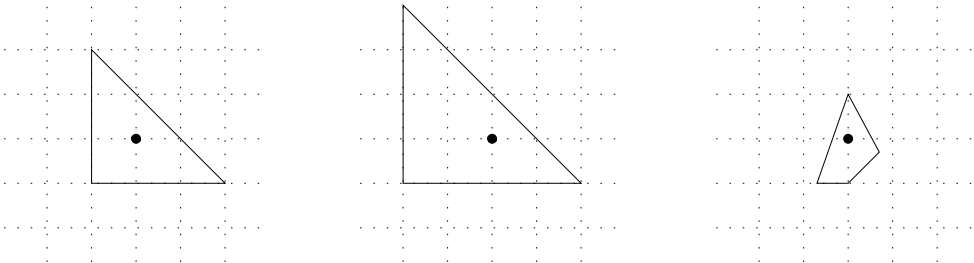
Et leurs duaux sont respectivement :



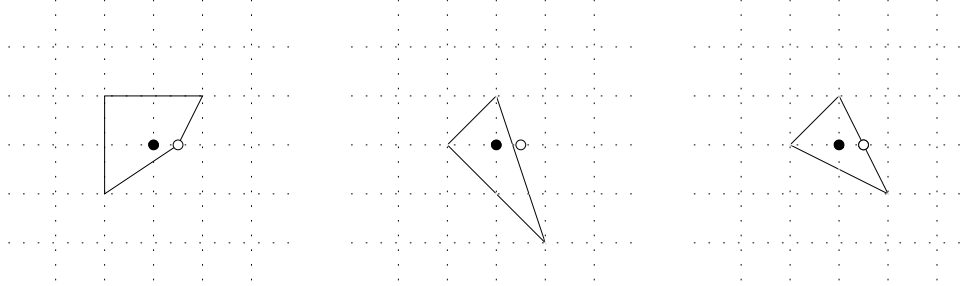
(2) Dans le cas de  $(SL_2 \times \mathbb{C})/U$ , prenons les polytopes associés aux éventails de l'exemple 1.19. Les deux premiers sont  $G/H$ -réflexifs. Le troisième polytope n'est pas  $G/H$ -réflexif car son dual n'est pas à sommets entiers.



Les polytopes duaux sont respectivement :



(3) Voici d'autres exemples de polytopes dans le cas où  $G/H = (SL_2 \times \mathbb{C})/U$ .



Le premier et le troisième sont  $G/H$ -réflexifs. Par contre, le deuxième ne l'est pas, car  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} \notin Q$ .

**Remarque 3.5.** La condition (3) est équivalente à la condition (3') :  $2\rho^P + Q^*$  (le translaté de  $Q^*$  par  $2\rho^P$  dans  $\Lambda_{\mathbb{R}}$ ) est inclus dans  $\Lambda_{\mathbb{R}}^+$ .  
En fait,  $2\rho^P + Q^*$  est le polytope moment de  $(X, -K_X)$  [Br89], c'est-à-dire

$$H^0(X, -K_X) = \bigoplus_{\lambda \in Q^*} V(2\rho^P + \lambda).$$

En effet, si  $s$  est la section canonique de  $-K_X$ , on a l'isomorphisme suivant

$$\begin{array}{ccc} \{f \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)} \mid \text{div}(f) - K_X \geq 0\} & \longrightarrow & H^0(X, -K_X)^{(B)} \\ f & \longmapsto & fs. \end{array}$$

De plus  $s$  est de poids  $2\rho^P = \sum_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha \omega_\alpha$  sous l'action de  $B$ , et si  $f \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)}$  est de poids  $\chi$  alors

$$\text{div}(f) - K_X = \sum_{i=1}^m (1 + \langle \chi, x_i \rangle) X_i + \sum_{\alpha \in S \setminus I} (a_\alpha + \langle \chi, \check{\alpha}_M \rangle) D_\alpha.$$

Donc les poids de  $H^0(X, -K_X)^{(B)}$  sont bien les caractères qui sont dans le polytope  $2\rho^P + Q^*$ .

Il peut être intéressant aussi de regarder les cas où  $-K_X$  est seulement  $\mathbb{Q}$ -Cartier (c'est-à-dire un multiple de  $-K_X$  est de Cartier) et ample : on dira alors que  $X$  est  $\mathbb{Q}$ -Fano. Dans ce cas,  $Q$  ne vérifie plus la condition (2). On dit alors qu'un polytope convexe de  $N_{\mathbb{R}}$  est  $\mathbb{Q}$ - $G/H$ -réflexif s'il vérifie la

condition (3) de la définition 3.3 et la condition

(1') : les sommets de  $Q$  sont des éléments primitifs de  $N$  ou des éléments de  $\{\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}, \alpha \in S \setminus I\}$ , et  $Q$  contient 0 dans son intérieur.

On peut remarquer qu'un polytope  $G/H$ -réflexif vérifie aussi la condition (1)' car (1) et (2) impliquent (1').

Le dernier polytope de l'exemple 3.4 (2) est  $\mathbb{Q}$ - $G/H$ -réflexif.

Remarquons que dans le cas torique, la définition d'un polytope  $(\mathbb{C}^*)^n$ -réflexif est celle d'un polytope réflexif donnée par V. Batyrev. L'ensemble des classes d'isomorphisme des variétés toriques de Fano de dimension  $n$  est en bijection avec l'ensemble des polytopes réflexifs de  $\mathbb{Z}^n$  [Ba94]. La proposition suivante généralise alors cette classification aux variétés horosphériques de Fano.

**Proposition 3.6.** *Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique. L'application qui à un plongement  $X$  de Fano de  $G/H$  associe le polytope  $Q$  défini en (3.2.1) est une bijection de l'ensemble des plongements de Fano de  $G/H$  (respectivement  $\mathbb{Q}$ -Fano) à isomorphisme près, sur l'ensemble des polytopes  $G/H$ -réflexifs (respectivement  $\mathbb{Q}$ - $G/H$ -réflexifs) de  $N_{\mathbb{R}}$ .*

Je rappelle que les isomorphismes de plongements sont définis en 1.7.

*Démonstration.* Il suffit de définir l'application inverse. Soit  $Q$  un polytope  $G/H$ -réflexif de  $N_{\mathbb{R}}$  ; on lui associe alors le plongement  $X(Q)$  de  $G/H$  dont l'éventail colorié est l'ensemble des cônes coloriés  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  (et leurs faces coloriées) tels que  $\mathcal{C}$  soit le cône engendré par une face maximale  $F$  de  $Q$ , et  $\mathcal{F}$  soit l'ensemble des  $D_\alpha$  vérifiant  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} \in F$ .

Alors on vérifie que  $-K_{X(Q)}$  est de Cartier ( $-\chi_{\mathcal{C}}$  est le sommet de  $Q^*$  associé à  $F$ ) et ample, par convexité de  $Q$  et par la condition (3) de la définition 3.3. Ensuite, le polytope associé à  $X(Q)$  (3.2.1) est bien  $Q$  par construction.

De même, si  $X$  est un plongement de Fano et  $Q$  est le polytope  $G/H$ -réflexif associé, on a  $X(Q) = X$ .

Lorsque  $Q$  est un polytope  $\mathbb{Q}$ - $G/H$ -réflexif, on construit  $X(Q)$  exactement de la même façon, et on vérifie aussi que cette application est l'inverse de l'application  $X \mapsto Q(X)$ .  $\square$

**Remarque 3.7.** Les couleurs d'un plongement  $X$  de Fano sont les couleurs  $D_\alpha$  telles que  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  se trouve sur le bord du polytope  $G/H$ -réflexif associé à

$X$ . Supposons que pour  $\alpha \neq \beta$  on ait  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} = \frac{\check{\beta}_M}{a_\beta}$ . Soit  $X$  un plongement de Fano de  $G/H$ . Alors si  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  est sur le bord du polytope  $G/H$ -réflexif associé à  $X$  alors  $\frac{\check{\beta}_M}{a_\beta}$  l'est aussi ; et réciproquement. Par conséquent, soit aucune des deux couleurs  $D_\alpha$  et  $D_\beta$  n'est une couleur de  $X$ , soit toutes les deux sont des couleurs de  $X$ .

Cette classification permet notamment de donner une version effective, dans le cas des variétés horosphériques de Fano, d'un résultat de V. Alexeev et M. Brion [AB04] sur les variétés sphériques de Fano.

**Théorème 3.8.** *Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique de rang  $n$ . On note  $a = \prod_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha$ , et  $V = (7(a+1))^{n2^{n+1}}$ . L'ensemble des classes d'isomorphisme des variétés de Fano qui sont des plongements de  $G/H$  est fini et de cardinal inférieur à*

$$(n!aV)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^{2^n(n!aV)^{n+1}}.$$

**Remarque 3.9.** La borne obtenue est sans doute loin d'être optimale. En effet, les majorations faites dans la preuve sont en général assez grossières.

On appelle alors *automorphisme de  $(N, \mathcal{D})$*  tout automorphisme du réseau  $N$  qui fixe chaque couleur  $\check{\alpha}_M$ . Grâce à la proposition suivante, il suffira de majorer le nombre de polytopes  $G/H$ -réflexifs à automorphisme de  $(N, \mathcal{D})$  près pour démontrer le théorème 3.8.

**Proposition 3.10.** *Soit  $\phi$  un automorphisme de  $(N, \mathcal{D})$ . On note aussi  $\phi$  l'automorphisme de  $N_{\mathbb{R}}$  induit par  $\phi$ . Soient  $X$  et  $X'$  des plongements de  $G/H$  d'éventails coloriés respectifs  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{F}'$ , tels que  $\mathbb{F}' = \phi(\mathbb{F})$ . Alors les variétés  $X$  et  $X'$  sont isomorphes.*

Rappelons que les plongements  $X$  et  $X'$  ne sont pas isomorphes si  $\phi$  n'est pas trivial (théorème 1.17).

La preuve de cette proposition est fortement inspirée de [AB04].

*Démonstration.* Notons  $G'$  la partie semi-simple de  $G$ . On définit alors  $\tilde{G} = G' \times P/H$ . C'est un groupe algébrique réductif et connexe. Rappelons que  $P = N_G(H)$ , ainsi  $\tilde{G}$  agit sur  $G/H$  par  $(g, pH).xH = gxpH$ .

De plus  $G/H$  est homogène sous l'action de  $\tilde{G}$ ,  $G/H \simeq \tilde{G}/\tilde{H}$ , et  $\tilde{H}$  est un sous-groupe horosphérique de  $\tilde{G}$ . En effet, le radical unipotent  $\tilde{U}$  du sous-groupe de Borel  $\tilde{B} = (B \cap G') \times P/H$  est  $U \times \{1\}$  et

$$\tilde{H} = \{(g, pH) \in \tilde{G} \mid gp \in H\} \supset \tilde{U}.$$



On vérifie aussi que  $\tilde{P} := N_{\tilde{G}}(\tilde{H}) = (P \cap G') \times P/H$ . Puis on voit que le réseau des caractères de  $\tilde{P}$  dont la restriction à  $\tilde{H}$  est triviale est le groupe  $\{(\chi, \chi^{-1}), \chi \in M\}$  isomorphe à  $M$ . De plus, les couleurs associées à  $\tilde{G}/\tilde{H}$  sont les mêmes que celles associées à  $G/H$  avec les mêmes images dans  $M$ .

Ainsi les plongements de  $G/H$  sont les mêmes que ceux de  $\tilde{G}/\tilde{H}$ . Donc  $X$  et  $X'$  sont des plongements de  $\tilde{G}/\tilde{H}$  d'éventails coloriés respectifs  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{F}'$ .

Comme  $P/H$  est isomorphe au tore dual de  $M$ ,  $\phi$  induit naturellement un automorphisme de  $P/H$ , qu'on notera encore  $\phi$ . On peut alors définir  $X''$  comme étant la variété  $X$  sur laquelle  $\tilde{G}$  agit par  $(g, pH)_\phi \cdot x = gx\phi^{-1}(pH)$ ; c'est un plongement de  $\tilde{G}/\tilde{H}$ . Il suffit alors de montrer que son éventail colorié est  $\mathbb{F}'$  : on aura ainsi des isomorphismes de variétés  $X' \simeq X'' \simeq X$ .

Notons  $\phi^* : M \rightarrow M$  l'automorphisme dual de  $\phi$ . Comme  $\phi$  fixe chaque couleur,  $\phi^*(\chi)$  et  $\chi$  ont alors la même restriction à  $B \cap G'$ , pour tout  $\chi \in M$ .

Soit  $f \in \mathbb{C}(\tilde{G}/\tilde{H})^{(\tilde{B})}$  de poids  $\chi$ ; autrement dit, pour tous  $(b, pH) \in \tilde{B}$  et  $x \in \tilde{G}/\tilde{H}$ , on a  $f(bxpH) = \chi^{-1}(b)\chi(p)f(x)$ .

Si l'action de  $\tilde{G}$  est tordue par  $\phi$ , on a alors

$$f((b, pH)_\phi \cdot x) = \chi^{-1}(b)\chi(\phi^{-1}(pH))f(x).$$

Or  $\chi(\phi^{-1}(pH)) = \phi^{*-1}(\chi)(p)$  par définition de  $\phi^*$  et  $\chi^{-1}(b) = \phi^{*-1}(\chi^{-1})(b)$  car  $\phi$  fixe chaque couleur. Donc  $f$  est de poids  $\phi^{*-1}(\chi)$  (lorsque l'action de  $\tilde{G}$  est tordue par  $\phi$ ).

Par conséquent, pour tout diviseur  $\tilde{B}$ -stable  $D$  de  $X$ , en notant  $D''$  le même diviseur dans  $X''$ , on a  $\sigma(D'') = \phi(\sigma(D))$ . De la façon dont l'éventail colorié d'un plongement est construit à partir des images par  $\sigma$  des diviseurs  $B$ -stables, on conclut que  $X''$  a pour éventail colorié  $\mathbb{F}'$ .  $\square$

**Exemple 3.11.** On sait déjà que le nombre de variétés toriques de Fano de dimension 2 est 16, dont 5 seulement sont lisses.

En rang 2, il y a par exemple 135 polytopes  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ -réflexifs, dont 16 correspondent à un plongement lisse et 398 polytopes  $(SL_2 \times SL_2)/U$ -réflexifs, dont 39 correspondent à un plongement lisse. Les polytopes  $SL_3/U$ -réflexifs sont les mêmes que les polytopes  $(SL_2 \times SL_2)/U$ -réflexifs; par contre, seulement 27 d'entre eux correspondent à un plongement lisse de Fano de  $SL_3/U$ . L'énumération de tous ces polytopes fait l'objet du chapitre 6.

Dans le cas torique, le théorème 3.8 dit que le nombre de polytopes réflexifs, à automorphisme de  $\mathbb{Z}^n$  près, est fini. Ce résultat a été démontré en premier par A. Borisov et L. Borisov [BB92]. Mais une autre preuve (plus

souvent utilisée) consiste à appliquer un résultat de D. Hensley [He83] afin de majorer le volume des polytopes réflexifs.

Dans notre cas, on utilise une généralisation du théorème de D. Hensley due à J. Lagarias et G. Ziegler. On note  $\overset{\circ}{Q}$  l'intérieur de  $Q$ .

**Théorème 3.12 ([LZ91]).** *Soient  $n$ ,  $a$  et  $k$  des entiers strictement positifs.*

*Soit  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un polytope convexe à sommets dans  $\mathbb{Z}^n$  tel que  $\sharp(\overset{\circ}{Q} \cap a\mathbb{Z}^n) = k$ . Alors le volume de  $Q$  est majoré par  $ka^n(7(ka+1))^{n2^{n+1}}$ .*

*Démonstration du théorème 3.8.* Commençons par remarquer qu'un polytope  $G/H$ -réflexif  $Q$  est à sommets dans  $\frac{1}{a}N$  et que  $\overset{\circ}{Q} \cap N = \{0\}$ . En effet, s'il existe  $u$  dans  $(\overset{\circ}{Q} \cap N) \setminus \{0\}$ , alors pour tout  $v \in Q^*$ ,  $\langle v, u \rangle > -1$ . Or il existe un sommet  $v$  de  $Q^*$  tel que  $\langle v, u \rangle < 0$ , ce qui contredit le fait que  $\langle v, u \rangle$  est entier.

Par conséquent, le théorème précédent nous dit que tout polytope  $G/H$ -réflexif a un volume majoré par  $V = (7(a+1))^{n2^{n+1}}$ .

Si  $G$  est semi-simple, les  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  pour  $\alpha \in S \setminus I$  forment une famille génératrice de  $N_{\mathbb{R}}$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S \setminus I$  tels que  $(\check{\alpha}_{1M}, \dots, \check{\alpha}_{nM})$  soit une base de  $N_{\mathbb{R}}$ . Soit  $u \in Q$ , alors pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le simplexe de sommets  $0$ ,  $u$ , et  $\frac{\check{\alpha}_{jM}}{\alpha_j}$ ,  $j \neq i$  est strictement inclus dans  $Q$ , donc son volume est strictement inférieur à  $V$ . Par conséquent,  $u$  est dans l'intérieur du parallélépipède de sommets  $\pm n!aV\check{\alpha}_{1M}, \dots, \pm n!aV\check{\alpha}_{nM}$ . Ce dernier contient au maximum  $2^n(n!aV)^{n+1}$  points de  $N$ , donc en majorant grossièrement, on obtient que le nombre de polytopes  $G/H$ -réflexifs est, dans ce cas, inférieur à  $2^{2^n(n!aV)^{n+1}}$ .

Dans le cas général où  $G$  est réductif, notons  $N_{\mathbb{R}}^1$  le sous-espace vectoriel de  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par les  $\check{\alpha}_M$ . Soit  $(\check{\alpha}_{1M}, \dots, \check{\alpha}_{lM})$  une base de  $N_{\mathbb{R}}^1$ , alors pour tout polytope  $G/H$ -réflexif  $Q$ , il existe  $f_1, \dots, f_{n-l} \in Q \cap N$  tels que  $\{\check{\alpha}_{1M}, \dots, \check{\alpha}_{lM}\} \cup \{f_1, \dots, f_{n-l}\}$  forme une base de  $N_{\mathbb{R}}$ . Montrons qu'il existe un ensemble fini fixé d'éléments de  $N_{\mathbb{R}}$ , tel qu'on puisse toujours se ramener, quitte à appliquer un automorphisme de  $(N, \mathcal{D})$ , au cas où les  $f_i$  font partie de cet ensemble.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base fixée de  $N$  telle que  $(e_1, \dots, e_l)$  soit une base de  $N^1 = N_{\mathbb{R}}^1 \cap N$ . Dans cette base, un automorphisme de  $(N, \mathcal{D})$  s'écrit alors

matriciellement sous la forme  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_l & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , où  $I_l$  est l'identité dans  $N^1$ ,

$B \in M_{l, n-l}(\mathbb{Z})$  et  $C \in GL_{n-l}(\mathbb{Z})$ . Soit  $\mathcal{F}$  la matrice formée des vecteurs colonnes  $f_1, \dots, f_{n-l}$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors, il existe un automorphisme

$\mathcal{A}$  de  $(N, \mathcal{D})$  tel que  $\mathcal{G} = \mathcal{AF}$  de la forme suivante (on note  $(g_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-l}$  ses coefficients)

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \cdots & g_{1,n-l} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{l+1,1} & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{n,n-l} \end{pmatrix}$$

et telle que pour tout  $1 \leq j \leq n-l$  et  $1 \leq i \leq j-1$ ,

$$0 \leq g_{ij} < |g_{j+l,j}|.$$

De plus, le produit des  $g_{j+l,j}$  est majoré par  $n!aV$ , donc le nombre de telles matrices  $\mathcal{G}$  est inférieur à  $(n!aV)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

On en déduit alors que le nombre de polytopes  $G/H$ -réflexifs est inférieur à  $(n!aV)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^{2^n(n!aV)^{n+1}}$ .  $\square$

**Remarque 3.13.** Ce résultat peut se généraliser de la manière suivante : soit  $\kappa$  un entier strictement positif, alors le nombre de plongements  $X$  de  $G/H$ , tels que  $-\kappa K_X$  soit de Cartier et ample, est fini. Il suffit de remarquer que le polytope  $\mathbb{Q}$ - $G/H$ -réflexif  $Q$  associé à  $X$  a son dual à sommets dans  $\frac{1}{\kappa}M$ . On en déduit alors que  $\frac{1}{\kappa}Q$  est à sommets dans  $\frac{1}{a\kappa}N$ , et son intérieur ne contient que 0 comme point entier. Ainsi le volume de  $Q$  est majoré par  $\kappa^n(7(a\kappa + 1))^{n2^{n+1}}$ , et la suite de la démonstration reste inchangée.

# Chapitre 4

## Majoration du degré et du nombre de Picard

Pour majorer le degré et le nombre de Picard des variétés horosphériques de Fano, on se donne un espace homogène horosphérique  $G/H$  et on étudie le degré et le nombre de Picard de ses plongements lisses.

### 4.1 Majoration du degré

Pour avoir plus de détails sur le degré des variétés de Fano, on se référera à [De03] où le degré est majoré dans le cas des variétés toriques lisses, et aussi à [De01] où on trouve en particulier des variétés toriques de Fano de grand degré (prop.5.22).

**Définition 4.1.** Soit  $X$  une variété de Fano de dimension  $d$ . On appelle *degré* de  $X$ , le nombre d'intersection  $(-K_X)^d$ . Le théorème de Riemann-Roch et le théorème d'annulation de Serre impliquent que la dimension de  $\Gamma(X, -kK_X)$  est équivalente, lorsque l'entier  $k$  tend vers l'infini, à  $\frac{k^d}{d!}(-K_X)^d$ .

Le résultat suivant se démontre en utilisant la remarque 3.5 et la formule des caractères de Weyl.

**Proposition 4.2.** (*cas particulier de [Br89, th.4.1]*) Soit  $X$  un plongement de Fano de  $G/H$ . Alors

$$(-K_X)^d = d! \int_{Q^*} \prod_{\alpha \in R^+ \setminus R_I^+} \frac{\langle 2\rho^P + \chi, \check{\alpha} \rangle}{\langle \rho^B, \check{\alpha} \rangle} d\chi,$$

où la mesure dans l'intégrale est celle pour laquelle le domaine fondamental de  $M$  est de volume 1.

Dans le cas torique, on a  $(-K_X)^d = d! \operatorname{vol}(Q^*)$  [Od88, cor 2.23]. Le théorème 3.12 permet alors de majorer le degré de  $X$  de façon immédiate, mais cette borne est doublement exponentielle. O. Debarre donne une bien meilleure borne dans le cas où  $X$  est lisse.

**Théorème 4.3 ([De03]).** *Soit  $X$  une variété torique lisse de Fano de dimension  $n$  et de nombre de Picard  $\rho$ . Si  $\rho > 1$ , alors  $(-K_X)^n \leq n! n^{\rho n}$ .*

Si  $\rho = 1$ , on a bien sûr  $X = \mathbb{P}^n$  et  $(-K_X)^n = (n+1)^n$ . Dans le cas horosphérique, on obtient le résultat analogue énoncé dans l'introduction : le théorème 0.1.

La proposition 2.2 se réécrit de la façon suivante lorsque  $X$  est de Fano.

**Proposition 4.4.** *Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique. Soit  $X$  un plongement de Fano de  $G/H$ . On note  $Q$  le polytope  $G/H$ -réflexif associé. Rappelons que  $\mathcal{D}_X$  désigne l'ensemble des éléments de  $S \setminus I$  qui correspondent à une couleur de  $X$ . Alors  $X$  est localement factoriel si et seulement si pour toute face maximale  $F$  de  $Q$  on a :*

- (1) *les seuls points de  $F$  de la forme  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  sont des sommets de  $F$  ;*
- (2)  *$F$  est un simplexe dont les sommets  $e_1, \dots, e_n$  vérifient :*
  - (i) *pour tout  $i$ , ou bien  $e_i \in N$  ou bien il existe un unique  $\alpha \in \mathcal{D}_X$  tel que  $e_i = \frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$ ,*
  - (ii)  *$(a_1 e_1, \dots, a_n e_n)$  est une base de  $N$  où les  $a_i$  sont définis par :*

$$\begin{aligned} a_i &= 1 & \text{si } e_i &\in N \\ a_i &= a_\alpha & \text{si } e_i &= \frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}. \end{aligned}$$

**Remarque 4.5.** Lorsque  $Q$  est le polytope  $G/H$ -réflexif associé à un plongement de Fano localement factoriel de  $G/H$ , on définira  $a_u$  comme dans la proposition pour tout sommet  $u$  de  $Q$ .

Dans la suite,  $G/H$  sera un espace homogène horosphérique fixé et  $X$  un plongement de Fano localement factoriel de  $G/H$ .

On note  $r$  l'entier strictement positif tel que le nombre de sommets de  $Q$  soit égal à  $n + r$ .

Dans le cas torique, cet entier est le nombre de Picard. Dans le cas horosphérique, on peut exprimer le nombre de Picard de la façon suivante :

$$\rho = m + \sharp(S \setminus I) - n = r + \sharp(S \setminus I) - \sharp(\mathcal{D}_X). \quad (4.5.1)$$

En effet, tout diviseur est linéairement équivalent à un diviseur de la forme  $\sum_{i=1}^m b_i X_i + \sum_{\alpha \in S \setminus I} b_\alpha D_\alpha$  ( $b_i$  et  $b_\alpha$  entiers) [Br97b, Chap 5], et les relations entre ces diviseurs sont les relations du type  $\text{div}(f) = 0$  où  $f \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)}$ . Pour la deuxième égalité, rappelons que  $\sharp(\mathcal{D}_X)$  est le nombre de couleurs de  $X$ , c'est-à-dire le nombre des points  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  qui sont sur le bord de  $Q$  (voir la remarque 3.7). Puisque  $X$  est localement factoriel, les points de la forme  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  sont tous des sommets de  $Q$  et correspondent à une unique couleur. On en déduit que  $\sharp(\mathcal{D}_X)$  est exactement le nombre de sommets de la forme  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$ . Ainsi  $m + \sharp(\mathcal{D}_X) = n + r$ .

De plus, ces deux égalités restent vraies lorsque  $X$  est seulement  $\mathbb{Q}$ -factoriel (voir la définition 4.15). Elles se démontrent par les mêmes arguments et avec la proposition 4.16.

**Exemple 4.6.** Si  $r = 1$ , alors  $Q$  est un simplexe : c'est l'enveloppe convexe de  $e_1, \dots, e_{n+1}$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $(a_1 e_1, \dots, a_{i-1} e_{i-1}, a_{i+1} e_{i+1}, \dots, a_{n+1} e_{n+1})$  est une base de  $N$ . Donc

$$a_{n+1} e_{n+1} = -a_1 e_1 - \dots - a_n e_n.$$

Par la suite on verra que le cas où  $r = 1$  est un cas un peu à part, comme dans le cas torique.

**Proposition 4.7.** Soient  $X$  un plongement de Fano localement factoriel de  $G/H$  et  $Q$  le polytope  $G/H$ -réflexif associé. On note

$$C = n + \sum_{\alpha \in S \setminus I} (a_\alpha - 1).$$

Si  $\rho \geq 2$ , alors

$$\text{vol}(Q^*) \leq (C^r \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n,$$

et si  $\rho = 1$ , on a

$$\text{vol}(Q^*) \leq ((C + 1) \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n.$$

On peut observer que  $C$  ne dépend que de  $G$  et  $H$ . On verra par la suite (lemme 4.13) que  $C \leq d$ .

La preuve de cette proposition est inspirée de la preuve du théorème 4.3 [De03]. Elle consiste en deux lemmes.

**Lemme 4.8.** *Soit  $b$  un réel strictement positif. Si pour tout  $u \in Q$  et pour tout  $v \in Q^*$ , on a  $-1 \leq \langle v, u \rangle \leq b$ , alors*

$$\text{vol}(Q^*) \leq ((b+1) \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n.$$

*Démonstration.* Par définition du dual d'un polytope, on a  $-\frac{1}{b}Q^* \subset Q^*$  : en effet si  $v \in -\frac{1}{b}Q^*$ , on a bien  $\langle v, u \rangle \geq -1$  pour tout  $u \in Q$  par hypothèse.

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\text{vol}(Q^*) > ((b+1) \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n$ . Soient un réel  $\eta \in ]0, 1[$ , et

$$Q' = \frac{1 - \eta}{(b+1) \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha} Q^*.$$

Par hypothèse, le volume de  $Q'$  est strictement supérieur à 1 pour  $\eta$  assez petit. Donc, par le théorème de van der Corput [Co36], il existe deux éléments  $q$  et  $q'$  de  $Q$  tels que  $q - q'$  soit dans  $M$ . De plus  $Q'$  est convexe et  $-\frac{1}{b}Q' \subset Q'$ , donc

$$\frac{q - q'}{b+1} = \frac{q - b(-\frac{1}{b}q')}{b+1} \in Q', \text{ et } q - q' \in (b+1)Q' \subset \frac{1}{\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha} Q^*.$$

Il reste à montrer que 0 est le seul point de  $M$  dans l'intérieur de  $\frac{1}{\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha} Q^*$  pour obtenir la contradiction voulue.

Soit  $v \in M$  non nul dans l'intérieur de  $\frac{1}{\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha} Q^*$ . Pour tout  $u \in Q$ , on a

$$\langle v, u \rangle > -\frac{1}{\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha}.$$

Or il existe un sommet  $u$  de  $Q$  tel que  $\langle v, u \rangle$  soit strictement négatif, et ce sommet est dans  $\frac{1}{a_\alpha} \mathbb{Z}$  pour un  $\alpha \in S \setminus I$  donné. Ceci n'est pas possible, donc un tel  $v$  n'existe pas.  $\square$

**Exemple 4.9.** Revenons à l'exemple 4.6 où  $r = 1$ ; on a pour tout  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $a_i(1 + \langle v_j, e_i \rangle) = \delta_{ij}(a_1 + \dots + a_{n+1})$  où  $v_j$  est le sommet de  $Q^*$  associé à la face de  $Q$  opposée à  $e_j$ , et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Dans ce cas, on peut prendre  $b = a_1 + \cdots + a_{n+1} - 1$ . Regardons ce que vaut  $b$  selon les valeurs de  $\rho$ . Sachant que  $\rho$  vaut 1 plus le nombre de racines simples  $\alpha \in S \setminus I$  telles que  $\frac{\tilde{\alpha}_M}{a_\alpha}$  ne soit pas un sommet de  $Q$ , quand  $\rho > 1$ , la somme  $a_1 + \cdots + a_{n+1}$  peut être majorée par  $C$ . Par contre, si  $\rho = 1$ ,  $a_1 + \cdots + a_{n+1}$  vaut exactement  $C + 1$ . On obtient dans les deux cas le résultat de la proposition 4.7 lorsque  $r = 1$ .

Le lemme suivant généralise le résultat obtenu dans l'exemple ci-dessus.

**Lemme 4.10.** *Si  $r \geq 2$ , alors pour tout sommet  $u$  de  $Q$  et tout sommet  $v$  de  $Q^*$ , on a*

$$0 \leq a_u(1 + \langle v, u \rangle) \leq C^r.$$

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de  $Q^*$ . On note  $e_1, \dots, e_n$  les sommets de la face de  $Q$  associée à  $v$ . Alors  $(a_1 e_1, \dots, a_n e_n)$  est une base de  $N$ , et  $\langle v, e_i \rangle = -1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

On note  $0 < b_1 < \cdots < b_k$ ,  $k \leq r$ , les éléments de l'ensemble suivant :

$$\{a_u(1 + \langle v, u \rangle) \mid u \text{ sommet de } Q \text{ distinct des } e_i\}.$$

On va alors montrer par récurrence sur  $j$  que  $b_j$  est majoré par  $C^j$ .

Soient  $j \in \{1, \dots, k\}$  et  $u$  un sommet de  $Q$  tel que  $a_u(1 + \langle v, u \rangle) = b_j$ . Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  non vide, minimal, tel que  $u$  et les  $(e_i)_{i \in E}$  ne soient pas sur une face commune de  $Q$ . Un tel sous-ensemble existe car  $u$  et  $e_1, \dots, e_n$  ne sont pas sur la même face. Quitte à changer l'ordre des  $e_i$ , supposons  $E = \{1, \dots, \epsilon\}$ . Posons  $w = a_u u + a_1 e_1 + \cdots + a_\epsilon e_\epsilon$ , alors  $w$  est un élément de  $N$ .

Il existe une face de  $Q$  telle que  $w$  soit dans le cône engendré par cette face. De plus, cette face n'est pas celle correspondant à  $v$ . Il existe donc  $u_1, \dots, u_s$ , parmi les sommets de cette face, distincts de  $e_1, \dots, e_n$  (mais pas forcément distincts entre eux), et  $e'_1, \dots, e'_t$  parmi  $e_1, \dots, e_n$  (toujours pas forcément distincts entre eux), tels que

$$w = \sum_{i=1}^s a_{u_i} u_i + \sum_{i=1}^t a'_i e'_i. \quad (4.10.1)$$

Posons  $a'_i = a_{e'_i}$  pour simplifier les notations.

La relation (4.10.1) n'est pas triviale, car  $u$  et les  $(e_i)_{i \in E}$  ne sont pas sur une face commune de  $Q$ . De plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ ,  $e'_i$  n'est pas dans



$\{e_1, \dots, e_\epsilon\}$ . En effet, si par exemple  $e'_t = e_\epsilon$ , alors la relation (4.10.1) induit une relation la relation non triviale suivante :

$$a_u u + a_1 e_1 + \dots + a_{\epsilon-1} e_{\epsilon-1} = \sum_{i=1}^s a_{u_i} u_i + \sum_{i=1}^{t-1} a'_i e'_i.$$

On en déduit alors que  $u, e_1, \dots, e_{\epsilon-1}$  ne sont pas sur une face commune de  $Q$ , ce qui contredit la minimalité de  $E$ .

On va utiliser la relation 4.10.1 pour majorer  $b_j$  en fonction de  $b_{j-1}$ . Pour cela, on va d'abord établir une relation entre les entiers  $a_u, a_{u_i}, a_i$  et  $a'_i$ .

Le point

$$\frac{1}{a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i} w$$

est le barycentre des points  $u, e_1, \dots, e_\epsilon$  affectés des coefficients (strictement positifs) respectifs  $a_u, a_1, \dots, a_\epsilon$ . Comme  $u$  et  $e_1, \dots, e_\epsilon$  sont des sommets de  $Q$  qui ne font pas partie d'une même face, ce barycentre est dans l'intérieur de  $Q$ . Par conséquent,

$$\frac{\sum_{i=1}^s a_{u_i} + \sum_{i=1}^t a'_i}{a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i} < 1,$$

autrement dit,

$$a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i \geq \sum_{i=1}^s a_{u_i} + \sum_{i=1}^t a'_i + 1.$$

La relation 4.10.1 nous donne alors

$$b_j = a_u(1 + \langle v, u \rangle) = \sum_{i=1}^s a_{u_i}(1 + \langle v, u_i \rangle) + a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i - \sum_{i=1}^s a_{u_i} - \sum_{i=1}^t a'_i.$$

Si  $s = 0$  alors  $b_j = a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i - \sum_{i=1}^t a'_i \leq a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i$ .

Sinon,  $b_j \geq \sum_{i=1}^s a_{u_i}(1 + \langle v, u_i \rangle) + 1$  et donc  $a_{u_i}(1 + \langle v, u_i \rangle) < b_j$  pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ; autrement dit,  $a_{u_i}(1 + \langle v, u_i \rangle) \leq b_{j-1}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} b_j &\leq s b_{j-1} + a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i - \sum_{i=1}^s a_{u_i} - \sum_{i=1}^t a'_i \\ &\leq s b_{j-1} + a_u + \sum_{i=1}^{\epsilon} a_i - s. \end{aligned}$$

Or  $s \leq \sum_{i=1}^s a_{u_i} \leq \sum_{i=1}^s a_{u_i} + \sum_{i=1}^t a'_i \leq a_u + \sum_{i=1}^\epsilon a_i$ , donc

$$b_j \leq s(b_{j-1} - 1) + a_u + \sum_{i=1}^\epsilon a_i \leq (a_u + \sum_{i=1}^\epsilon a_i)b_{j-1}.$$

En particulier si  $j = 1$ , alors  $s = 0$  et donc  $b_1 \leq a_u + \sum_{i=1}^\epsilon a_i$ .

Pour conclure, il suffit juste de remarquer que si  $\epsilon = n$  on a alors  $r = 1$ .  
Donc  $\epsilon \leq n - 1$  et

$$a_u + \sum_{i=1}^\epsilon a_i \leq n + \sum_{\alpha \in S \setminus I} (a_\alpha - 1) = C$$

car les entiers  $a_u$  et  $a_i$  valent soit 1 soit  $a_\alpha$ . □

La proposition se déduit alors facilement de ces deux lemmes : le lemme 4.10 donne le réel  $b$  à utiliser dans le lemme 4.8.

Pour montrer le théorème 0.1, il suffit maintenant d'une part de majorer le terme à l'intérieur de l'intégrale de la proposition 4.2, et d'autre part de donner une borne explicite pour  $C$ .

**Lemme 4.11.** *Si  $r \geq 2$ , alors pour tout  $\alpha \in R^+ \setminus R_I^+$  et tout  $\chi \in Q^*$ ,*

$$0 \leq \frac{\langle 2\rho^P + \chi, \check{\alpha} \rangle}{\langle \rho^B, \check{\alpha} \rangle} \leq C^r \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer le résultat pour tout sommet  $\chi$  de  $Q^*$ .

Soit  $\alpha \in S \setminus I$ .

Si  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  est un sommet de  $Q$ , alors le lemme 4.10 nous dit que

$$\frac{\langle 2\rho^P + \chi, \check{\alpha} \rangle}{\langle \rho^B, \check{\alpha} \rangle} = a_\alpha (1 + \langle \chi, \frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} \rangle) \leq C^r.$$

Si  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  n'est pas un sommet de  $Q$ , on obtient une majoration légèrement plus grande. Comme  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} \in Q$ , il existe des sommets  $u_i$  de  $Q$  et des réels positifs  $\lambda_i$  tels que  $\sum \lambda_i \leq 1$  et  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} = \sum \lambda_i u_i$ . D'après le lemme 4.10 on a pour tout  $i$ ,  $\langle \chi, u_i \rangle \leq C^r - 1$  car  $a_{u_i} \geq 1$ . On en déduit alors que

$$1 + \langle \chi, \frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha} \rangle \leq C^r \text{ et donc } \frac{\langle 2\rho^P + \chi, \check{\alpha} \rangle}{\langle \rho^B, \check{\alpha} \rangle} \leq C^r a_\alpha.$$

Soit maintenant  $\alpha \in R^+ \setminus R_I^+$ . Ecrivons  $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_s$  où  $\beta_1, \dots, \beta_s$  sont des racines simples. On a alors

$$\frac{\langle 2\rho^P + \chi, \check{\alpha} \rangle}{\langle \rho^B, \check{\alpha} \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^s \langle 2\rho^P + \chi, \check{\beta}_i \rangle}{\sum_{i=1}^s 1} \leq \frac{sC^r \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha}{s}.$$

□

**Remarque 4.12.** Lorsque  $\rho = 1$ , d'une part  $r = 1$  et d'autre part  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  est un sommet de  $Q$  pour tout  $\alpha \in S \setminus I$ . On a alors le même résultat en remplaçant  $C^r \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha$  par  $C + 1$ .

**Lemme 4.13.**

$$\sum_{\alpha \in S \setminus I} (a_\alpha - 1) \leq \dim(G/P) = \#(R^+ \setminus R_I^+).$$

En particulier  $C \leq d = n + \#(R^+ \setminus R_I^+)$ .

*Démonstration.* La preuve se fait en étudiant les différents cas, mais avant tout, réduisons le nombre de ces cas.

Etape 1. Pour tout  $\alpha \in S \setminus I$ ,  $a_\alpha = \langle 2\rho^P, \check{\alpha} \rangle = \langle 2\rho^B, \check{\alpha} \rangle - \langle 2\rho_I, \check{\alpha} \rangle$  où  $2\rho_I = \sum_{\beta \in R_I^+} \beta$ . Ainsi, comme  $\langle 2\rho^B, \check{\alpha} \rangle = 2$ , on a

$$\sum_{\alpha \in S \setminus I} (a_\alpha - 1) = \#(S \setminus I) - \sum_{\alpha \in S \setminus I} \sum_{\beta \in R_I^+} \langle \beta, \check{\alpha} \rangle.$$

Le résultat à montrer est donc

$$\sum_{\alpha \in S \setminus I} \sum_{\beta \in R_I^+} -\langle \beta, \check{\alpha} \rangle \leq \#(R^+ \setminus R_I^+) - \#(S \setminus I).$$

Etape 2. Montrons qu'il suffit de montrer le résultat lorsque le diagramme de Dynkin  $\Gamma_I$  (voir la définition 2.4) est connexe. Supposons donc le résultat vrai dans ce cas. Soit  $I = \bigsqcup_{j=1}^t I_j$  tel que  $\Gamma_I = \bigsqcup_{j=1}^t \Gamma_{I_j}$  soit la décomposition de  $\Gamma_I$  en composantes connexes. Notons  $S_j$  l'ensemble des racines simples de  $S$  liées à  $I_j$  dans le diagramme de Dynkin  $\Gamma_S$  de  $G$  (c'est-à-dire les racines simples  $\alpha$  telles qu'il existe une racine simple  $\beta$  de  $I_j$  avec  $\langle \alpha, \check{\beta} \rangle \neq 0$ ). Alors

$$\sum_{\alpha \in S \setminus I} \sum_{\beta \in R_I^+} -\langle \beta, \check{\alpha} \rangle = \sum_{j=1}^t \sum_{\beta \in R_{I_j}^+} \sum_{\alpha \in S_j \setminus I_j} -\langle \beta, \check{\alpha} \rangle$$

ce qui, par hypothèse, est inférieur à  $\sum_{j=1}^t (\#(R_{S_j}^+ \setminus R_{I_j}^+) - \#(S_j \setminus I_j))$ .

Or  $\#(R_{S_j}^+ \setminus R_{I_j}^+) - \#(S_j \setminus I_j)$  est le nombre de racines positives non simples de  $R_{S_j}^+ \setminus R_{I_j}^+$ . De plus,  $R_{S_j}^+ \cap R_{S_k}^+ = S_j \cap S_k$  si  $j \neq k$  car deux racines simples ne peuvent pas être toutes les deux liées à  $I_j$  et  $I_k$  (un diagramme de Dynkin ne contient pas de cycle). On a donc

$$\sum_{j=1}^t (\#(R_{S_j}^+ \setminus R_{I_j}^+) - \#(S_j \setminus I_j)) \leq \#(R^+ \setminus R_I^+) - \#(S \setminus I).$$

Il suffit donc de montrer le résultat lorsque  $\Gamma_I$  est connexe et  $S$  est l'ensemble des racines simples liées à  $I$ .

Etape 3. On peut de plus supposer que  $S \setminus I$  est un singleton. En effet, en regardant la réunion disjointe  $\bigsqcup_{\alpha \in S \setminus I} R_{I \cup \{\alpha\}}^+ \setminus R_I^+$  incluse dans  $R^+ \setminus R_I^+$ , on voit que

$$\sum_{\alpha \in S \setminus I} (\#(R_{I \cup \{\alpha\}}^+ \setminus R_I^+) - 1) \leq \#(R^+ \setminus R_I^+) - \#(S \setminus I).$$

Etape 4. Il reste à calculer d'une part  $-\sum_{\beta \in R_I^+} \langle \beta, \check{\alpha} \rangle$ , et d'autre part  $\#(R_{I \cup \{\alpha\}}^+ \setminus R_I^+) - 1$  dans les différents cas où  $\Gamma_I$  est connexe et  $S \setminus I$  est un singleton.

Le tableau ci-dessous résume le résultat des calculs en fonction du type des diagrammes de Dynkin  $\Gamma_I$  et  $\Gamma_S$ . On peut remarquer qu'il y a deux façons différentes d'ajouter un sommet à un diagramme de type  $A_1$  pour obtenir un diagramme de type  $G_2$ . Il y a aussi deux façons d'ajouter un sommet à un diagramme de type  $A_1$  pour obtenir un diagramme de type  $B_2$ ; l'une des façon est comptée dans le cas  $A_i$  et  $B_{i+1}$  et l'autre dans le cas  $A_i$  et  $C_{i+1}$  en identifiant  $B_2$  et  $C_2$ .

Types respectifs de $\Gamma_I$ et de $\Gamma_S$	$-\sum_{\beta \in R_I^+} \langle \beta, \check{\alpha} \rangle$	$\#(R_{I \cup \{\alpha\}}^+ \setminus R_I^+) - 1$
$A_i$ et $A_{i+1}$ pour $i \geq 0$	$i$	$i$
$A_i$ et $B_{i+1}$ pour $i \geq 1$	$2i$	$\frac{i(i+3)}{2}$
$A_i$ et $C_{i+1}$ pour $i \geq 1$	$i$	$\frac{i(i+3)}{2}$
$A_i$ et $D_{i+1}$ pour $i \geq 3$	$2(i-1)$	$\frac{(i-1)(i+2)}{2}$
$A_5$ et $E_6$	9	20
$A_6$ et $E_7$	12	41
$A_7$ et $E_8$	15	91
$A_1$ et $G_2$ (flèche vers $\alpha$ )	3	4
$A_1$ et $G_2$ (flèche partant de $\alpha$ )	1	4
$B_i$ et $B_{i+1}$ pour $i \geq 2$	$2i-1$	$2i$
$B_2$ et $C_3$	4	4
$B_3$ et $F_4$	9	14
$C_i$ et $A_{i+1}$ pour $i \geq 3$	$2i$	$2i$
$C_3$ et $F_4$	6	14
$D_i$ et $D_{i+1}$ pour $i \geq 4$	$2i-2$	$2i-1$
$D_5$ et $E_6$	10	15
$D_6$ et $E_7$	15	32
$D_7$ et $E_8$	21	78
$E_6$ et $E_7$	16	26
$E_7$ et $E_8$	27	56

**Exemples 4.14.** 1/ Lorsque  $\Gamma_I$  est de type  $A_i$  et que  $\Gamma_S$  est de type  $A_{i+1}$ , notons  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_i$  les racines simples de  $S$ ,

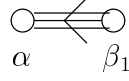


alors

$$\begin{aligned} - \sum_{\beta \in R_I^+} \langle \beta, \check{\alpha} \rangle &= - \sum_{1 \leq j \leq k \leq i} \langle \beta_j + \dots + \beta_k, \check{\alpha} \rangle \\ &= - \sum_{1 \leq k \leq i} \langle \beta_1 + \dots + \beta_k, \check{\alpha} \rangle = - \sum_{1 \leq k \leq i} -1 = i. \end{aligned}$$

Puis  $R_{I \cup \{\alpha\}}^+ \setminus R_I^+ = \{\alpha + \beta_1 + \dots + \beta_k \mid 1 \leq k \leq i\}$ .

2/ Lorsque  $\Gamma_I$  est de type  $A_1$  et que  $\Gamma_S$  est de type  $G_2$  (flèche vers  $\alpha$ ), notons  $\beta_1$  la racine de  $I$



alors

$$-\sum_{\beta \in R_I^+} \langle \beta, \check{\alpha} \rangle = -\langle \beta_1, \check{\alpha} \rangle = 3.$$

Puis  $R_{I \cup \{\alpha\}}^+ \setminus R_I^+ = \{\alpha, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta\}$ .

□

On peut remarquer que les configurations où il y a égalité sont celles qu'on retrouve lorsqu'on s'intéresse aux variétés horosphériques non toroïdales lisses (voir le chapitre 2). Le résultat de ce lemme est alors optimal même dans le cas lisse.

On a maintenant tous les outils pour démontrer le théorème 0.1.

*Démonstration.* Si  $\rho > 1$  alors les propositions 4.2 et 4.7 ainsi que les lemmes 4.11 et 4.13 nous permettent de dire que

$$(-K_X)^d \leq d! (d^r \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n (d^r \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^{d-n} = d! d^{rd} (\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^d.$$

On a évidemment  $\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha \leq C \leq d$  dès que  $n \geq 1$ . D'autre part, si  $n = 0$  on a  $X = G/P$  et  $\rho = \sharp(S \setminus I) > 1$ ; donc on a aussi  $\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha \leq C$  puisque  $a_\alpha \geq 2$  pour tout  $\alpha \in S \setminus I$ .

Si  $\rho \geq r + 1$  alors  $(-K_X)^d \leq d! d^{d\rho}$ .

Si  $\rho = r > 1$ ,  $\frac{\check{\alpha}}{a_\alpha}$  est un sommet de  $Q$  pour tout  $\alpha \in S \setminus I$ . La preuve du lemme 4.11 nous dit que

$$\frac{\langle 2\rho^P + \chi, \check{\alpha} \rangle}{\langle \rho^B, \check{\alpha} \rangle} \leq C^r$$

et donc

$$(-K_X)^d \leq d! (d^r \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n (d^r)^{d-n} = d! d^{rd} (\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n \leq d! d^{d\rho+n}.$$

De même, si  $\rho = 1$  on a aussi  $r = 1$  et

$$\begin{aligned} (-K_X)^d &\leq d! ((d+1) \max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n ((d+1))^{d-n} \\ &= d! (d+1)^d (\max_{\alpha \in S \setminus I} a_\alpha)^n \leq d! (d+1)^{d+n}. \end{aligned}$$

□

## 4.2 Majoration du nombre de Picard

On va majorer le nombre de Picard des variétés horosphériques  $\mathbb{Q}$ -factorielles.

**Définition 4.15.** Une variété normale est dite  $\mathbb{Q}$ -factorielle si tout diviseur de Weil est  $\mathbb{Q}$ -Cartier.

On va formuler un critère analogue à celui donné dans la proposition 4.4, toujours en utilisant la caractérisation des diviseurs de Cartier sur une variété sphérique [Br89, prop.3.1] énoncée dans la proposition 3.2. La preuve est laissée au lecteur.

**Proposition 4.16.** Soit  $X$  un plongement de Fano de  $G/H$ . On note  $Q$  le polytope  $G/H$ -réflexif associé. Alors  $X$  est  $\mathbb{Q}$ -factoriel si et seulement si toute face  $F$  de  $Q$  est un simplexe, et tous les points de  $F$  de la forme  $\frac{\check{\alpha}_M}{a_\alpha}$  sont des sommets de  $F$ .

On va montrer un résultat analogue à celui obtenu par C. Casagrande dans le cas torique [Ca06, th.1(i)].

**Théorème 4.17.** Soit  $X$  une variété horosphérique de Fano,  $\mathbb{Q}$ -factorielle, de rang  $n$ , de dimension  $d$  et de nombre de Picard  $\rho$ . Alors

$$\rho \leq 2n + \sharp(S \setminus I) \leq n + d \leq 2d.$$

On en déduit alors facilement le théorème 0.2 énoncé dans l'introduction, en remarquant que  $n + d = 2d$  si et seulement si  $X$  est torique.

La démonstration qui suit est inspirée des preuves de C. Casagrande [Ca06, th.3(i)] et de B. Nill [Ni05, lem.5.5].

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de  $Q^*$ .

Étape 1. Notons  $F_v$  la face de  $Q$  associée à  $v$ , et  $e_1, \dots, e_n$  les sommets de cette face. Montrons que tout sommet entier  $u$  (c'est-à-dire dans  $N$ ) de  $Q$  vérifiant  $\langle v, u \rangle = 0$  est adjacent à  $F_v$ , c'est-à-dire qu'il existe un indice  $j$  tel que  $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n$  et  $u$  soient les sommets d'une face  $F_j$  de  $Q$ . On note  $u^j$  le sommet  $u$  de  $Q$  vérifiant cette dernière condition.

Soit  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $(e_1, \dots, e_n)$  dans  $M_{\mathbb{R}}$ . Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Alors  $\langle e_j^*, u^j \rangle \neq 0$  (sinon  $u^j$  est dans l'hyperplan engendré par les  $(e_i)_{i \neq j}$ ) et on peut alors définir

$$\gamma_j = \frac{-1 - \langle v, u^j \rangle}{\langle e_j^*, u^j \rangle}.$$

De plus, le sommet de  $Q^*$  associé à  $F_j$  est  $v^j = v + \gamma_j e_j^*$ . On en déduit alors que  $\gamma_j > 0$ , car  $\langle v^j, e_j \rangle > -1$ .

Soit  $u$  un sommet entier de  $Q$  vérifiant  $\langle v, u \rangle = 0$ ; alors  $\langle v^j, u \rangle = \gamma_j \langle e_j^*, u \rangle$  et donc

$$u \notin F_j \iff \langle e_j^*, u \rangle \geq 0.$$

Si  $u \neq u^j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , alors  $\langle e_j^*, u \rangle \geq 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  et donc  $u$  est dans le cône engendré par  $e_1, \dots, e_n$ , ce qui n'est pas possible. Par conséquent,  $u$  est l'un des  $u^j$  et est donc adjacent à  $F_v$ .

Étape 2. Le nombre de sommets de  $Q$  tels que  $\langle v, u \rangle = -1$  est  $n$ , et le nombre de sommets entiers de  $Q$  tels que  $\langle v, u \rangle = 0$  est inférieur ou égal à  $n$  par l'étape 1.

L'origine est dans  $Q$ , donc il existe des sommets  $v_1, \dots, v_h$  de  $Q^*$  ( $h > 0$ ) et des entiers strictement positifs  $m_1, \dots, m_h$  tels que  $m_1 v_1 + \dots + v_h m_h = 0$ .

On note  $I = \{1, \dots, h\}$ ,  $M = \sum_{i \in I} m_i$ , et pour tout sommet entier  $u$  de  $Q$  on pose

$$\begin{aligned} A(u) &= \{i \in I \mid \langle v_i, u \rangle = -1\} \\ \text{et } B(u) &= \{i \in I \mid \langle v_i, u \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Alors on a, pour tout sommet entier  $u$  de  $Q$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in I} m_i \langle v_i, u \rangle \\ &= - \sum_{i \in A(u)} m_i + \sum_{i \notin A(u) \cup B(u)} m_i \langle v_i, u \rangle \\ &\geq - \sum_{i \in A(u)} m_i + \sum_{i \notin A(u) \cup B(u)} m_i \\ &= M - 2 \sum_{i \in A(u)} m_i - \sum_{i \in B(u)} m_i \end{aligned}$$

et donc  $M \leq 2 \sum_{i \in A(u)} m_i + \sum_{i \in B(u)} m_i$ .

Sommons cette dernière inégalité sur tous les sommets entiers  $u$  de  $Q$ .



On obtient alors, en notant  $r'$  le nombre de ces sommets :

$$\begin{aligned}
r'M &\leq \sum_u \sum_{i \in A(u)} 2m_i + \sum_u \sum_{i \in B(u)} m_i \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{u, \langle v_i, u \rangle = -1} 2m_i + \sum_{i \in I} \sum_{u, \langle v_i, u \rangle = 0} m_i \\
&\leq 3nM
\end{aligned}$$

donc le nombre de sommets entiers de  $Q$  est inférieur ou égal à  $3n$ . On en déduit alors facilement que le nombre  $n + r$  de sommets de  $Q$  est inférieur ou égal à  $3n + \sharp(\mathcal{D}_X)$ . En utilisant l'équation (4.5.1), on a

$$\rho = r + \sharp(S \setminus I) - \sharp(\mathcal{D}_X) \leq 2n + \sharp(S \setminus I).$$

□

**Corollaire 4.18.** *Soit  $X$  une variété horosphérique de Fano localement factorielle de dimension  $d \geq 2$ . Alors*

$$(-K_X)^d \leq d! d^{3d^2}.$$

*Démonstration.* Lorsque  $\rho \geq 2$  le degré est majoré par

$$d! d^{d(2n + \sharp(S \setminus I)) + n} \leq d! d^{d(2n + \sharp(S \setminus I)) + n},$$

grâce aux théorèmes 0.1 et 4.17. Sachant que  $n + \sharp(S \setminus I) \leq d$  (1.4.1), on obtient facilement le résultat.

Lorsque  $\rho = 1$ , on a  $(-K_X)^d \leq d! (d+1)^{d+n} \leq d! (d+1)^{2d} \leq d! d^{3d^2}$  dès que  $d > 1$ . □

**Remarques 4.19.** Le cas où  $d = 1$  et  $\rho = 1$  correspond à la droite projective ; le degré vaut alors 2.

Si on fait le même raisonnement dans le cas torique (en combinant le théorème de Debarre et celui de Casagrande), on obtient une borne légèrement plus forte,  $d! d^{2d^2}$  au lieu de  $d! d^{3d^2}$ .

# Chapitre 5

## Sur l'amplitude des diviseurs d'une variété horosphérique projective

G. Ewald et U. Wessels ont montré que pour toute variété torique projective  $X$  de dimension  $d$ , et pour tout diviseur de Cartier ample  $D$ , le diviseur  $(d-1)D$  est très ample [EW91]. On va utiliser leur argument pour démontrer le théorème 0.3.

On peut supposer que  $G$  est factoriel, quitte à le remplacer par le produit direct de son radical et du revêtement de sa partie semi-simple. Alors tout fibré en droites  $\mathcal{L}$  sur une  $G$ -variété normale  $X$  est  $G$ -linéarisable (voir [KK89, déf.2.1 et ch.2.4]), et donc  $H^0(X, \mathcal{L})$  est un  $G$ -module rationnel par [KK89, lem.2.5].

Soit  $X$  une  $G$ -variété sphérique projective de rang  $n$ , et soit  $D$  un diviseur de Cartier ample sur  $X$ . On peut supposer que  $D$  est  $B$ -stable, puisque tout diviseur sur une variété sphérique est linéairement équivalent à un diviseur  $B$ -stable.

Soit  $Q_D^*$  le polytope moment de  $D$ ; c'est un polytope convexe d'intérieur non vide dans  $M_{\mathbb{R}}$ , défini par

$$Q_D^* = \{\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Q}} \mid \text{le } G\text{-module } V(k\lambda) \text{ apparaît dans } H^0(X, kD) \\ \text{pour un certain entier } k > 0\}.$$

En particulier,

$$H^0(X, D) \simeq \bigoplus_{\lambda \in Q_D^*} V(\lambda).$$

Lorsque  $X$  est horosphérique et  $D = -K_X$ , on retrouve le polytope moment  $2\rho^P + Q^*$  de la remarque 3.5.

Toujours lorsque  $X$  est horosphérique, le polytope  $Q_D^*$  est entièrement défini par l'espace des sections de  $D$ . En effet, notons  $s$  la section canonique de  $D$ . C'est un vecteur propre sous l'action de  $B$ . On note  $\chi_0$  son poids. Comme pour  $-K_X$ , on décrit les sections de  $kD$  à l'aide de l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \{f \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)} \mid \text{div}(f) + kD \geq 0\} & \longrightarrow & H^0(X, kD)^{(B)} \\ f & \longmapsto & f s^k. \end{array}$$

De la proposition 3.2, on déduit alors que les poids de  $H^0(X, kD)^{(B)}$  sont les caractères situés dans l'enveloppe convexe des  $k(\chi_0 - \chi_{\mathcal{C}})$ , où les  $\chi_{\mathcal{C}}$  sont les caractères définis par le diviseur de Cartier  $D$  lorsque  $\mathcal{C}$  décrit l'ensemble des cônes coloriés maximaux de  $X$ . Le polytope  $Q_D^*$  est donc l'enveloppe convexe des caractères  $\chi_0 - \chi_{\mathcal{C}}$ .

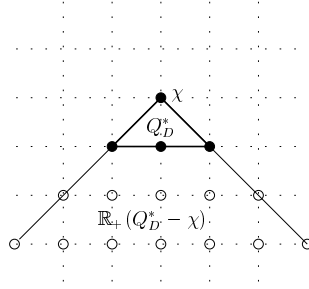
En particulier, les sommets de  $Q_D^*$  sont entiers (c'est-à-dire dans  $M$ ) et sont en bijection avec les  $G$ -orbites fermées de  $X$ , ou encore avec les plongements simples de  $X$ .

Par contre, si  $X$  est seulement sphérique, il se peut que  $Q_D^*$  ait des sommets non entiers ; mais les  $G$ -orbites fermées  $Y$  de  $X$  sont associés à certains sommets entiers de  $Q_D^*$ . En effet,  $H^0(Y, D \cap Y)$  est un  $G$ -module simple, et son plus grand poids est un sommet de  $Q_D^*$ , car les  $G$ -orbites de  $X$  correspondent à des faces de  $Q_D^*$  [Br97b, 5.3].

**Lemme 5.1.** *Lorsque  $X$  est horosphérique, avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $D$  est très ample,
- (2) pour tout sommet  $\chi$  de  $Q_D^*$ , le monoïde  $M \cap \mathbb{R}_+(Q_D^* - \chi)$  est engendré par  $M \cap (Q_D^* - \chi)$ .

Le monoïde  $M \cap \mathbb{R}_+(Q_D^* - \chi)$  est l'ensemble des éléments de  $M$  qui sont dans le cône engendré par  $Q_D^*$  au point  $\chi$ .



**Remarque 5.2.** Dans [EW91], G. Ewald et U. Wessels montrent que la condition (2) est vérifiée pour tout polytope de la forme  $(n - 1)Q$ , où  $Q$  est un polytope à sommets entiers de dimension  $n$ . Or on a  $Q_{kD}^* = kQ_D^*$  pour tout entier  $k > 0$ , donc la première partie du théorème 0.3 se déduit du lemme ci-dessus.

De plus, lorsque  $X$  est sphérique, on a encore le résultat suivant (dont la démonstration est identique à celle du lemme) : si la condition (2) est vérifiée pour tout sommet entier de  $Q_D^*$  alors  $D$  est très ample. Ainsi la première partie du théorème 0.3 reste vraie dans le cas sphérique.

*Démonstration du lemme.* Sur une variété sphérique, tout diviseur ample est engendré par ses sections globales (conséquence immédiate de [Br89, th.3.3]), donc  $D$  définit un morphisme  $G$ -équivariant

$$\begin{aligned} \phi_D : X &\longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, D)^*) \\ x &\longmapsto [s \mapsto s(x)]. \end{aligned}$$

De plus,  $D$  est très ample si et seulement si  $\phi_D$  est une immersion fermée, ou encore, si et seulement s'il existe un recouvrement fini de  $X$  par des ouverts affines  $X_{s_i}$  tels que l'application  $\mathbb{C}[\mathbb{P}(H^0(X, D)^*)_{s_i \neq 0}] \longrightarrow \mathbb{C}[X_{s_i}]$  soit surjective.

Les plongements simples  $X_Y$  de  $X$  (lorsque  $Y$  parcourt les  $G$ -orbites fermées de  $X$ ) recouvrent  $X$ , donc il suffit d'étudier  $\phi_D$  sur chaque plongement simple  $X_Y$ .

Le morphisme de restriction  $H^0(X, D) \longrightarrow H^0(Y, Y \cap D)$  est surjectif, car  $Y$  est homogène et il existe une section non identiquement nulle sur  $Y$ . De plus, le  $G$ -module  $H^0(X, D)$  n'a que des multiplicités 1 dans sa décomposition en  $G$ -modules simples. On a ainsi une projection canonique de  $H^0(X, D)^*$  dans  $H^0(Y, D \cap Y)^*$  qui définit alors une application rationnelle  $\pi$  de  $\mathbb{P}(H^0(X, D)^*)$  dans  $\mathbb{P}(H^0(Y, D \cap Y)^*)$ . En fait  $\phi_D(X_Y)$  est inclus dans

le domaine de définition de  $\pi$ , car  $X_Y = \{x \in X \mid \overline{G.x} \supset Y\}$ . Notons  $\psi$  la composée de  $\phi_D$  et  $\pi$ . On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_Y & \xrightarrow{\phi_D} & \mathbb{P}(H^0(X, D)^*) \\ & \searrow \psi & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}(H^0(Y, D \cap Y)^*) \end{array}$$

On a vu au début du chapitre que les plongements simples de  $X$  sont en bijection avec les sommets de  $Q_D^*$ . Soit  $\chi_Y$  le sommet de  $Q_D^*$  correspondant au plongement simple  $X_Y$  de cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ . Si

$$W := \mathbb{P}(H^0(Y, D \cap Y)^*)_{v_{\chi_Y} \neq 0},$$

alors  $\psi^{-1}(W)$  est un ouvert affine  $B$ -stable de  $X_Y$ ; c'est donc l'unique ouvert affine  $B$ -stable  $X_0$  de  $X_Y$  [Kn91, ch.3].

De plus  $X_Y$  est recouvert par un nombre fini de translatés  $g.X_0$ ,  $g \in G$ , et

$$\mathbb{C}[X_0]^{(B)} = \{f \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)} \text{ de poids dans } \check{\mathcal{C}} \cap M\}$$

où  $\check{\mathcal{C}}$  est le cône dual de  $\mathcal{C}$  dans  $M$ .

On a aussi

$$X_0 \simeq R_u(P) \times Z$$

où  $P$  est un sous-groupe parabolique contenant  $B$  et  $Z$  est une variété sphérique affine sous l'action du sous-groupe de Levi  $L$  de  $P$  contenant  $T$  [Br97b, chap. 1.4]. De plus [Br97b, chap. 3.3],

$$\mathbb{C}[Z]^{(B \cap L)} = \{f \in \mathbb{C}(Z)^{(B \cap L)} \text{ de poids dans } \check{\mathcal{C}} \cap M\}.$$

Remarquons maintenant que  $\check{\mathcal{C}} \cap M$  n'est autre que le monoïde  $M \cap \mathbb{R}_+(Q_D^* - \chi_Y)$ . On en déduit donc que  $\phi_D$  est une immersion fermée si et seulement si ce monoïde est engendré par  $M \cap (Q_D^* - \chi_Y)$ , et cela pour tout  $Y$ .  $\square$

Pour démontrer la deuxième partie du théorème 0.3, reprenons les notations de la démonstration du lemme précédent. Lorsque  $X$  est une variété horosphérique localement factorielle, le cône  $\mathcal{C}$  est engendré par une base de  $N$  d'après la proposition 2.2. Donc  $\check{\mathcal{C}}$  est engendré par une base de  $M$ . Et comme  $Q_D^*$  est à sommets entiers,  $Q_D^* - \chi_Y$  contient alors cette dernière base. Ainsi la condition (2) du lemme est vérifiée, et  $D$  est très ample.

# Chapitre 6

## Détermination des polygones $G/H$ -réflexifs sur certains exemples

Nous allons déterminer les polygones  $G/H$ -réflexifs à automorphisme près, lorsque  $G/H = (SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ ,  $(SL_2 \times SL_2)/U$  ou  $SL_3/U$ . Chaque classe d'automorphisme de polygones  $G/H$ -réflexifs sera représentée par un et un seul polygone  $G/H$ -réflexif. L'ordre de ces polygones sera simplement l'ordre de construction.

Rappelons qu'on peut identifier les polygones  $SL_3/U$ -réflexifs et les polygones  $(SL_2 \times SL_2)/U$ -réflexifs (voir l'exemple 2.16(4)).

**Proposition 6.1.** *Les polygones  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ -réflexifs sont exactement, à automorphisme près, les 135 polygones représentés dans les figures du chapitre 6.2 (sauf première figure explicative).*

*Les 16 polygones marqués d'un  $L$  sont les polygones  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ -réflexifs dont le plongement de  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$  associé est lisse.*

*Les polygones  $(SL_2 \times SL_2)/U$ -réflexifs (ou  $SL_3/U$ -réflexifs) sont exactement, à automorphisme près, les 398 polygones représentés dans les figures suivantes du chapitre 6.3 (sauf première figure explicative).*

*Les 27 polygones marqués d'un  $L$  sont les polygones  $(SL_2 \times SL_2)/U$ -réflexifs dont les plongements de  $(SL_2 \times SL_2)/U$  et de  $SL_3/U$  associés sont lisses.*

Et les 12 polygones marqués d'un  $L'$  sont les polygones  $(SL_2 \times SL_2)/U$ -réflexifs dont le plongement de  $(SL_2 \times SL_2)/U$  associé est lisse et dont le plongement de  $SL_3/U$  associé est localement factoriel mais singulier.

## 6.1 Outils de calcul

Rappelons d'abord que dans les trois cas,  $G/H$  est horosphérique de rang 2. Les polygones  $G/H$ -réflexifs (cf définition 3.3) sont donc des polygones convexes dans  $\mathbb{R}^2 = N_{\mathbb{R}} \supset N = \mathbb{Z}^2$ .

Pour l'espace homogène  $G/H = (SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ , il n'y a qu'une couleur et son image  $\tilde{\alpha}_M$  se complète en une base de  $\mathbb{Z}^2$ . On note  $(e_1, e_2)$  la base de  $\mathbb{Z}^2$  telle que  $e_1 = \tilde{\alpha}_M$  et  $e_2$  est l'élément dual du caractère identité de  $\mathbb{C}^*$ . De plus  $a_\alpha = 2$ , donc le seul sommet non entier (c'est-à-dire qui n'est pas dans  $\mathbb{Z}^2$ ) que peut avoir un polygone  $G/H$ -réflexif est  $\frac{e_1}{2}$ .

Pour les espaces homogènes  $(SL_2 \times SL_2)/U$  et  $SL_3/U$  il y a dans chaque cas deux couleurs dont les images  $\tilde{\alpha}_M$  et  $\tilde{\beta}_M$  forment une base de  $\mathbb{Z}^2$  qu'on note  $(e_1, e_2)$ . De plus  $a_\alpha = a_\beta = 2$ , donc les seuls sommets non entiers que peut avoir un polygone  $G/H$ -réflexif sont  $\frac{e_1}{2}$  et  $\frac{e_2}{2}$ .

**Proposition 6.2.** *Supposons que  $G/H$  est l'un des trois espaces homogènes horosphériques ci-dessus. Soit  $Q$  un polygone convexe de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant les conditions (1) et (3) de la définition 3.3.*

*Appelons segment de  $Q$  tout segment  $[p, q]$  dans la bord de  $Q$  tel que  $p$  et  $q$  soient dans  $\mathbb{Z}^2 \cup \{\frac{\tilde{\alpha}_M}{a_\alpha}, \alpha \in S \setminus I\}$ .*

*Alors  $Q$  est  $G/H$ -réflexif si et seulement si pour tout segment  $[p, q]$  de  $Q$  tel que  $\mathbb{Z}^2 \cap ]p, q[ = \emptyset$ ,  $[p, q]$  vérifie l'une des conditions suivantes :*

- (a)  $p \in \mathbb{Z}^2, q \in \mathbb{Z}^2$ , et  $(p, q)$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$  ;
- (b)  $p \in \mathbb{Z}^2, q = \frac{e_i}{2}$  avec  $i = 1$  ou  $2$ , et  $(p, 2q)$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$  ;
- (b')  $q \in \mathbb{Z}^2, p = \frac{e_i}{2}$  avec  $i = 1$  ou  $2$ , et  $(2p, q)$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$  ;
- (c)  $p = \frac{e_1}{2}$  et  $q = \frac{e_2}{2}$ .

Lorsque  $G/H = (SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ , on remarquera bien sûr que les conditions (c), (b) et (b') avec  $i = 2$ , ne peuvent pas être vérifiées, car il n'y a qu'une

couleur !

*Démonstration.* Le polygone  $Q$  est  $G/H$ -réflexif si et seulement si son polygone dual  $Q^*$  est à sommets entiers (c'est-à-dire dans  $M$ ), ou encore, si et seulement si pour chaque face  $F$  de  $Q$ , il existe  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que pour tout  $u \in F$ ,  $\langle v, u \rangle = -1$ .

Soit  $F$  une face de  $Q$  ; alors  $F$  contient un segment  $[p, q]$  de  $Q$  tel que  $\mathbb{Z}^2 \cap ]p, q[ = \emptyset$ . Si  $[p, q]$  vérifie l'une des conditions (a), (b), (b') ou (c), alors  $(p, q)$ ,  $(p, 2q)$ ,  $(2p, q)$  ou  $(2p, 2q)$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$ . Il existe donc  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\langle v, p \rangle = -1$ ,  $\langle v, q \rangle = -1$ , et par conséquent  $\langle v, u \rangle = -1$  pour tout  $u \in F$ .

Il reste donc à montrer que si  $Q$  est un polygone  $G/H$ -réflexif, alors pour tout segment  $[p, q]$  tel que  $\mathbb{Z}^2 \cap ]p, q[ = \emptyset$  vérifie l'une des quatre conditions ci-dessus.

Soit  $[p, q]$  un segment de  $Q$  tel que  $\mathbb{Z}^2 \cap ]p, q[ = \emptyset$ . Notons  $v \in \mathbb{Z}^2$  le sommet de  $Q^*$  correspondant à la face de  $Q$  contenant  $[p, q]$ . En particulier,  $\langle v, p \rangle = -1$  et  $\langle v, q \rangle = -1$ .

Si  $p \in \mathbb{Z}^2$  et  $q \in \mathbb{Z}^2$ , montrons alors que le parallélogramme de sommets  $0$ ,  $p$ ,  $q$  et  $p+q$  intersecte  $\mathbb{Z}^2$  seulement en ses sommets, ce qui est équivalent à dire que  $(p, q)$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$ . Soit  $u \in \mathbb{Z}^2$  un élément de ce parallélogramme. Quitte à remplacer  $u$  par  $p + q - u$ , on peut supposer que  $u$  est dans le triangle de sommets  $0$ ,  $p$  et  $q$ . On a alors  $-1 \leq \langle v, u \rangle \leq 0$ . De plus  $\langle v, u \rangle = 0$  si et seulement si  $u = 0$ , et  $\langle v, u \rangle = -1$  si et seulement si  $u \in [p, q]$ , ce qui est équivalent à  $u = p$  ou  $q$ , car  $\mathbb{Z}^2 \cap ]p, q[ = \emptyset$ . On conclut alors en remarquant que  $\langle v, u \rangle$  doit être entier, car  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathbb{Z}^2$ .

On va appliquer le même raisonnement au cas où  $p \in \mathbb{Z}^2$  et  $q = \frac{e_i}{2}$  (cas (b) et (b')). Montrons que le parallélogramme de sommets  $0$ ,  $p$ ,  $2q$  et  $p + 2q$  intersecte  $\mathbb{Z}^2$  seulement en ses sommets. Soit  $u \in \mathbb{Z}^2$  un élément de ce parallélogramme. Quitte à remplacer  $u$  par  $p + 2q - u$ , on peut supposer que  $u$  est dans le triangle de sommets  $0$ ,  $p$  et  $2q$ . On a alors  $-2 \leq \langle v, u \rangle \leq 0$ . De plus, on vérifie facilement qu'on a  $\langle v, u \rangle = 0$  si et seulement si  $u = 0$ , puis  $\langle v, u \rangle = -2$  si et seulement si  $u = 2q$ , et enfin  $\langle v, u \rangle = -1$  si et seulement si  $u \in [p, q]$ .  $\square$

**Remarque 6.3.** Cette proposition implique en particulier le fait que  $Q$  ne contient aucun point de  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  dans son intérieur.

**Proposition 6.4.** *Soit  $Q$  un polygone  $G/H$ -réflexif.*



Si  $G/H$  est l'un des trois espaces homogène ci-dessus, alors  $e_1 \in Q$  ou bien  $\frac{e_1}{2}$  est sur le bord de  $Q$ .

De plus, si  $G/H = (SL_2 \times SL_2)/U$  ou  $SL_3/U$ , alors  $e_2 \in Q$  ou bien  $\frac{e_2}{2}$  est sur le bord de  $Q$ .

*Démonstration.* Montrons seulement que  $e_1 \in Q$  ou bien  $\frac{e_1}{2}$  est sur le bord de  $Q$  (c'est exactement la même démonstration pour la suite de la proposition). Supposons que  $\frac{e_1}{2}$  soit à l'intérieur de  $Q$ . Il existe un segment  $[p, q]$  de  $Q$ , tel que  $\frac{e_1}{2}$  soit dans le triangle de sommets  $0, p$  et  $q$ . Notons  $v \in \mathbb{Z}^2$  le sommet de  $Q^*$  associé à la face de  $Q$  contenant  $[p, q]$ . On a alors  $-1 < \langle v, \frac{e_1}{2} \rangle < 0$  et donc  $\langle v, e_1 \rangle = -1$ . De plus  $e_1$  est dans le cône de sommet  $0$  engendré par le segment  $[p, q]$ , par conséquent  $e_1 \in [p, q] \subset Q$ .  $\square$

On va maintenant construire à la main tous les polygones  $G/H$ -réflexifs  $Q$  lorsque  $G/H = (SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$  et lorsque  $G/H = (SL_2 \times SL_2)/U$ . On va d'abord isoler différents cas selon le nombre de couleurs qui sont sur le bord de  $Q$ . Ensuite, on déterminera un segment particulier de  $Q$ . Puis on construira, à partir de ce segment, le bord de  $Q$ , point par point et dans le sens inverse trigonométrique, en utilisant essentiellement la proposition 6.2.

Par cette méthode, on peut déterminer plusieurs polygones  $G/H$ -réflexifs dans une même classe d'automorphisme. On expliquera alors, dans chaque cas, les arguments utilisés pour ne pas donner des polygones  $G/H$ -réflexifs en trop.

On note  $(x, y)$  le point  $xe_1 + ye_2$  de  $\mathbb{Z}^2$ . Rappelons que l'origine de  $\mathbb{Z}^2$  est notée, dans les figures, par un point noir, et les points  $\frac{\alpha_M}{a_\alpha}$  par des points blancs.

## 6.2 $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$

Les automorphismes (cf la proposition 3.10) sont ici les automorphismes de  $\mathbb{Z}^2$  qui fixent la couleur  $(\frac{1}{2}, 0)$ , c'est-à-dire les éléments du groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in SL_2, a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrons qu'un polygone  $G/H$ -réflexif  $Q$  possède au moins un point sur la droite  $y = 1$  et au moins un sur la droite  $y = -1$ . D'après la proposition 6.4,  $(1, 0)$  ou bien  $(\frac{1}{2}, 0)$  est sur le bord de  $Q$ . Notons  $p$  ce point particulier.

Il existe alors  $q_1 \in \mathbb{Z}^2$  (respectivement  $q_2$ ) d'ordonnée positive (respectivement négative) tels que pour  $i = 1, 2$ ,  $[p, q_i]$  soit un segment de  $Q$  vérifiant  $\mathbb{Z}^2 \cap ]p, q_i[ = \emptyset$ . La proposition 6.2 nous dit alors que  $q_1$  est sur la droite  $y = 1$  et  $q_2$  est sur la droite  $y = -1$ .

Ainsi, on peut supposer, quitte à appliquer un automorphisme, que le point  $(1, 1)$  est le point de  $Q$  le plus à droite (c'est-à-dire  $x$  maximum) sur la droite  $y = 1$ .

Cette dernière remarque n'est pas suffisante pour ne compter qu'une seule fois un polygone. En effet notons  $(x, -1)$  le point de  $Q$  le plus à droite sur la droite  $y = -1$ , alors le point le plus à droite du polygone  $Q' := \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q$  sur la droite  $y = 1$  est aussi  $(1, 1)$ . Par contre, on voit facilement que  $\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est le seul automorphisme qui permet d'avoir un polygone ayant aussi cette propriété. Ainsi, dans chaque classe d'automorphisme, on obtiendra au plus deux polygones  $G/H$ -réflexifs. Pour chaque polygone  $G/H$ -réflexif nouvellement construit  $Q$ , on calculera le polytope  $Q'$  associé (défini comme ci-dessus). Et si  $Q'$  est présent dans la liste des polygones  $G/H$ -réflexifs déjà calculés, alors on continuera la construction sans ajouter  $Q$  dans la liste.

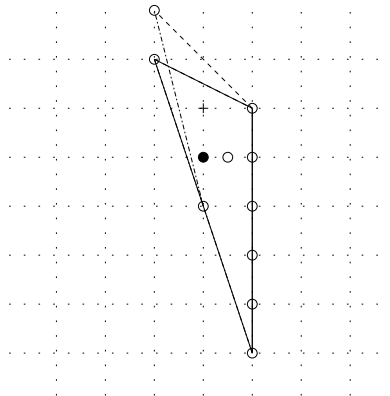
Je détaillerai le début de la construction des polygones  $G/H$ -réflexifs afin de faire comprendre la méthode utilisée. Ensuite, je donnerai les polygones obtenus par cette méthode, dont la mise en œuvre est longue mais sans difficulté.

- $[(1, 1), (1, 0)]$  est un segment de  $Q$ .

Rappelons qu'on construit un polytope point par point dans le sens inverse trigonométrique. Notons  $p$  le dernier point construit. On choisit le nouveau point  $q$  de telle sorte que l'angle formé par les demi-droites  $[0, q]$  et  $[0, p]$  soit minimal. Ici, le dernier point construit est  $p = (1, 0)$ . Le prochain point est de la forme  $q = (x, -1)$  (d'après la proposition 6.2). Le polygone  $Q$  est convexe et contient  $0$ , donc  $x \leq 1$ . De plus l'angle formé par les demi-droites  $[0, q]$  et  $[0, p]$  est minimal lorsque  $x = 1$ . Le nouveau point construit est donc  $(1, -1)$ .

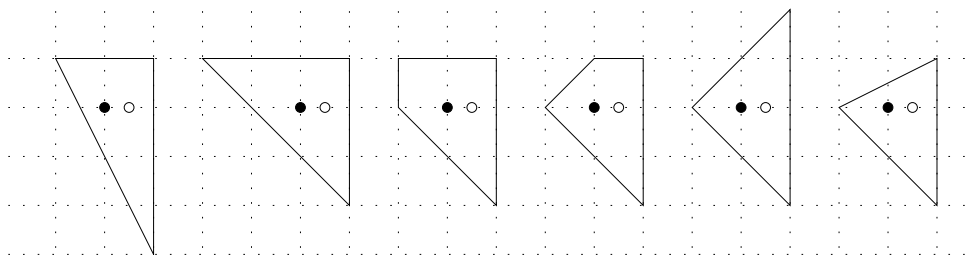
On continue ainsi le raisonnement à partir du nouveau point construit. Au bout de  $y$  étapes, on a construit le segment  $[(1, 1), (1, -y)]$ , où  $y$  est l'entier maximal tel qu'un polygone  $G/H$ -réflexif contienne le segment  $[(1, 1), (1, -y)]$ .

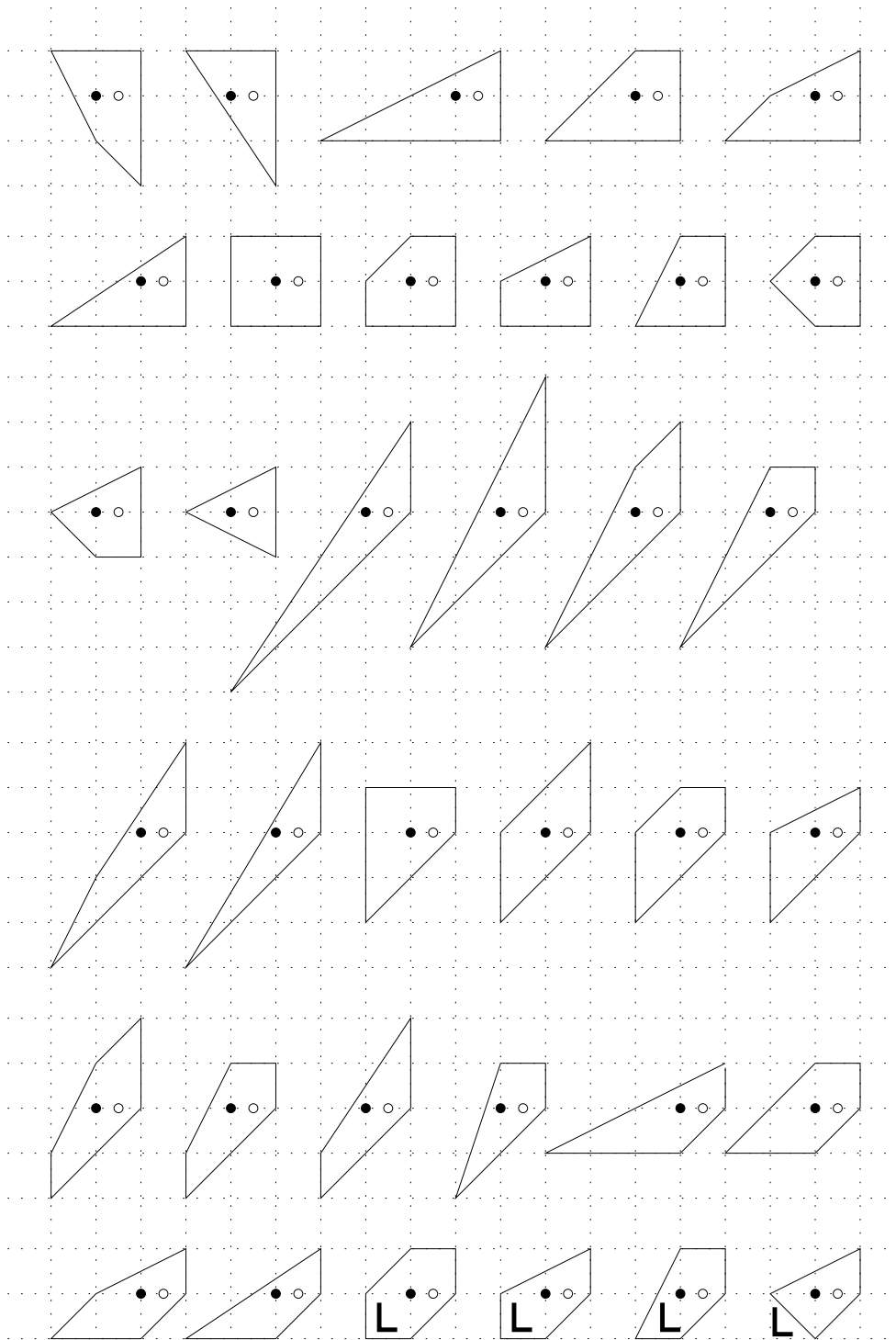
En fait, si  $y \geq 4$  il n'y a pas de polytope  $G/H$ -réflexif  $Q$  contenant le segment  $[(1, 1), (1, -y)]$ . En effet, supposons le contraire. Soit  $y$  un entier maximal tel que  $(1, -y)$  soit dans  $Q$ . Alors le point qui suit est de la forme  $(z, -1 - zy)$  avec  $z \leq 0$ . Si  $z \leq -1$  on obtient une contradiction car le point  $(0, 1)$  serait dans l'intérieur de  $Q$ . Si  $z = 0$  (cas illustré dans la figure suivante), alors le point suivant est de la forme  $(-1, w)$  avec  $w \geq 2$ . On obtient alors la même contradiction que précédemment. Ce raisonnement est résumé dans la figure suivante.

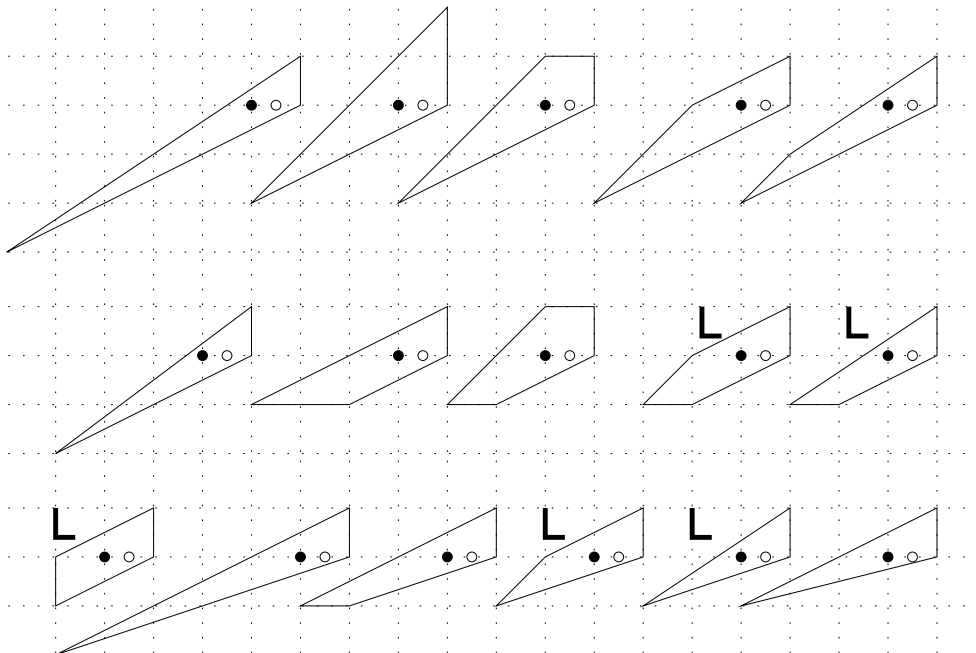


Lorsqu'on arrive à une impasse, on revient à la construction du point précédent et on choisit le nouveau point de façon à ce que l'angle formé par les demi-droites  $[0, q)$  et  $[0, p)$  soit le second plus petit, le troisième plus petit, ... Dans notre exemple, on revient au point  $(1, -3)$  et les nouveaux points construits sont alors les points  $(0, 1)$  et  $(-1, 1)$  : on a construit le premier polytope de la liste.

Voici les polygones  $G/H$ -réflexifs obtenus ainsi.







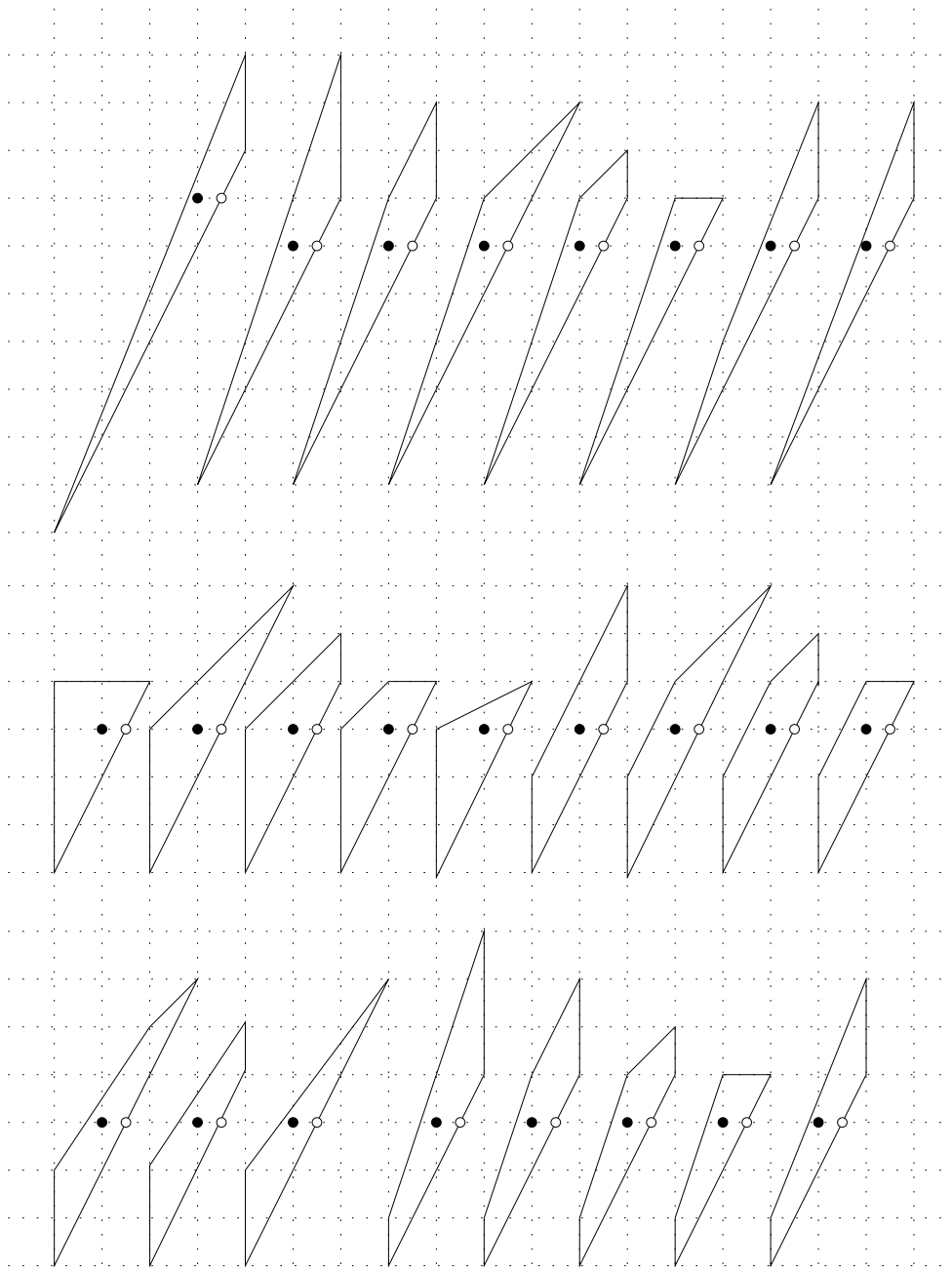
- $[(1, 1), (\frac{1}{2}, 0)]$  est un segment de  $Q$ .

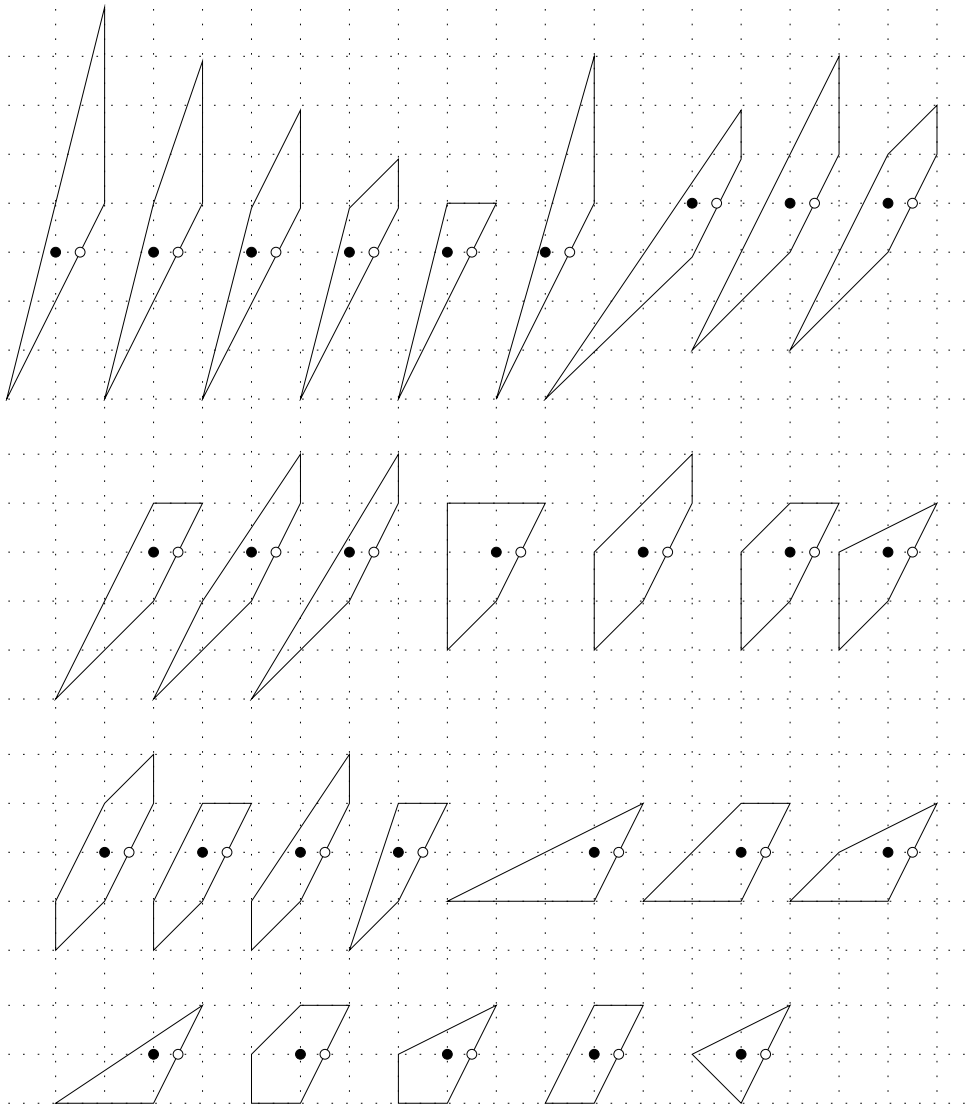
On peut, là aussi, distinguer deux cas, selon que le point  $(\frac{1}{2}, 0)$  est un sommet de  $Q$  ou non. Dans les deux cas on va d'abord faire quelques remarques afin d'éviter de calculer trop de polygones.

Si  $(\frac{1}{2}, 0)$  n'est pas un sommet de  $Q$ , il est à l'intérieur d'une arête  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  telle que  $y_1 > 0$  et  $y_2 < 0$ . Alors quitte remplacer  $Q$  par  $Q'$ , on peut supposer que le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  dans le segment  $[(x_1, y_1), (\frac{1}{2}, 0)]$  est inférieur à celui dans le segment  $[(\frac{1}{2}, 0), (x_2, y_2)]$ . Ainsi, il suffit de construire les polygones  $Q$  vérifiant cette dernière condition. Et de plus, si le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  sur ces deux segments est différent, il n'est alors pas nécessaire de regarder si  $Q'$  a déjà été trouvé.

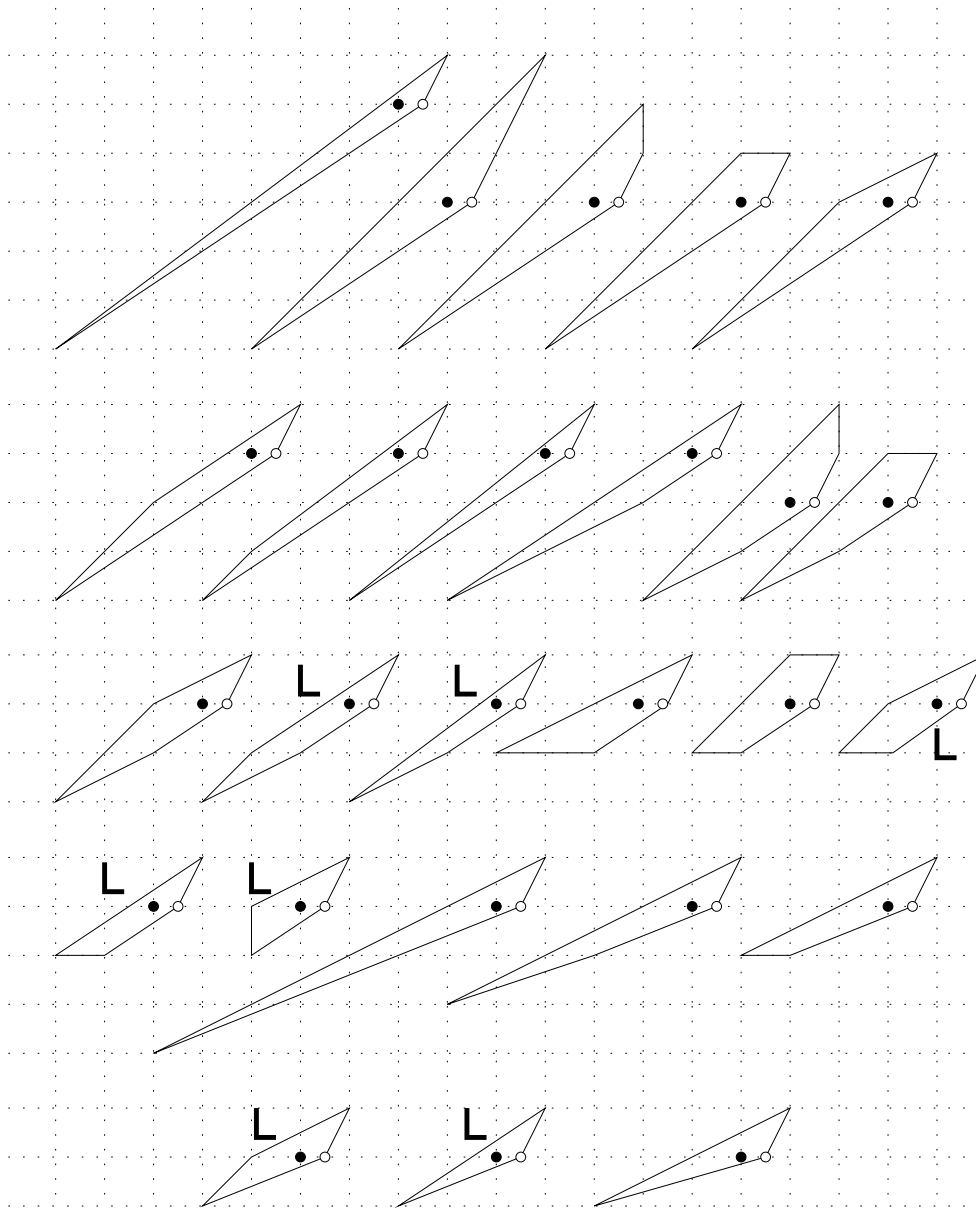
Dans le cas  $(\frac{1}{2}, 0)$  est un sommet de  $Q$ , on peut faire la même remarque en considérant le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  dans les deux segments adjacents à  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

On obtient lorsque  $(\frac{1}{2}, 0)$  n'est pas un sommet de  $Q$  :





Et le cas où  $(\frac{1}{2}, 0)$  est un sommet de  $Q$  donne la liste suivante :



### 6.3 $(SL_2 \times SL_2)/U$ ou $SL_3/U$

D'après la définition d'automorphisme de  $(N, \mathcal{D})$  donnée dans le chapitre 3, il n'y a pas d'automorphisme non trivial. Cependant, dans cette partie, on considérera aussi l'automorphisme de  $N$  qui échange les images des deux



couleurs, c'est-à-dire  $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

En effet, l'automorphisme de  $SL_2 \times SL_2$  qui à  $(g_1, g_2)$  associe  $(g_2, g_1)$  définit un isomorphisme de variétés entre les plongements d'éventails  $\mathbb{F}$  et  $s(\mathbb{F})$ . On a un résultat similaire pour  $SL_3/U$ .

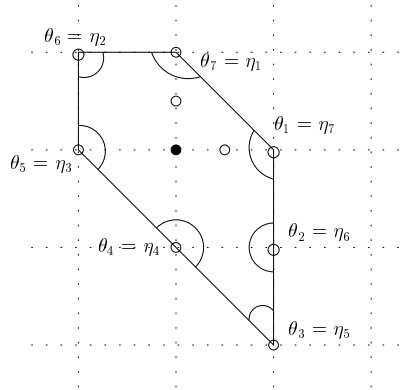
- Cas où  $(\frac{1}{2}, 0)$  et  $(0, \frac{1}{2})$  ne sont pas sur le bord de  $Q$ .

D'après la proposition 6.4,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  sont dans  $Q$ .

Plusieurs cas se présentent alors : soit  $[(1, 0), (0, 1)]$  est un segment de  $Q$ , soit  $[(1, 0), (1, y)]$  et  $[(1, y), (0, 1)]$  sont des segments de  $Q$  pour  $y \geq 1$ , soit  $[(1, 0), (x, 1)]$  et  $[(x, 1), (0, 1)]$  sont des segments de  $Q$  pour  $x \geq 1$ . Les deux derniers cas sont les mêmes à automorphisme près, on considérera donc seulement les deux premiers cas.

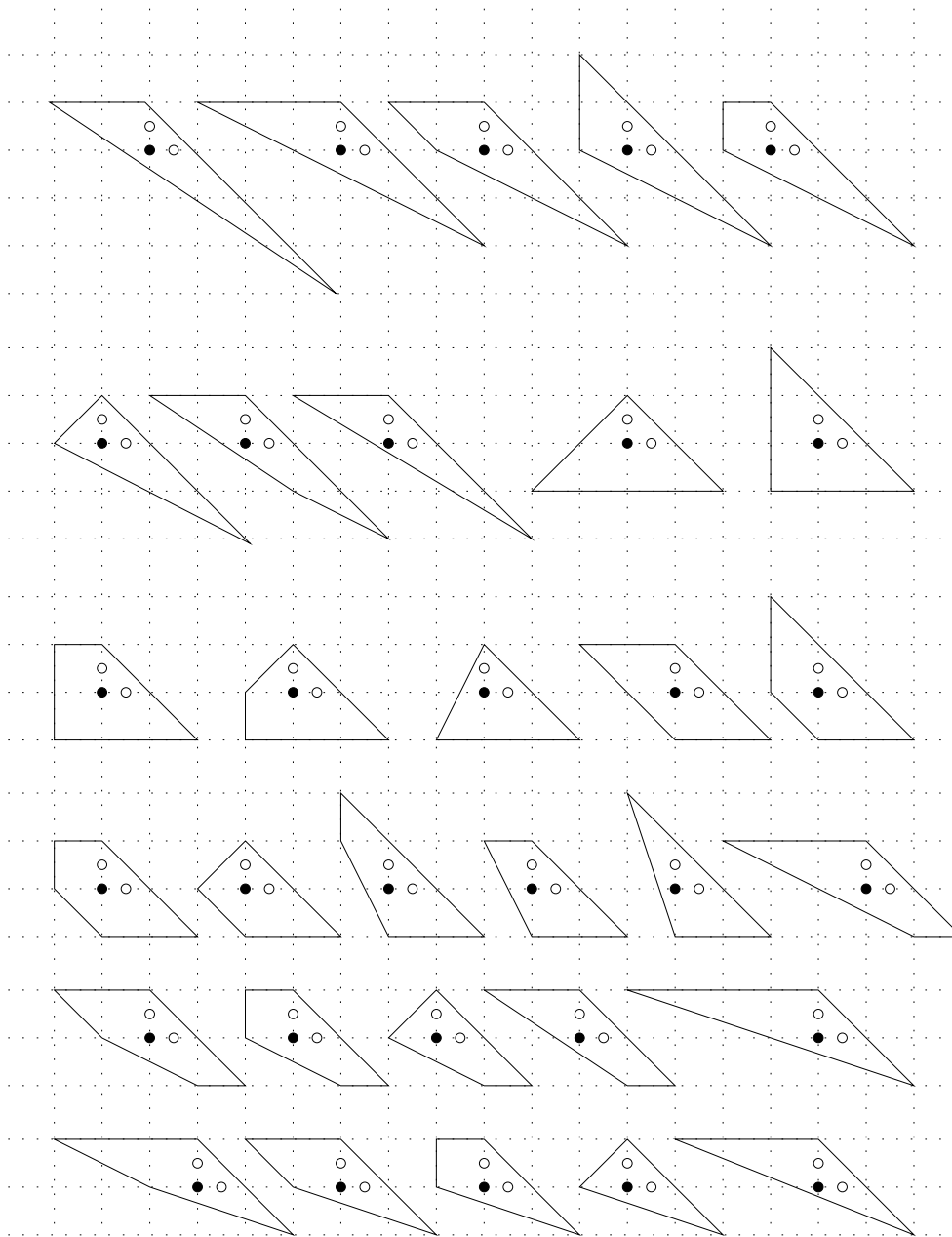
★  $[(1, 0), (0, 1)]$  est un segment de  $Q$ .

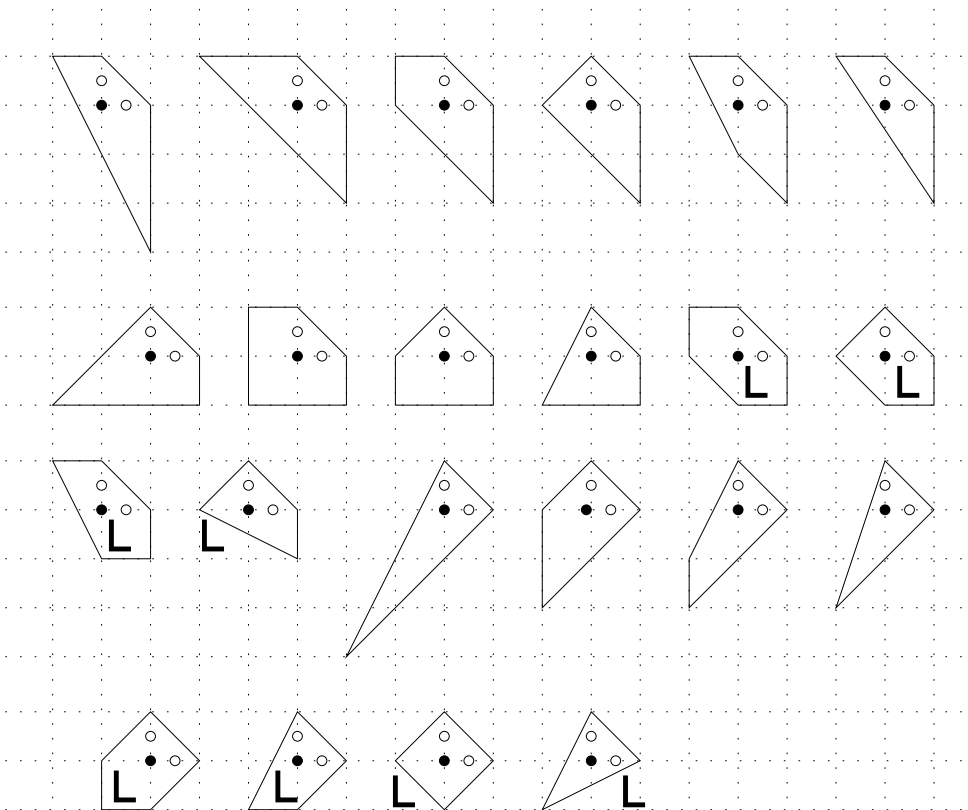
Parcourons le bord de  $Q$  en partant de  $(0, 1)$  (respectivement  $(1, 0)$ ) dans le sens trigonométrique (respectivement inverse), et notons  $\eta_1, \dots, \eta_k$  (respectivement  $\theta_1, \dots, \theta_k$ ) la valeur (entre 0 et  $\pi$ ) des angles en chaque point de  $\mathbb{Z}^2$  sur le bord de  $Q$ , comme le montre la figure suivante.



Pour obtenir les polygones à automorphisme près, il suffit de représenter uniquement les polygones tels que  $(\eta_1, \dots, \eta_k)$  soit inférieur ou égal à  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$  pour l'ordre lexicographique. En effet si on applique l'unique automorphisme de  $N$  qui échange  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , alors on échange aussi les angles  $\eta_1, \dots, \eta_k$  et  $\theta_1, \dots, \theta_k$ . Dans l'exemple ci-dessus on a  $\eta_1 = \theta_1$  et  $\eta_2 < \theta_2$ , donc le polygone ci-dessus sera représenté dans la liste des polygones  $G/H$ -réflexifs qui suit.

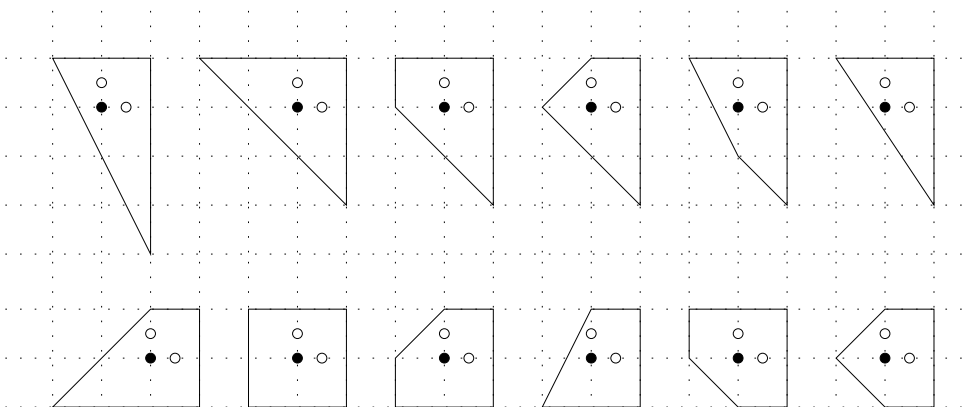
On obtient alors les polygones suivants.

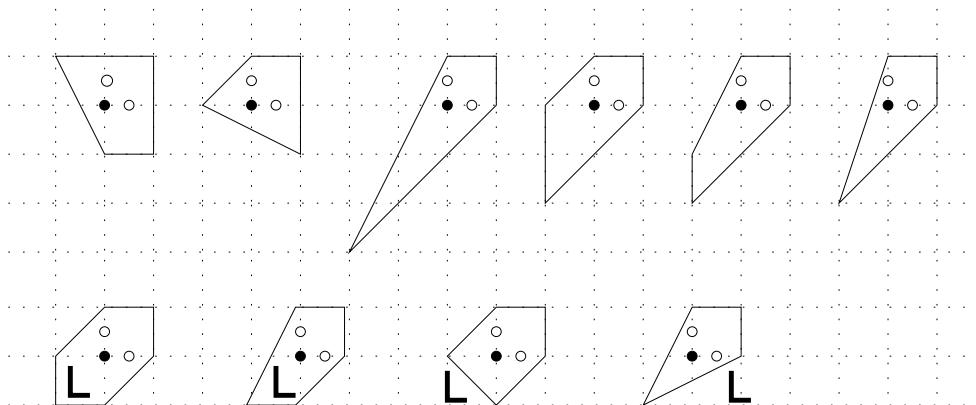




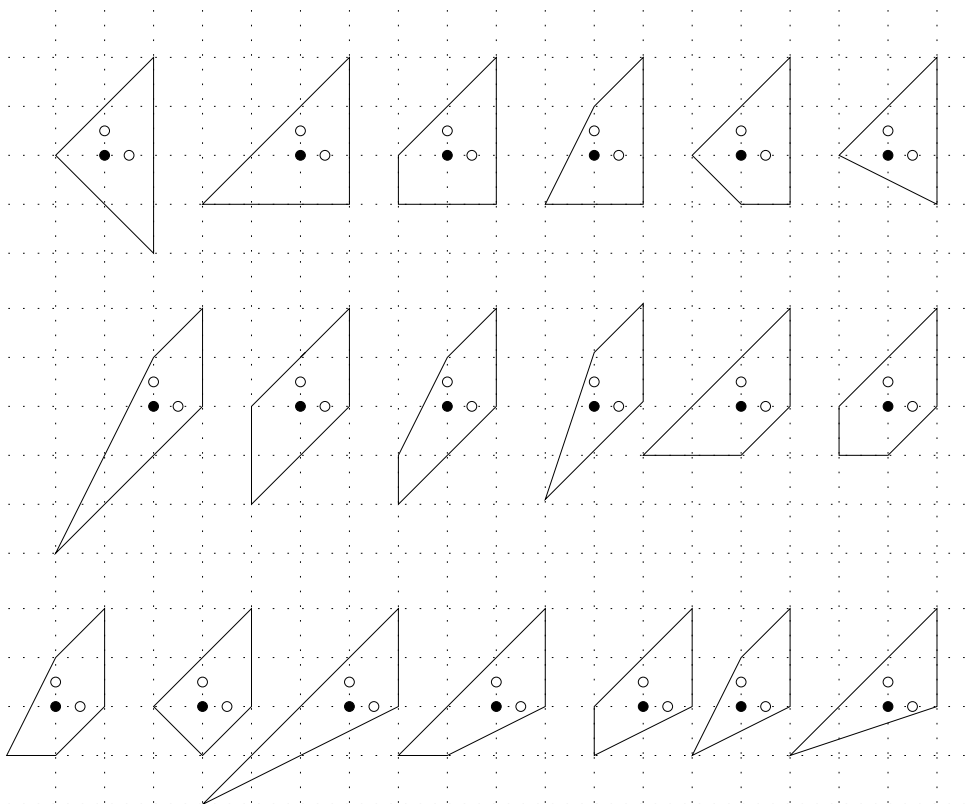
★  $[(1,0), (1,1)]$  et  $[(1,1), (0,1)]$  sont des segments de  $Q$ .

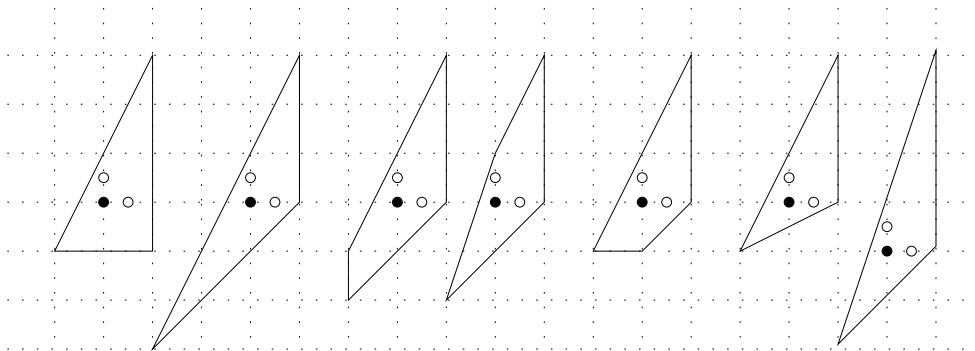
Pour construire les polygones à automorphisme près, on utilise comme précédemment les angles  $\eta_1, \dots, \eta_k$  et  $\theta_1, \dots, \theta_k$ .





★  $[(1, 0), (1, y)]$  et  $[(1, y), (0, 1)]$  sont des segments de  $Q$ , avec  $y \geq 2$ .





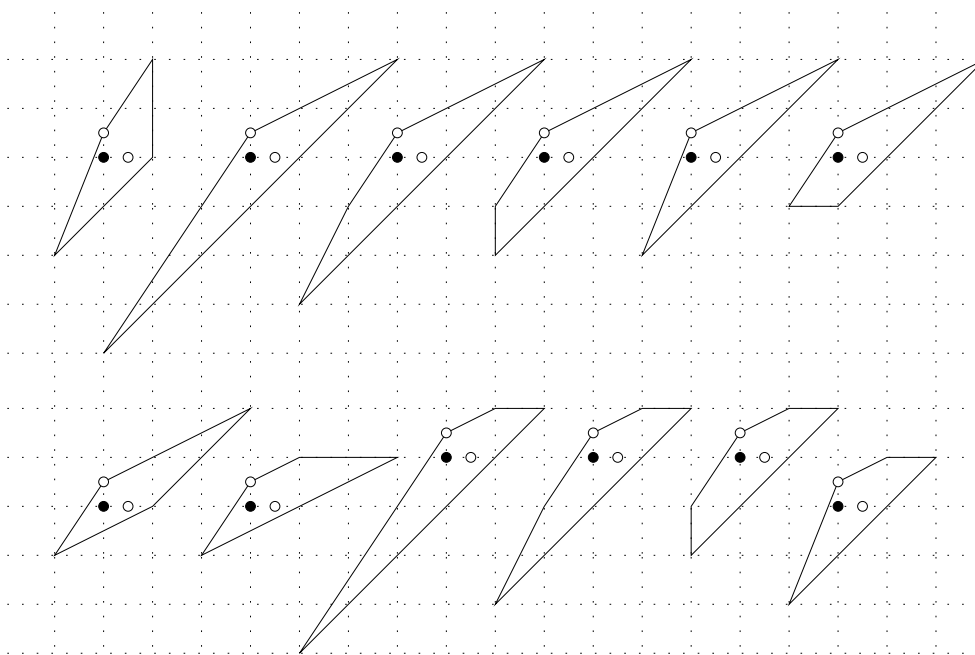
- Cas où l'un des deux points  $(\frac{1}{2}, 0)$  et  $(0, \frac{1}{2})$  est sur le bord de  $Q$ .

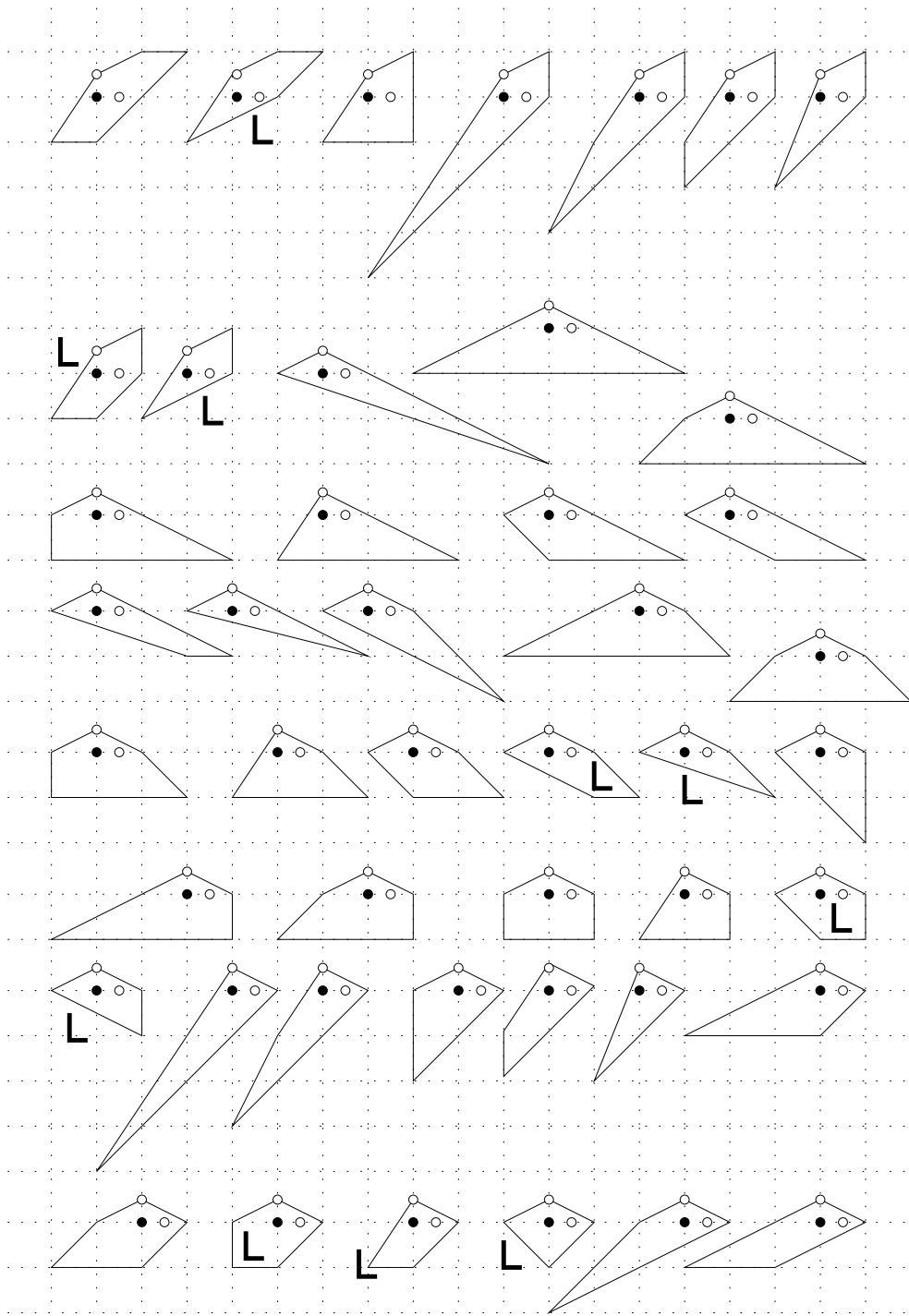
Cela revient, à automorphisme près, à considérer, par exemple, uniquement les polygones contenant  $(0, \frac{1}{2})$  sur leur bord mais pas  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

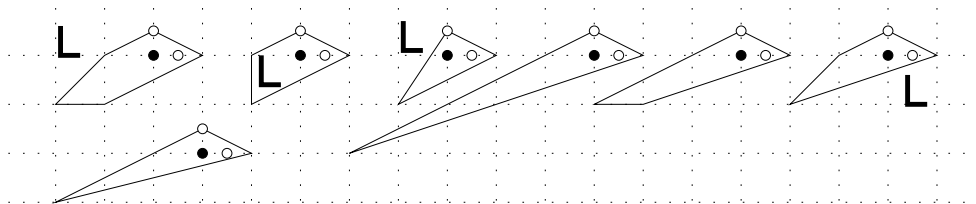
Dans ce cas, le point  $(1, 0)$  doit être dans  $Q$ .

★  $(0, \frac{1}{2})$  est un sommet de  $Q$ .

Si  $[(0, \frac{1}{2}), (1, y)]$  est un segment de  $Q$ , alors  $y \geq 0$  et il existe  $y' \leq -y$  tel que  $[(0, \frac{1}{2}), (-1, y')]$  soit un segment de  $Q$ . On voit alors en particulier que  $y \leq 2$ .

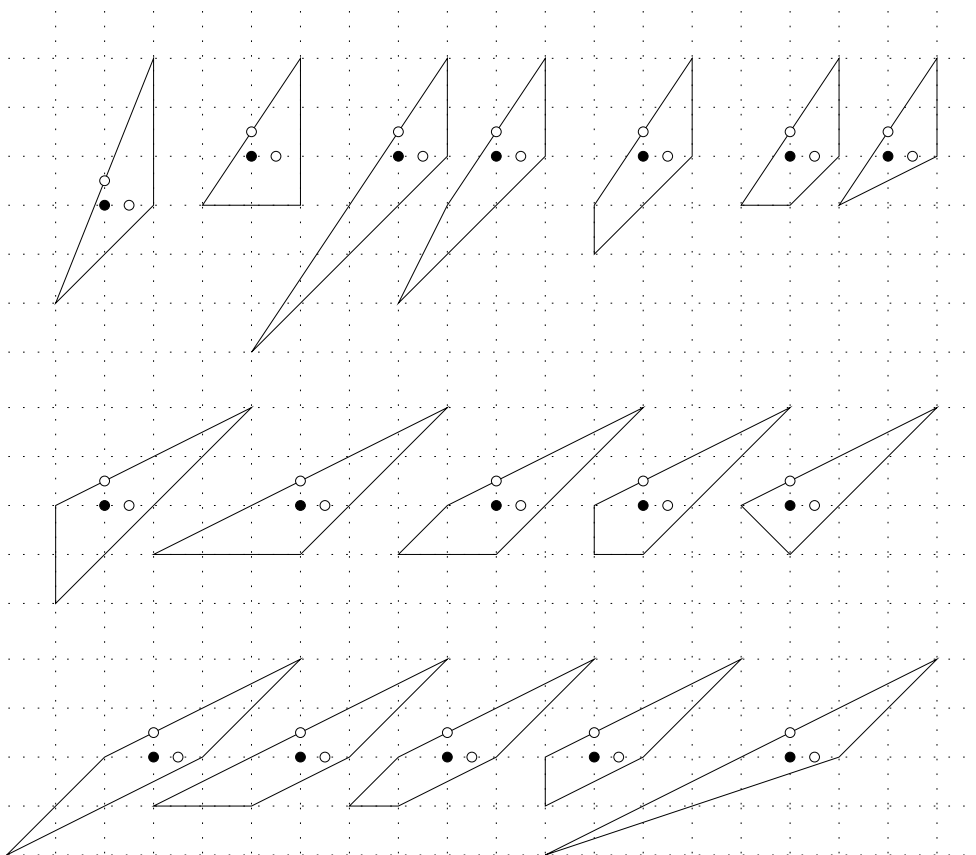


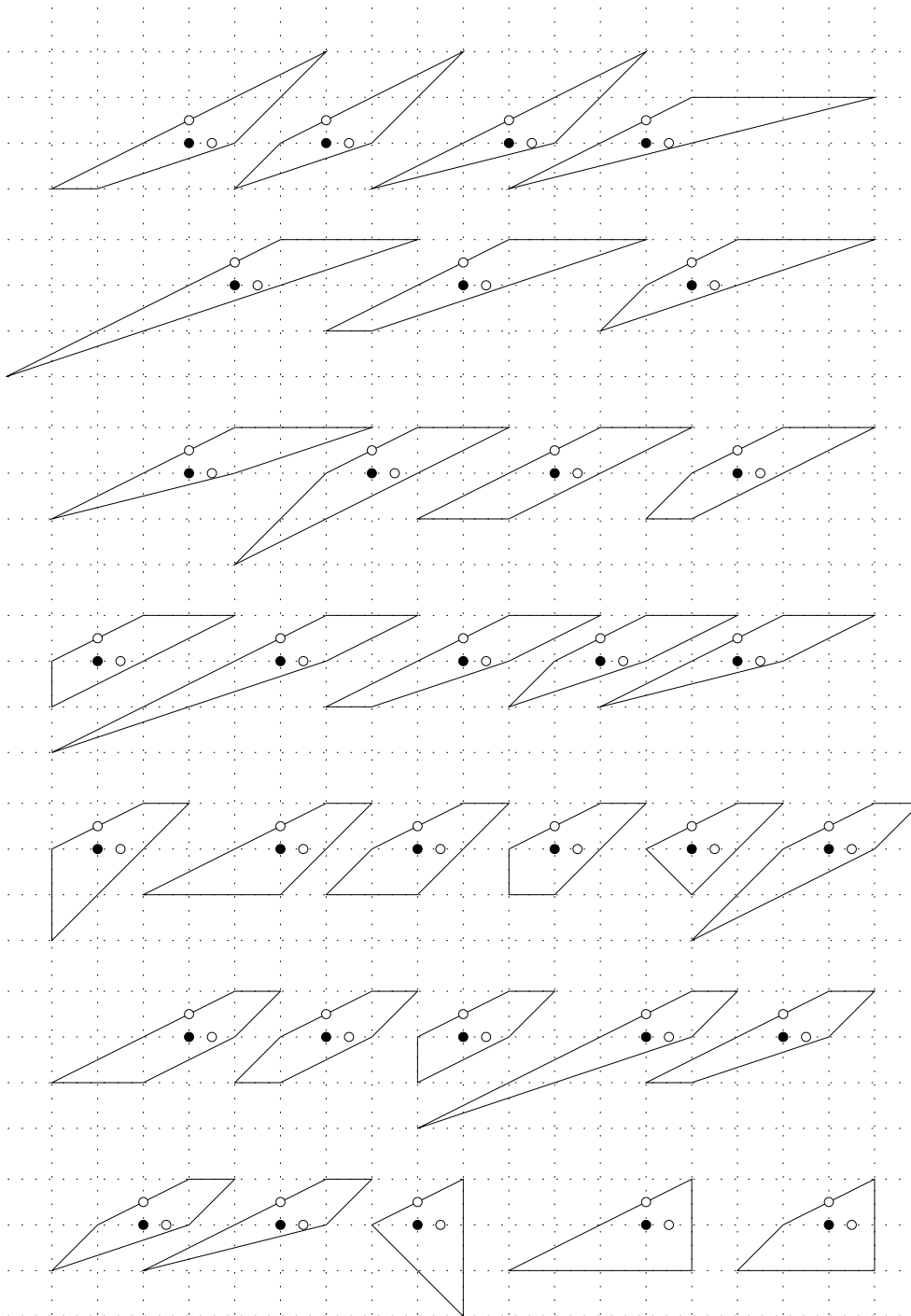




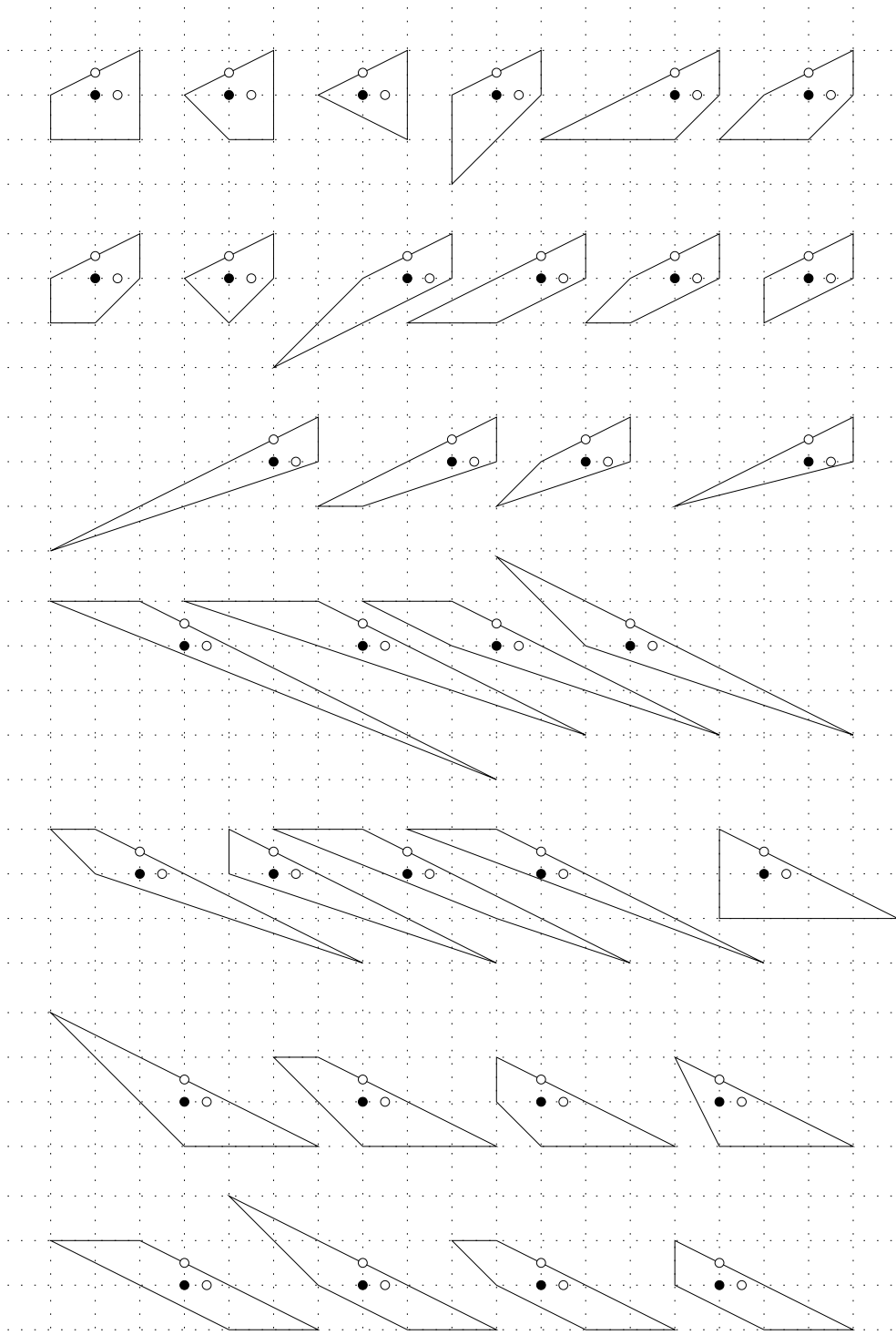
★  $(0, \frac{1}{2})$  est sur un segment de  $Q$ .

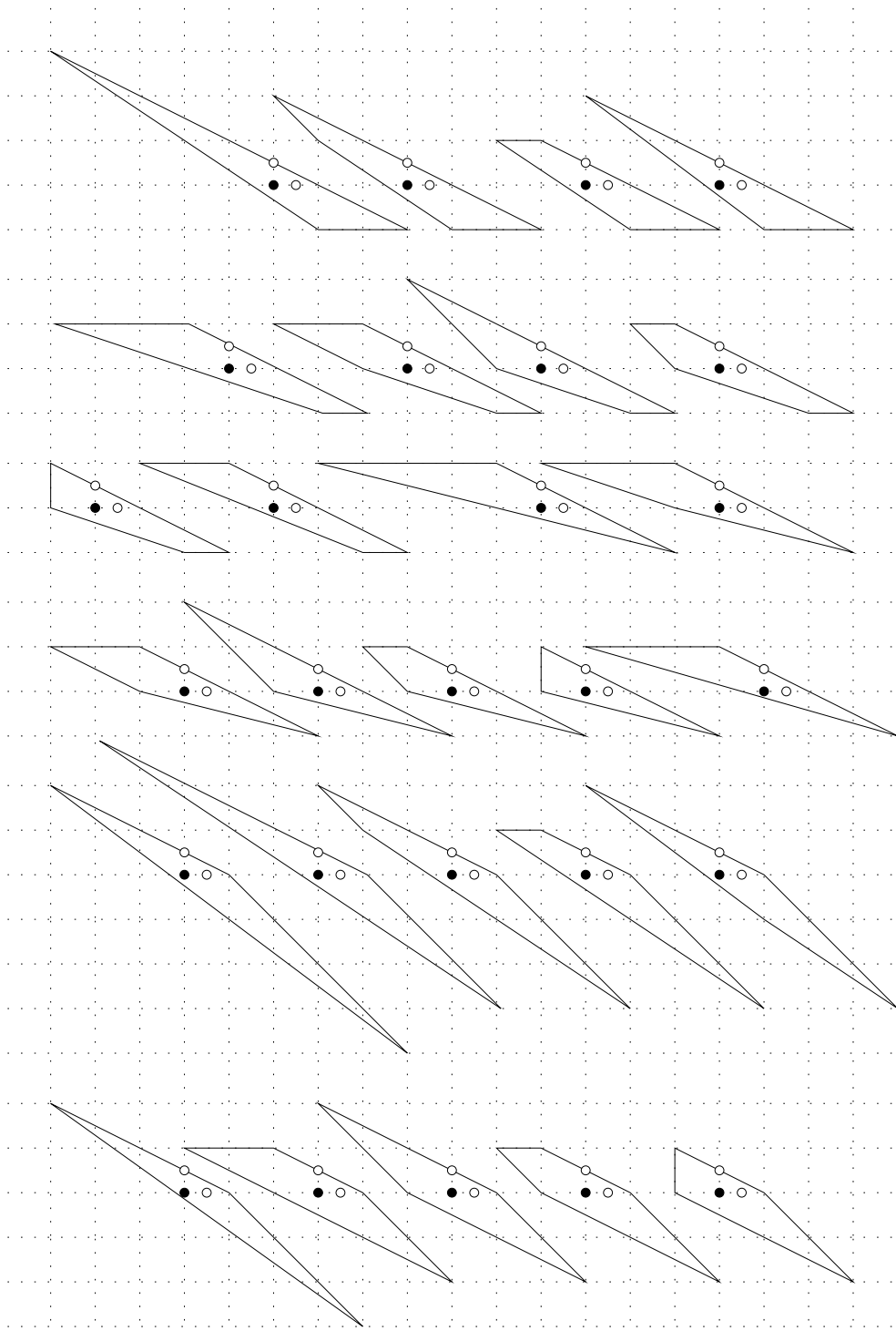
Notons  $[(-1, -y + 1), (1, y)]$  un segment contenant  $(0, \frac{1}{2})$ . Le point  $(1, 0)$  étant dans  $Q$ , on en déduit que  $-y + 1 \geq -2$  (dans le cas contraire,  $Q$  contiendrait le point  $(0, -1)$  dans son intérieur), c'est-à-dire,  $y \leq 3$ . De plus,  $(\frac{1}{2}, 0) \in Q$ , donc  $y \geq 0$ .

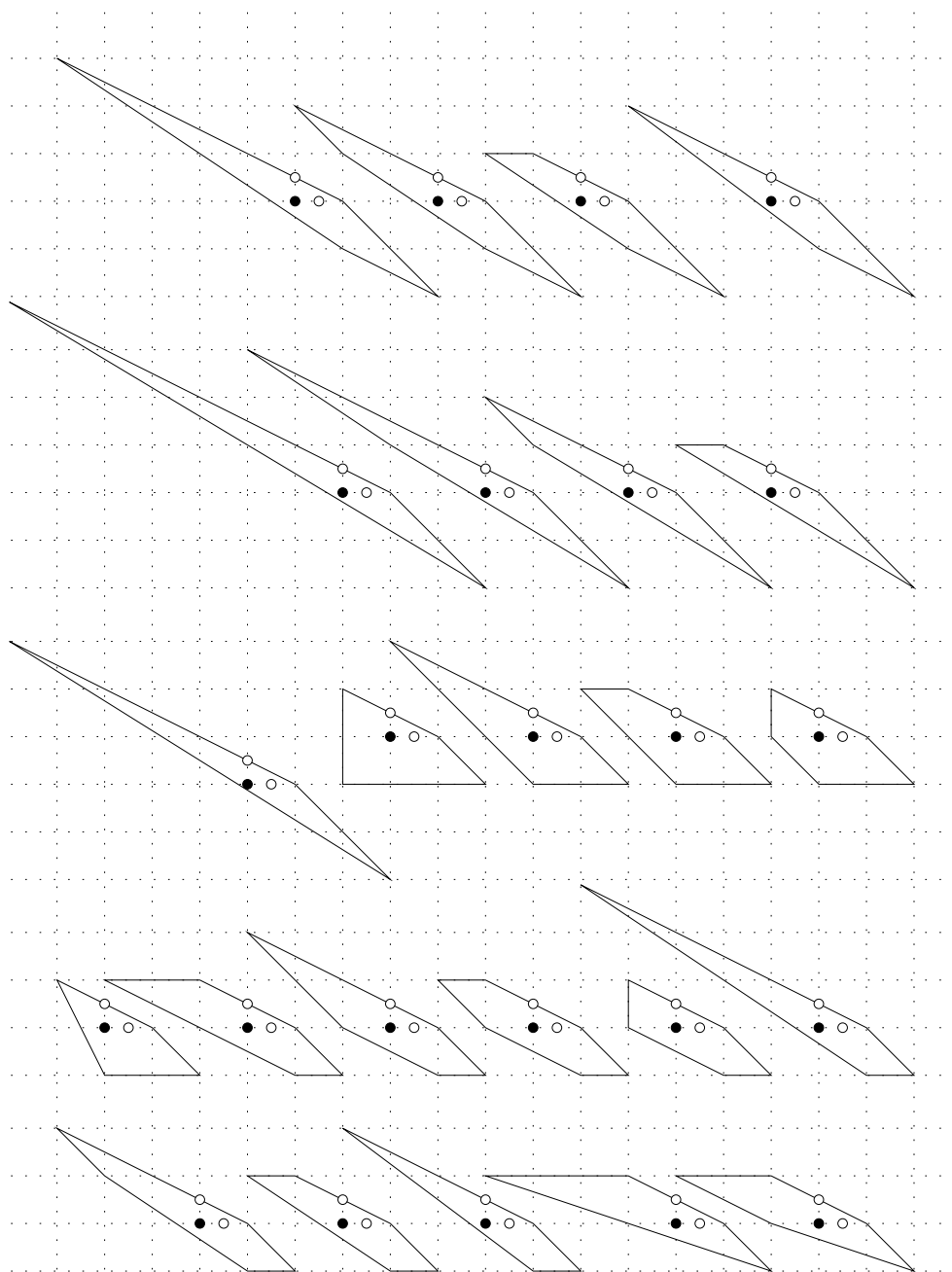


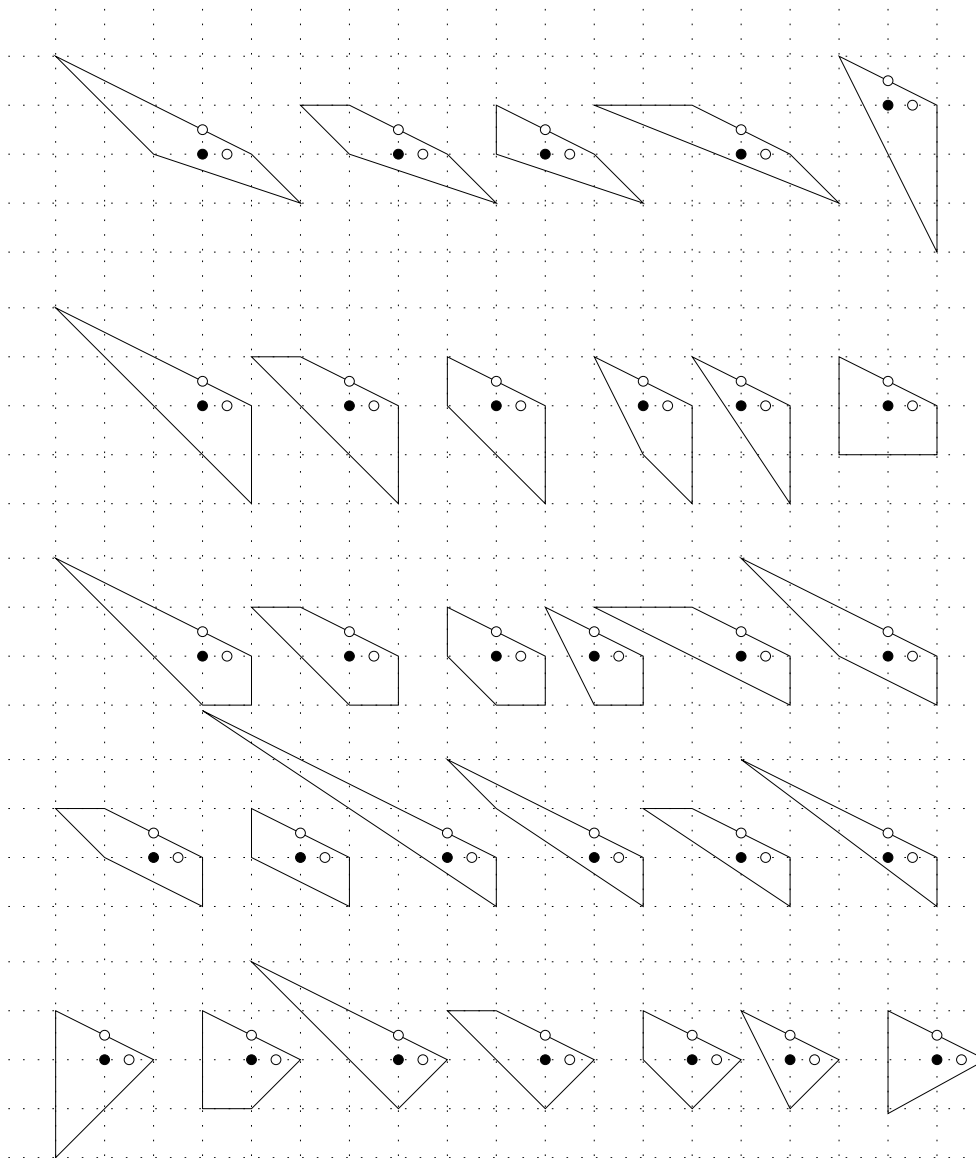












- Cas où les deux points  $(\frac{1}{2}, 0)$  et  $(0, \frac{1}{2})$  sont sur le bord de  $Q$ .

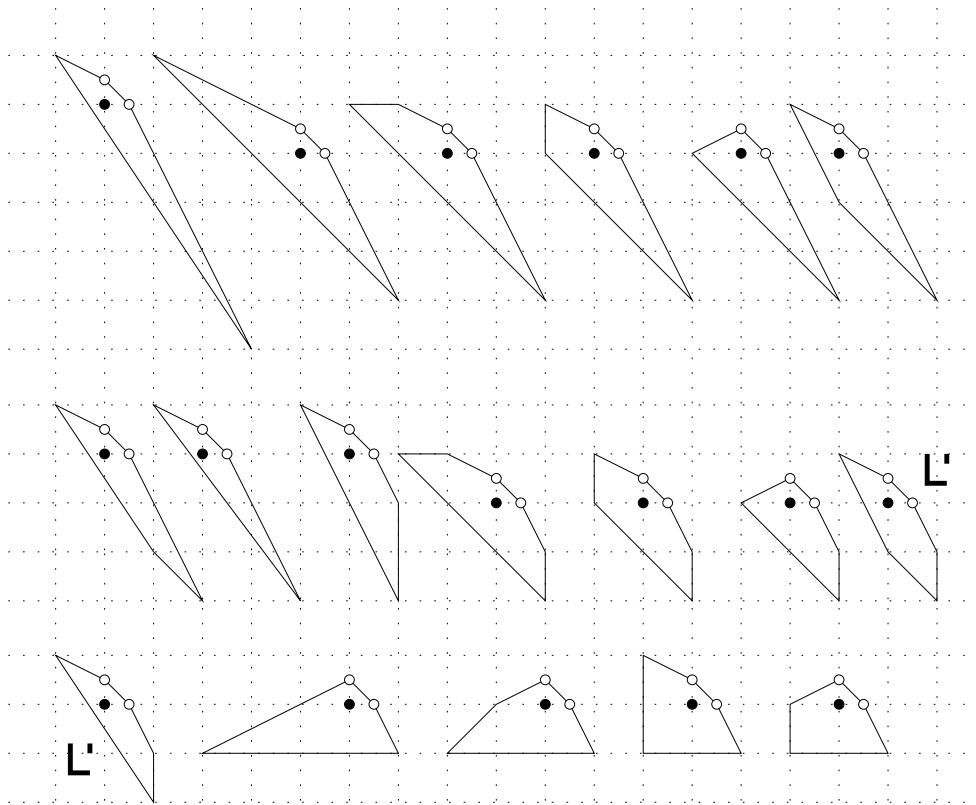
A l'aide de la proposition 6.2 on montre que soit  $[(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})]$  est un segment de  $Q$ , soit  $(1, 1) \in Q$ . En effet, si aucun des deux cas précédents ne se produit, alors il existe  $x \geq 2$  et  $y \geq 2$  tels que  $(1, y)$  et  $(x, 1)$  soient dans  $Q$ . Et on obtient une contradiction car  $(1, 1)$  serait dans l'intérieur de  $Q$ . De plus, on peut voir que, lorsque  $(1, 1) \in Q$ ,  $[(0, \frac{1}{2}), (1, 1)]$  ou  $[(1, 1), (\frac{1}{2}, 0)]$  est

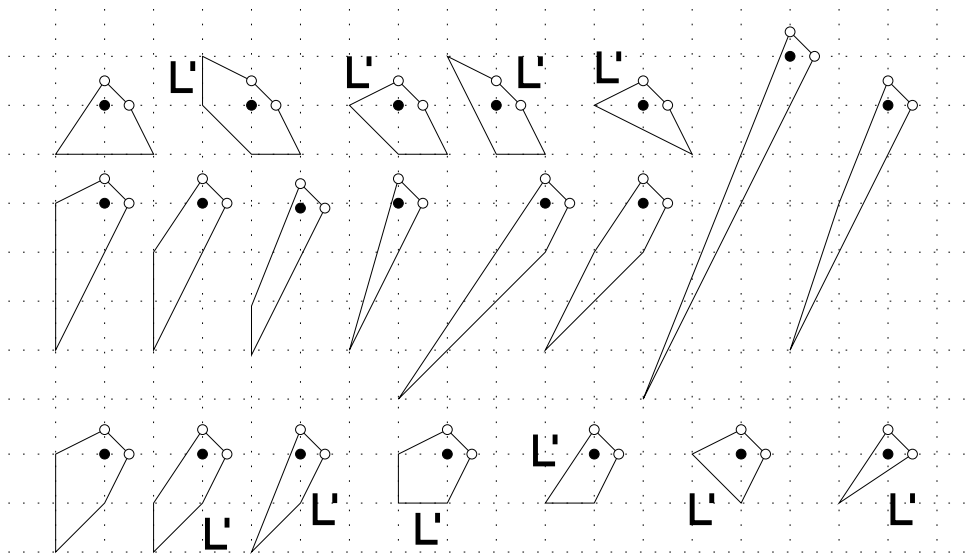
un segment de  $Q$ .

★ Cas où  $[(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})]$  est un segment de  $Q$ .

Pour construire les polygones à automorphisme près, on utilise comme précédemment les angles  $\eta_1, \dots, \eta_k$  et  $\theta_1, \dots, \theta_k$ , définis ici en parcourant le bord de  $Q$  à partir des points  $(0, \frac{1}{2})$  et  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

On remarque ensuite que  $Q$  a des segments de la forme  $[(\frac{1}{2}, 0), (1, y)]$  avec  $y \leq 1$  et  $[(x, 1), (0, \frac{1}{2})]$  avec  $x \leq 1$ .

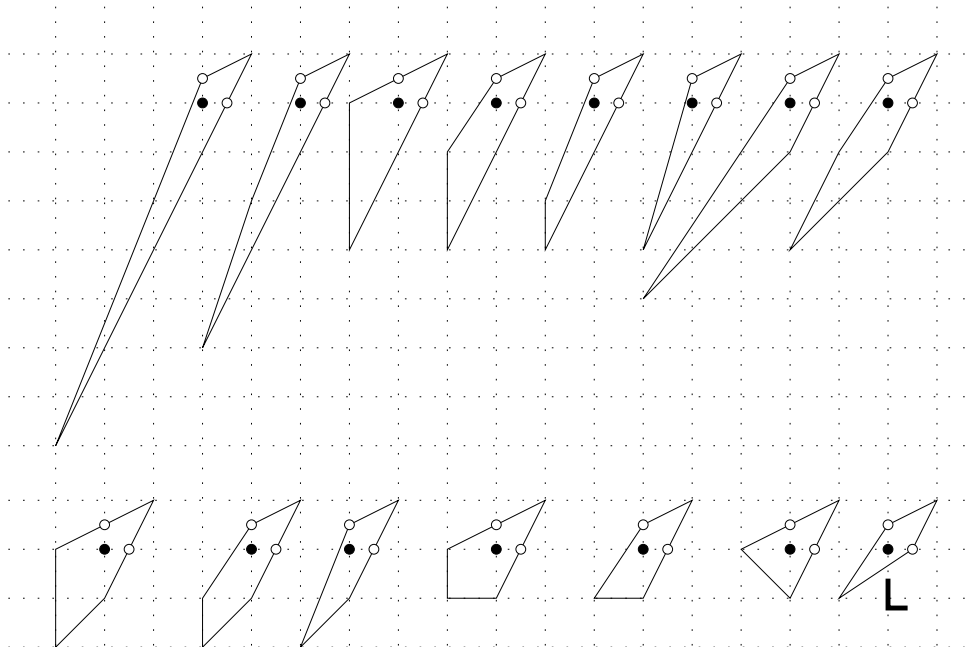




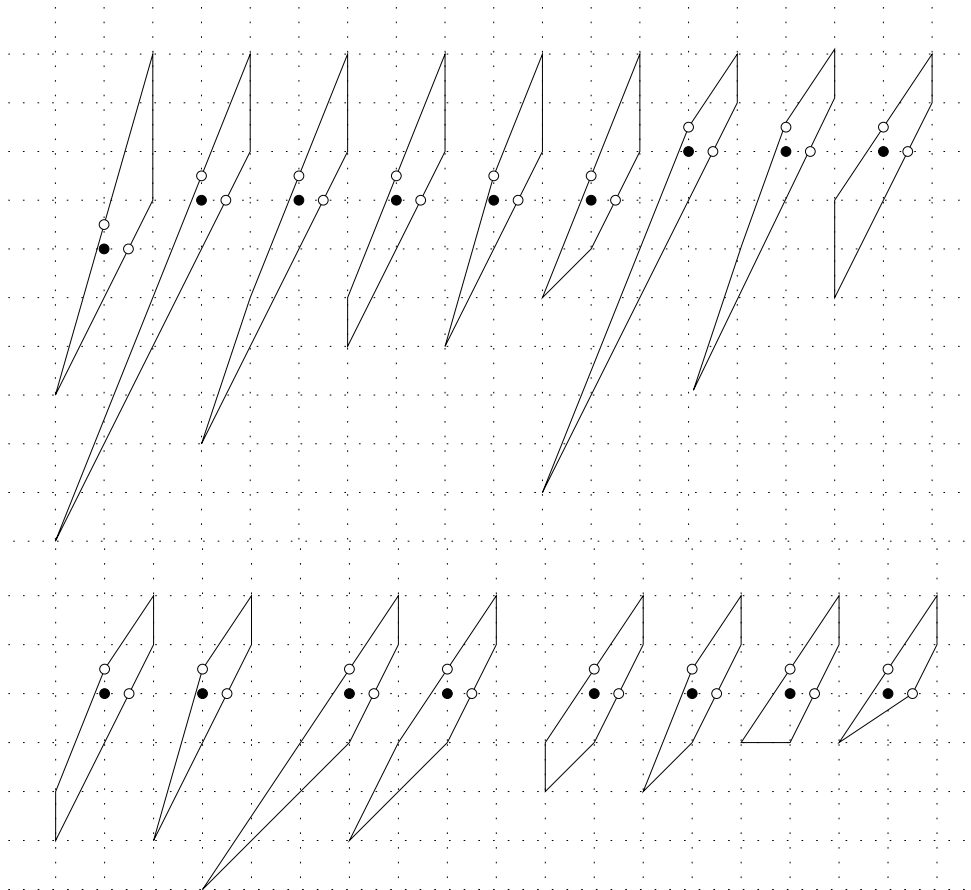
★ Cas où  $[(0, \frac{1}{2}), (1, 1)]$  et  $[(1, 1), (\frac{1}{2}, 0)]$  sont des segments de  $Q$ .

Pour construire les polygones à automorphisme près, on utilise encore les angles  $\eta_1, \dots, \eta_k$  et  $\theta_1, \dots, \theta_k$ .

On remarque ensuite que  $Q$  a des segments de la forme  $[(\frac{1}{2}, 0), (1, y)]$  avec  $y \leq 0$  et  $[(x, 1), (0, \frac{1}{2})]$  avec  $x \leq 0$ .



★ Cas où  $[(0, \frac{1}{2}), (1, 1)]$  ou bien  $[(1, 1), (\frac{1}{2}, 0)]$  est un segment de  $Q$ .  
 Pour construire les polygones à automorphisme près, il suffit d'étudier le cas (par exemple) où seul  $[(1, 1), (\frac{1}{2}, 0)]$  est un segment de  $Q$ .



# Chapitre 7

## Quelques exemples de variétés horosphériques de Fano

Dans le chapitre précédent, on a déterminé les polygones  $G/H$ -réflexifs pour trois espaces homogènes horosphériques de rang 2.

Lorsque  $G/H = (SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$  (respectivement  $(SL_2 \times SL_2)/U$ ), on va montrer que les plongements projectifs de  $G/H$  sont en fait des variétés toriques (de dimension 3 et respectivement 4). On donnera la liste des 16 plongements lisses de Fano de  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ , et on comparera cette liste avec celle des 18 variétés toriques lisses et de Fano donnée par V. Batyrev [Ba81] et K. et M. Watanabe [WW82]. On peut aussi trouver cette liste dans [Od88, fin du chapitre 2.3].

Lorsque  $G/H = SL_3/U$ , on expliquera comment déterminer les plongements lisses de Fano de  $G/H$  et on donnera quelques exemples.

### 7.1 Plongements de $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$

Dans toute cette partie,  $G = SL_2 \times \mathbb{C}^*$  et  $H = U$ . On va décrire les plongements lisses de Fano de  $G/H$ .

Soit  $D$  un diviseur de Cartier et ample sur un tel plongement  $X$ . Rappelons qu'en rang 2 (ou si  $X$  est lisse), tout diviseur de Cartier ample est très ample (théorème 0.3). Il définit donc une immersion

$$\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}(\oplus_{\chi \in Q_D^*} V(\chi)) =: \mathbb{P}_D$$

où  $Q_D^*$  est le polytope moment (ou ici, polygone moment) associé à  $D$  (voir le chapitre 5 pour plus de détails). Et de plus l'image par  $\phi_D$  du point  $H/H$



de  $G/H$  est fixée par  $U$ , donc

$$\phi_D(G/H) = G.[\sum_{\chi \in Q_D^*} v_\chi]$$

où pour tout  $\chi$ ,  $v_\chi$  est un vecteur de plus haut poids du  $G$ -module simple  $V(\chi)$ .

Dans le cas qui nous intéresse ici, le groupe des caractères  $\Lambda$  est engendré par le caractère fondamental  $\omega_\alpha$  de  $SL_2$ , et par le caractère identité  $\chi_0$  de  $\mathbb{C}^*$ . Ainsi  $(\omega_\alpha, \chi_0)$  est une base du réseau  $M \simeq \mathbb{Z}^2$ . On notera alors  $(n, m)$  le point  $n\omega_\alpha + m\chi_0$  de  $M$ .

De plus, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $n \geq 0$ , le  $G$ -module  $V(n\omega_\alpha + m\chi_0)$  est l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[x, y]_n$  des polynômes homogènes à deux variables de degré  $n$ , muni de l'action de  $G$  suivante :

$$\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2, \forall z \in \mathbb{C}^*, \forall P \in \mathbb{C}[x, y]_n,$$

$$(g, z).P(x, y) = z^m P(g^{-1}(x, y)) = z^m P(dx - by, -cx + ay).$$

Un vecteur de plus haut poids de  $V(n\omega_\alpha + m\chi_0)$  est alors  $x^n$ .

Avant de donner la liste des plongements lisses de Fano de  $G/H$ , on montre le résultat suivant.

**Proposition 7.1.** *Tout plongement projectif de  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$  est torique.*

*Démonstration.* Soient  $X$  un plongement projectif de  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$  et  $D$  un diviseur de Cartier (très) ample.

Rappelons que  $Q_D^*$  est un polygone d'intérieur non vide et à sommets dans  $\mathbb{Z}^2$ . Ainsi il existe un triangle à sommets dans  $\mathbb{Z}^2$  inclus dans  $Q_D^*$ . On peut supposer que ce triangle est minimal. Ainsi ses sommets  $(n_i, m_i)$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , sont tels que  $((n_1 - n_0, m_1 - m_0), (n_2 - n_0, m_2 - m_0))$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$ .

On peut munir  $V(n\omega_\alpha + m\chi_0)$  d'une action de  $(\mathbb{C}^*)^3$  définie par

$$\forall (z_0, z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^3, \forall P \in \mathbb{C}[x, y]_n, (z_0, z_1, z_2).P(x, y) = z_0^m P(z_1 x, z_2 y).$$

Il faut cependant remarquer que cette action n'est pas fidèle.

Montrons alors que l'action de  $(\mathbb{C}^*)^3$  sur  $\mathbb{P}_D$  est fidèle. Pour cela il suffit de montrer que l'action sur  $\mathbb{P}(\oplus_{i=0}^2 V(n_i\omega_\alpha + m_i\chi_0))$  est fidèle. Soit  $(z_0, z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^3$  agissant trivialement sur  $\mathbb{P}(\oplus_{i=0}^2 V(n_i\omega_\alpha + m_i\chi_0))$ . Puisque l'un des  $n_i$  est non nul, on a forcément  $z_1 = z_2$ . On a alors  $z_0^{m_0} z_1^{n_0} = z_0^{m_1} z_1^{n_1} = z_0^{m_2} z_1^{n_2}$ , ou

de même  $z_0^{m_1-m_0} z_1^{n_1-n_0} = 1$  et  $z_0^{m_2-m_0} z_1^{n_2-n_0} = 1$  ce qui équivaut à  $z_0 = z_1 = 1$  car  $((n_1 - n_0, m_1 - m_0), (n_2 - n_0, m_2 - m_0))$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$ .

De plus,  $\phi_D(G/H)$  contient l'élément  $[\sum_{\chi \in Q_D^*} w_\chi]$  où

$$w_{n\omega_\alpha + m\chi_0} = (x + y)^n = (g, 1) \cdot v_{n\omega_\alpha + m\chi_0}$$

avec  $g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On peut alors montrer comme précédemment que le seul élément de  $(\mathbb{C}^*)^3$  agissant trivialement sur  $[\sum_{\chi \in Q_D^*} w_\chi]$  est  $(1, 1, 1)$ .

Ainsi,  $(\mathbb{C}^*)^3 \cdot [\sum_{\chi \in Q_D^*} w_\chi] \simeq (\mathbb{C}^*)^3$ . De plus, c'est un ouvert de  $G \cdot [\sum_{\chi \in Q_D^*} v_\chi] = \phi_D(G/H)$  car  $(z_0, z_1, z_2) \cdot w_{n\omega_\alpha + m\chi_0} = (g, z_0) \cdot v_{n\omega_\alpha + m\chi_0}$  avec  $g = \begin{pmatrix} z_1^{-1} & -z_2 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix}$ .

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que

$$X = \overline{\phi_D(G/H)} = \overline{(\mathbb{C}^*)^3 \cdot [\sum_{\chi \in Q_D^*} w_\chi]}.$$

□

### Remarques 7.2.

1/ Soient  $X$  un plongement de  $G/H$  et  $Q_D^*$  le polygone moment d'un diviseur de Cartier et ample. Soit  $Q_3^*$  le polytope de  $\mathbb{R}^3$  défini comme l'enveloppe convexe des points  $(n, m, i)$  tels que  $(n, m) \in Q_D^*$  et  $0 \leq i \leq n$  (rappelons que  $\forall (n, m) \in Q_D^*, n \geq 0$ ). Alors  $Q_3^*$  est le polytope associé à la variété torique  $X$  et au diviseur  $D$ . Pour montrer ceci, il suffit de calculer les poids de  $(\mathbb{C}^*)^3$  dans  $\mathbb{P}_D$ . Et quitte à changer l'action de  $(\mathbb{C}^*)^3$  par l'automorphisme de  $(\mathbb{C}^*)^3$  qui à  $(z_0, z_1, z_2)$  associe  $(z_0, z_1 z_2, z_2)$ , on a  $(z_0, z_1, z_2) \cdot x^i y^{n-i} = z_0^m z_1^n z_2^i x^i y^{n-i}$ , pour tous  $(z_0, z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^3$  et  $x^i y^{n-i} \in V(n\omega_\alpha + m\chi_0)$ .

Lorsque  $X$  est de Fano de polygone  $G/H$ -réflexif  $Q$  et  $D = -K_X$ , le polygone  $Q_D^*$  est le translaté de  $Q^*$  par  $(2, 2)$ . Alors le translaté de  $Q_3^*$  par  $(-2, -2, -1)$  contient l'origine de  $\mathbb{R}^3$  dans son intérieur, et c'est un polytope réflexif de dimension 3. En effet son polytope dual  $Q_3$  a pour sommets  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, -1)$ , et les points  $(a, b, 0)$  lorsque  $(a, b)$  décrit l'ensemble des sommets entiers de  $Q$ .

2/ On obtient ainsi seulement certaines variétés toriques de Fano. Par exemple, le cube  $[-1, 1]^3 \in \mathbb{R}^3$  associé à  $(X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, -K_X)$  ne peut pas être construit comme ci-dessus à partir d'un polygone  $G/H$ -réflexif. Autrement dit  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  n'est pas un plongement de  $G/H$  (ce qu'on aurait aussi pu voir directement).

3/ On peut montrer de même que tout plongement projectif de  $(SL_2 \times SL_2)/U$  est torique. En effet, les  $G$ -modules simples sont alors les espaces vectoriels  $V(n\omega_\alpha + m\omega_\beta) = \mathbb{C}[x, y]_n \otimes \mathbb{C}[x, y]_m$  lorsque  $n, m \geq 0$ . L'action de  $SL_2 \times SL_2$  sur  $V(n\omega_\alpha + m\omega_\beta)$  est la suivante :

$$\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2, \forall P \in \mathbb{C}[x, y]_n, \forall P' \in \mathbb{C}[x, y]_m, \\ (g, g').(P(x, y) \otimes P'(x, y)) = P(dx - by, -cx + ay) \otimes P'(d'x - b'y, -c'x + a'y).$$

On peut munir ces  $G$ -modules de l'action de  $(\mathbb{C}^*)^4$  suivante :

$$\forall (z_1, z_2, z_3, z_4) \in (\mathbb{C}^*)^4, \forall P \in \mathbb{C}[x, y]_n, \forall P' \in \mathbb{C}[x, y]_m(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ (P(x, y) \otimes P'(x, y)) = P(z_1x, z_2y) \otimes P'(z_3x, z_4y).$$

Cette action n'est toujours pas fidèle. Cependant l'action de  $(\mathbb{C}^*)^4$  sur l'espace projectif  $\mathbb{P}_D$  associé à un diviseur de Cartier et ample  $D$  est fidèle. La preuve de ce dernier fait est analogue à celle faite dans le cas de  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$ .

Ensuite, on peut voir facilement que  $(\mathbb{C}^*)^4 \cdot [\sum_{(n,m) \in Q_D^*} (x+y)^n \otimes (x+y)^m]$  est un ouvert de  $\phi_D((SL_2 \times SL_2)/U)$  isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^4$ .

4/ On pourrait aussi montrer que tout plongement complet de  $(SL_2 \times SL_2)/U$  et  $(SL_2 \times \mathbb{C}^*)/U$  est torique. C'est inutile ici car en fait, on peut aussi montrer que toute variété complète et horosphérique de rang 2 est projective. Je ne démontrerai pas ce résultat, la preuve étant très similaire à celle pour les variétés toriques de dimension 2 (voir [Od78, prop.8.1]).

On va maintenant expliquer comment déterminer les plongements lisses de Fano de  $G/H$ .

On peut déterminer un plongement lisse de Fano de  $G/H$  à partir de son polygone  $G/H$ -réflexif (ou de son éventail colorié). On choisit pour cela un diviseur de Cartier et ample pas trop grand (c'est-à-dire de façon à ce que son polygone moment  $Q_D^*$  soit petit) puis on regarde l'immersion  $\phi_D : X \rightarrow \mathbb{P}_D$  associée. Cependant cette méthode ne permet de décrire facilement que les plongements de  $G/H$  assez petits, c'est-à-dire tels qu'on puisse trouver  $D$  tel que  $\mathbb{P}_D$  n'est pas de dimension trop grande.

On va plutôt utiliser les morphismes connus entre les différents plongements de  $G/H$ . On peut résumer, dans notre cas, les résultats sur les morphismes entre variétés sphériques [Kn91, ch.5] de la façon suivante.

**Proposition 7.3.** *Soit  $G/H$  un espace homogène horosphérique de rang 2. Soient  $X$  et  $X'$  des plongements complets de  $G/H$ , d'éventails coloriés respectifs  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{F}'$ .*

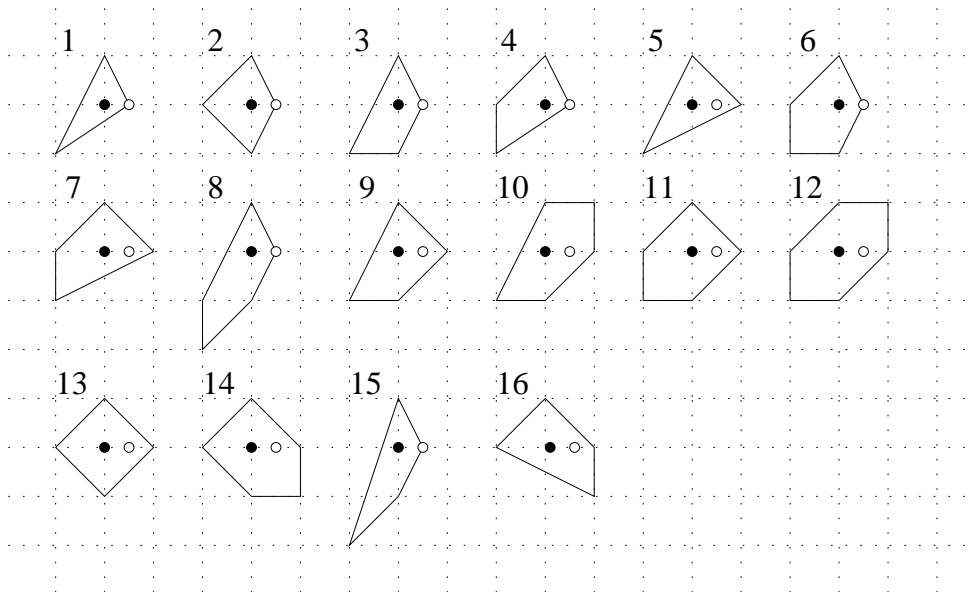
*Alors il existe un morphisme birationnel et  $G$ -équivariant  $X' \rightarrow X$  si et seulement si*

- (1) l'éventail (sans couleur) de  $\mathbb{F}'$  est une subdivision de l'éventail de  $\mathbb{F}$ , et*
- (2) l'ensemble des couleurs de  $\mathbb{F}'$  est inclus dans l'ensemble des couleurs de  $\mathbb{F}$ .*

Soit  $X$  un plongement de Fano de  $G/H$ . On note  $Q$  le polygone  $G/H$ -réflexif associé. Supposons que le polygone  $Q'$ , défini par l'enveloppe convexe de l'ensemble des sommets de  $Q$  sauf un, est  $G/H$ -réflexif. Notons  $X'$  le plongement de Fano de  $G/H$  associé à  $Q'$ . Alors, d'après la proposition 7.3, il existe un morphisme birationnel  $G$ -équivariant  $X \rightarrow X'$ , dont le diviseur exceptionnel est irréductible et  $G$ -stable. On obtient le même résultat si  $(1, 0)$  est un sommet de  $Q$ , et si  $Q'$ , défini par l'enveloppe convexe de  $(\frac{1}{2}, 0)$  et des sommets de  $Q$  sauf  $(1, 0)$ , est  $G/H$ -réflexif.

De plus, si  $X$  et  $X'$  sont lisses, alors  $X$  est l'éclatement d'une sous-variété de  $X'$  irréductible et stable par  $G$  [Br94]. Rappelons que toute sous-variété irréductible et  $G$ -stable, d'un plongement lisse de  $G/H$ , est encore lisse (cf proposition 2.17). Ainsi les éclatements qu'on étudiera seront de centre lisse.

Dans chaque classe d'automorphisme, on va choisir un polygone  $G/H$ -réflexif particulier, de façon à ce que les polygones soient en relation les uns avec les autres comme ci-dessus. Voici la liste des polygones  $G/H$ -réflexifs choisis, correspondant aux 16 plongements lisses de Fano de  $G/H$ .



Soient  $X$  un plongement lisse de  $G/H$  et  $Y$  une sous-variété de  $X$  irréductible et stable par  $G$ . Pour savoir à quel polygone  $G/H$ -réflexif correspond l'éclatement  $Bl_Y X$  de  $Y$  dans  $X$ , il suffit d'étudier les  $G$ -orbites fermées ainsi que les diviseurs irréductibles  $B$ -stables de  $X$  et de  $Bl_Y X$ . En effet, si  $Y$  contient deux orbites fermées qui sont elles-mêmes contenues dans  $D_\alpha$ , alors  $Bl_Y X$  a pour polygone  $G/H$ -réflexif celui de  $X$  auquel on a remplacé le sommet  $(\frac{1}{2}, 0)$  par  $(1, 0)$ . Et si  $Y$  est une  $G$ -orbite fermée de  $X$ , alors  $Bl_Y X$  a pour polygone  $G/H$ -réflexif celui de  $X$  auquel on a ajouté un sommet entre les deux sommets de la face correspondant à  $Y$ . De plus il n'y a qu'une seule façon d'ajouter un tel sommet, car  $X$  et  $Bl_Y X$  sont lisses. En effet, le nouveau sommet est la somme des deux sommets si ces derniers sont entiers; sinon, c'est la somme du sommet entier et de  $(1, 0)$ . On utilisera les mêmes raisonnements pour décrire des plongements lisses de Fano de  $SL_3/U$ .

On va maintenant déterminer les 16 plongements de  $G/H$  correspondant aux 16 polygones  $G/H$ -réflexifs ci-dessus.

On distingue d'abord deux plongements naturels :  $\mathbb{P}^3$  et  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  (rappelons que  $G/H \simeq \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^*$ ). En effet,  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\chi_0))$  et  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha)) \times \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\chi_0))$ . Ces deux plongements de  $G/H$  correspondent respectivement aux polygones  $G/H$ -réflexifs n° 1 et 2.

On va éclater chacun de ces plongements, afin d'en obtenir d'autres. Notons  $0$  le point fixe  $[0, 0, 0, 1]$  de  $\mathbb{P}^3$  et posons  $L := \mathbb{P}(\{0\} \oplus V(\omega_\alpha) \oplus \{0\})$  et  $L' := \mathbb{P}(V(0) \oplus \{0\} \oplus V(\chi_0))$  les deux droites (disjointes) de  $\mathbb{P}^3$  stables sous l'action de  $G$ . Remarquons que  $L$  (respectivement  $L'$ ) est fixée point par point par  $\mathbb{C}^*$  (respectivement  $SL_2$ ) et que  $0 \in L'$ .

Alors les éclatements de  $0, L, L', 0 \sqcup L$  et  $L \sqcup L'$  dans  $\mathbb{P}^3$  sont les plongements de  $G/H$  de polygones  $G/H$ -réflexifs respectifs n° 3, 4, 5, 6 et 7.

Remarquons que  $Bl_0\mathbb{P}^3$  est l'image dans  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$  du graphe de la projection

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\chi_0)) \dashrightarrow \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha)).$$

De même  $Bl_{L'}\mathbb{P}^3$  est l'image dans  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$  du graphe de la projection

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\chi_0)) \dashrightarrow \mathbb{P}(V(\omega_\alpha))$$

Soit  $l_0 := \{0\} \times \mathbb{P}(V(0) \oplus \{0\}) \subset Bl_0\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha))$ . C'est une droite contenue dans le diviseur exceptionnel de  $Bl_0\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  et stable sous l'action de  $G$ .

Alors l'éclatement de  $l_0$  dans  $Bl_0\mathbb{P}^3$  est le plongement de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 8.

Soit  $E'$  le diviseur exceptionnel de  $Bl_{L'}\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ , alors  $E' = L' \times \mathbb{P}(V(\omega_\alpha))$ . Notons  $l'_1 := \{0\} \times \mathbb{P}(V(\omega_\alpha))$  et  $l'_2 = \{[1, 0, 0, 0]\} \times \mathbb{P}(V(\omega_\alpha))$ . Ce sont des droites de  $E'$ , disjointes et stables sous l'action de  $G$ .

Alors les éclatements de  $l'_1$  et  $l_1 \sqcup l'_2$  dans  $Bl_{L'}\mathbb{P}^3$  sont les plongements de  $G/H$  de polygones  $G/H$ -réflexifs respectifs n° 9 et 10. Et les éclatements de  $l'_1$  et  $l_1 \sqcup l'_2$  dans  $Bl_{L \sqcup L'}\mathbb{P}^3$  sont les plongements de  $G/H$  de polygones  $G/H$ -réflexifs respectifs n° 11 et 12.

Notons maintenant  $0$  le point  $[1, 0, 0]$  de  $\mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha)) = \mathbb{P}^2$ , et  $\mathbb{F}^1$  l'éclatement de  $0$  dans  $\mathbb{P}^2$ . Alors  $\mathbb{F}^1 \times \mathbb{P}^1$  est le plongement de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 13.

Soit  $l''_0 := \{0\} \times \mathbb{P}(\{0\} \oplus V(\omega_\alpha)) \times [0, 1]$  le produit de la courbe exceptionnelle de  $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  et du point fixe  $[0, 1]$  de  $\mathbb{P}^1$ . C'est une droite de  $\mathbb{F}^1 \times \mathbb{P}^1$  stable sous l'action de  $G$ . Alors l'éclatement de  $l''_0$  dans  $\mathbb{F}^1 \times \mathbb{P}^1$  est le plongement de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 14.

Soit  $Y \subset \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(2\omega_\alpha) \oplus V(\chi_0))$  le cône de sommet  $y := [0, \dots, 0, 1]$  et de base la « surface de Veronese », image de l'application de Veronese

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha)) &\longrightarrow \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(2\omega_\alpha)) \\ [w, P(x, y)] &\longmapsto [w^2, wP(x, y), P(x, y)^2]. \end{aligned}$$

Alors  $y$  est fixé par  $G$ , et  $Bl_y Y$  est le plongement de  $G/H$  de polygone réflexif n° 15.

Soit  $Z \subset \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\alpha + \chi_0))$  le cône sur la quadrique de  $\mathbb{P}^3$  définie par  $\{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{P}(V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\alpha + \chi_0)) \mid x_1 x_4 = x_2 x_3\}$ , de sommet  $z := [1, 0, 0, 0]$  (on note  $x_1, x_2$  et  $x_3, x_4$  les coordonnées respectives de  $V(\omega_\alpha)$  et  $V(\omega_\alpha + \chi_0)$ ). Alors  $z$  est fixé par  $G$ , et  $Bl_z Z$  est le plongement de  $G/H$  de polygone réflexif n° 16.

Les plongements  $Y$  et  $Z$  ci-dessus, sont respectivement  $\mathbb{Q}$ -Fano et de Fano, et leurs polygones (l'un  $\mathbb{Q}$ - $G/H$ -réflexif et l'autre  $G/H$ -réflexif) sont les suivants.



Aucun de ces deux plongements n'est lisse ni même localement factoriel.

Je résume les résultats obtenus dans le tableau suivant.

polygone $G/H$ -réflexif n°	plongement $X$
1	$\mathbb{P}^3$
2	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$
3	$Bl_0 \mathbb{P}^3$
4	$Bl_L \mathbb{P}^3$
5	$Bl_{L'} \mathbb{P}^3$
6	$Bl_{0 \sqcup L} \mathbb{P}^3$
7	$Bl_{L \sqcup L'} \mathbb{P}^3$
8	$Bl_{l_0}(Bl_0 \mathbb{P}^3)$
9	$Bl_{l'_1}(Bl_{L'} \mathbb{P}^3)$
10	$Bl_{l'_1 \sqcup l'_2}(Bl_{L'} \mathbb{P}^3)$
11	$Bl_{l'_1}(Bl_{L \sqcup L'} \mathbb{P}^3)$
12	$Bl_{l'_1 \sqcup l'_2}(Bl_{L \sqcup L'} \mathbb{P}^3)$
13	$\mathbb{F}^1 \times \mathbb{P}^1$
14	$Bl_{l'_0}(\mathbb{F}^1 \times \mathbb{P}^1)$
15	$Bl_0 Y$
16	$Bl_0 Z$

où  $L$  et  $L'$  sont des droites disjointes de  $\mathbb{P}^3$ ,  
 $l_0$  est une droite du diviseur exceptionnel de  $Bl_0 \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ ,  
 $l'_1$  et  $l'_2$  sont des droites disjointes du diviseur exceptionnel de  $Bl_{L'} \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ ,  
 $l'_0$  est le produit d'une droite du diviseur exceptionnel de  $\mathbb{F}^1 = Bl_0 \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$   
et d'un point de  $\mathbb{P}^1$ ,  
 $Y$  est un cône de base une surface de Veronese dans  $\mathbb{P}^5$  (de sommet  $y$ ), et,  
 $Z$  est un cône de base une quadrique de  $\mathbb{P}^3$  (de sommet  $z$ ).

Les plongements n° 4 et 5 sont des variétés toriques isomorphes. Et les variétés toriques lisses, de Fano et de dimension 3, qui ne sont pas des plongements de  $G/H$ , sont les 3 suivantes :

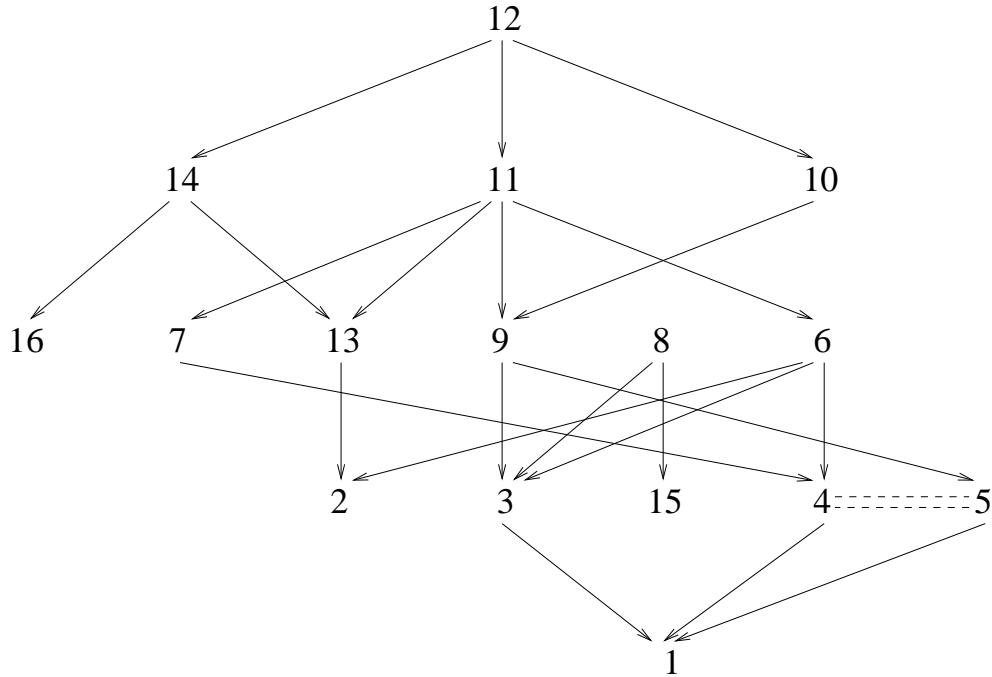
$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \\ &\mathbb{P}^1 \times Y_2, \\ &\mathbb{P}^1 \times Y_3, \end{aligned}$$

où  $Y_2$  et  $Y_3$  sont les surfaces toriques lisses, de Fano définies respectivement par les éclatements de 2 et 3 points fixes dans  $\mathbb{P}^2$ .

Le graphe suivant représente les éclatements qui existent entre les différents plongements lisses de Fano de  $G/H$ . Les sommets sont les plongements



lisses de Fano de  $G/H$ , et les flèches représentent les éclatements de centres irréductibles et lisses. Ces éclatements sont  $G$ -équivariants d'après la proposition 7.3.



On retrouve, en identifiant les plongements n° 4 et 5, une grande partie de la figure 2.7 de [Od88]. Il manque seulement les trois variétés toriques citées ci-dessus et les morphismes équivariants associés.

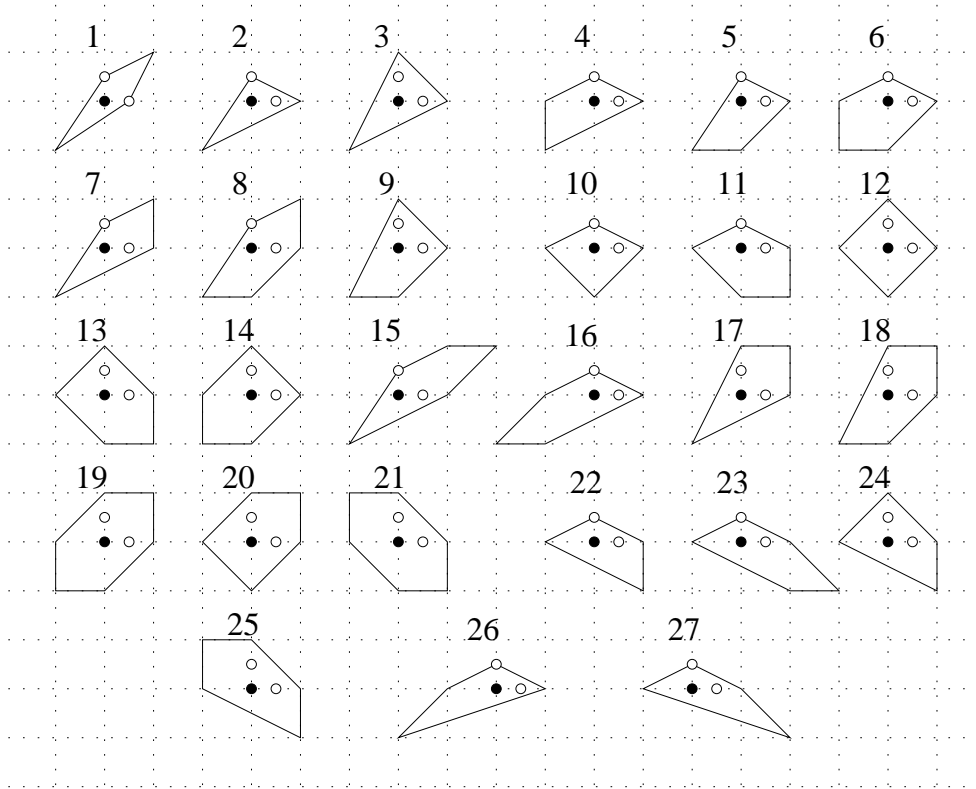
## 7.2 Description de quelques plongements de $SL_3/U$

Dans toute cette partie  $G = SL_3$  et  $H = U$ . On note  $\alpha$  et  $\beta$  les deux racines simples de  $SL_3$ . Le réseau  $N$  est alors muni de la base  $(\check{\alpha}, \check{\beta})$ .

On va déterminer quelques plongements de Fano de  $G/H$  à partir de leur polygone  $G/H$ -réflexif. On utilisera la même méthode que dans le chapitre précédent.

On va d'abord étudier deux plongements de Fano de  $G/H$  singuliers, et ensuite on décrira quelques plongements lisses de Fano de  $G/H$  en termes d'éclatements de sous-variétés irréductibles et stables par  $G$ .

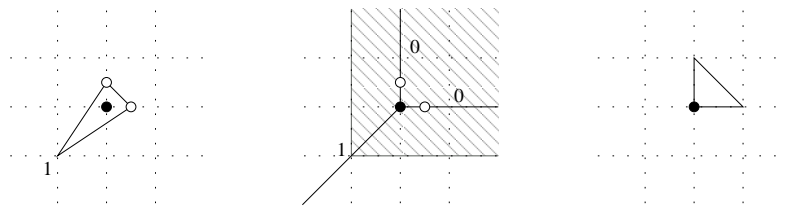
La figure ci-dessus représente les 27 polygones  $G/H$ -réflexifs (à automorphisme près) dont le plongement de  $G/H$  est lisse.



Etudions d'abord les deux plongements suivants.

a) Soit  $X$  le plongement de  $G/H$  associé au polygone  $G/H$ -réflexif représenté dans le premier schéma de la figure suivante.

Notons  $D$  l'unique diviseur irréductible et stable par  $G$ . C'est un diviseur de Cartier et ample.



On représente, dans le deuxième schéma de la figure, l'application linéaire par morceaux associée à  $D$  (voir proposition 3.2). On note sa valeur en l'élément

primitif de chaque arête de l'éventail colorié de  $X$ , et on représente la partie de  $N_{\mathbb{R}}$  sur laquelle cette application est inférieure ou égale à 1 par une zone hachurée. Le dernier schéma de la figure représente le polygone moment  $Q_D^*$  (dual de la zone hachurée) dans  $M_{\mathbb{R}}$  muni de la base  $(\omega_\alpha, \omega_\beta)$ , et où l'origine est le point noir.

On a alors  $\phi_D : X \rightarrow \mathbb{P}_D = \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\beta))$  et  $X$  est donc l'adhérence de  $\phi_D(G/H) = G.[v_0 + v_{\omega_\alpha} + v_{\omega_\beta}]$  dans  $\mathbb{P}_D$ .

Rappelons que  $V(\omega_\alpha) = \mathbb{C}^3$  et  $V(\omega_\beta) = \wedge^2 \mathbb{C}^3$ . Munissons  $\mathbb{C}^3$  d'une base  $(e_1, e_2, e_3)$  telle que  $e_1$  et  $e_1 \wedge e_2$  soient des vecteurs de plus haut poids de  $\mathbb{C}^3$  et  $\wedge^2 \mathbb{C}^3$ . On a alors

$$\begin{aligned} V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\beta) &= \mathbb{C}^3 \oplus \wedge^2 \mathbb{C}^3 \simeq \wedge^2(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3) \\ x + y \wedge z &\longmapsto x \wedge e_0 + y \wedge z. \end{aligned}$$

Et l'image de  $G/H$  par  $\phi$  dans  $\mathbb{P}_D \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \wedge^2 \mathbb{C}^4)$  est

$$G.[1 + e_1 + e_1 \wedge e_2] \simeq G.[1 + (e_1 \wedge e_0 + e_1 \wedge e_2)] = G.[1 + e_1 \wedge (e_0 + e_2)].$$

Or,  $G.[e_1 \wedge (e_0 + e_2)] \subset \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4)$  est inclus dans la grassmannienne  $G_{2,4}$  (ensemble des plans dans  $\mathbb{C}^4$ ). De plus les dimensions de  $G.[e_1 \wedge (e_0 + e_2)]$  et  $G_{2,4}$  sont les mêmes. On en déduit donc que  $X$  est le cône sur  $G_{2,4}$  de sommet  $0 := [1, 0, \dots, 0]$ .

On peut remarquer que  $X$  n'est pas lisse, il est seulement localement factoriel.

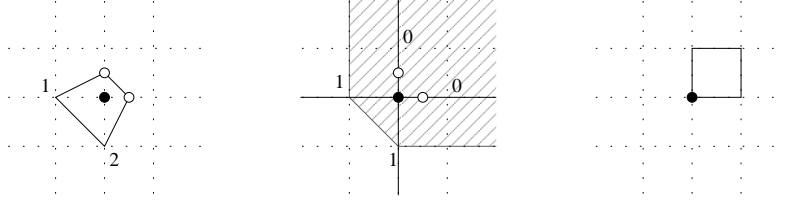
Etudions maintenant les sous-variétés de  $X$  irréductibles et stables par  $G$ .

La grassmannienne  $G_{2,4}$  est un plongement de  $G/H'$ , où  $H'$  est le noyau du caractère  $\omega_\alpha - \omega_\beta$  de  $B$ . C'est une variété horosphérique de Fano de rang 1 ; elle possède seulement (en plus de l'orbite ouverte  $G/H'$ ) deux  $G$ -orbites fermées  $G/P(\omega_\alpha)$  et  $G/P(\omega_\beta)$  respectivement isomorphes à  $\mathbb{P}^2$  et  $(\mathbb{P}^2)^*$ .

Ainsi les sous-variétés de  $X$  irréductibles et stables par  $G$  sont : le diviseur  $X_1 = X \cap \mathbb{P}(\{0\} \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\beta)) \simeq G_{2,4}$ , les deux  $G$ -orbites fermées  $Y_1 \simeq G/P(\omega_\alpha)$  et  $Y_2 \simeq G/P(\omega_\beta)$  de ce diviseur, les cônes  $Z_1$  et  $Z_2$  de sommet 0 et de base respective  $Y_1$  et  $Y_2$ , et le point fixe 0.

Dans la suite, on notera ce plongement  $X^a$ .

b) Soit  $X$  le plongement de  $G/H$  associé au polygone  $G/H$ -réflexif représenté dans le premier schéma de la figure suivante.



On numérote les sommets entiers du polygone de telle sorte que le diviseur  $X_i$ , irréductible et stable par  $G$ , corresponde au sommet  $i$ .

Soit  $D = X_1 + X_2$ . C'est un diviseur de Cartier et ample.

On a alors  $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}_D = \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\beta) \oplus V(\omega_\alpha + \omega_\beta)) = \mathbb{P}^{14}$ .

Soit  $X^b \subset \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha)) \times \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\beta)) = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$  défini par

$$\{([x_0, \dots, x_3], [y_0, \dots, y_3]) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \mid x_1 y_3 - x_2 y_2 + x_3 y_1 = 0\},$$

où  $(x_1, x_2, x_3)$  sont les coordonnées de  $V(\omega_\alpha) = \mathbb{C}^3$  dans la base  $(e_1, \dots, e_3)$ , et  $(y_1, y_2, y_3)$  sont les coordonnées de  $V(\omega_\beta) = \wedge^2 \mathbb{C}^3$  dans la base  $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ .

Soit  $\pi : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{14}$  défini par le plongement de Segre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha)) \times \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\beta)) \\ \rightarrow \mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\beta) \oplus (V(\omega_\alpha) \otimes V(\omega_\beta))) \end{aligned}$$

composé avec la projection

$$\mathbb{P}(V(0) \oplus V(\omega_\alpha) \oplus V(\omega_\beta) \oplus (V(\omega_\alpha) \otimes V(\omega_\beta))) \dashrightarrow \mathbb{P}_D.$$

Remarquons que  $V(\omega_\alpha + \omega_\beta)$  est le sous- $G$ -module de  $V(\omega_\alpha) \otimes V(\omega_\beta)$  défini par l'équation  $x_1 \otimes y_3 - x_2 \otimes y_2 + x_3 \otimes y_1 = 0$ . Alors  $\pi$  est défini sur  $X^b$  et est une immersion de  $X^b$  dans  $\mathbb{P}_D$ . De plus  $\phi_D(G/H)$  est un ouvert de  $\pi(X^b)$ . Ainsi  $X = X^b$ .

On peut remarquer que  $X$  n'est pas lisse ; il est seulement localement factoriel. Le point  $0 := ([1, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0])$  est un point singulier de  $X$ .

Etudions maintenant les sous-variétés de  $X$  irréductibles et stables par  $G$ .

On distingue d'abord les deux diviseurs irréductibles et stables par  $G$ ,

$$X_1 = X \cap \{([x_0, \dots, x_3], [y_0, \dots, y_3]) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \mid x_0 = 0\} \text{ et}$$

$$X_2 = X \cap \{([x_0, \dots, x_3], [y_0, \dots, y_3]) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \mid y_0 = 0\}.$$

Les  $G$ -variétés  $X_1$  et  $X_2$  sont des variétés horosphériques de rang 1. Notons  $Y_{i,1}$  et  $Y_{i,2}$  ses deux  $G$ -orbites fermées telles que

$$Y_{1,1} = \{[1, 0, 0, 0]\} \times \mathbb{P}(\{0\} \oplus V(\omega_\beta)) \simeq G/P(\omega_\beta) \simeq (\mathbb{P}^2)^*,$$

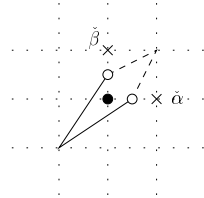
$$Y_{2,2} = \mathbb{P}(\{0\} \oplus V(\omega_\alpha)) \times \{[1, 0, 0, 0]\} \simeq G/P(\omega_\alpha) \simeq \mathbb{P}^2 \text{ et}$$

$$Y_{1,2} = Y_{2,1} = X_1 \cap X_2 = \{([0, x_1, x_2, x_3], [0, y_1, y_2, y_3]) \in X\} \simeq G/B.$$

Alors les sous-variétés de  $X$  irréductibles et stables par  $G$  sont  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,2}$ ,  $Y_{1,2}$ , les cônes  $Z_1$  et  $Z_2$  de sommet 0 et de base respective  $Y_{1,1}$  et  $Y_{2,2}$ , et le point fixe 0.

Nous allons maintenant commencer à décrire les plongements lisses de Fano de  $G/H$ .

Soit  $X$  l'éclatement de 0 dans  $X^a$ ; alors  $X$  est lisse. Le point fixe 0 est l'orbite fermée du plongement simple dont le cône colorié est engendré par les images  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  des deux couleurs  $D_\alpha$  et  $D_\beta$ . L'éventail colorié de  $X$  est donc celui de  $X^a$  auquel on a ajouté une arête dans le cône engendré par  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$ . De plus, comme  $X$  est lisse, cette nouvelle arête est engendrée par  $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ . Ainsi  $X$  est le plongement lisse de Fano de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 1.



Le diviseur exceptionnel  $E$  du morphisme  $X \rightarrow X^a$  est isomorphe à  $G_{2,4}$ . On note  $Y'_1 \simeq G/P(\omega_\alpha)$  et  $Y'_2 \simeq G/P(\omega_\beta)$  les  $G$ -orbites fermées de  $E$ .

Soit  $X$  l'éclatement de  $Z_2$  dans  $X^a$ . C'est une variété lisse, car  $Z_2$  contient le sommet du cône  $X^a$ . De plus,  $Z_2$  contient deux  $G$ -orbites fermées 0 et  $Y_2$  de  $X^a$ , et ces deux  $G$ -orbites fermées sont incluses dans  $D_\alpha$ . Par conséquent,  $X$  est le plongement de Fano de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 2.

Le diviseur exceptionnel  $E$  du morphisme  $X \rightarrow X^a$  est inclus dans  $Z_2 \times \mathbb{P}(V(\omega_\beta)) \simeq Z_2 \times \mathbb{P}^2$ . Il contient deux  $G$ -orbites fermées  $\{0\} \times \mathbb{P}^2$  et  $E \cap Y_2 \times \mathbb{P}^2 \simeq G/B$  qu'on note respectivement  $Y_0$  et  $Y_2''$ . On note aussi  $Z_1'$  la transformée stricte de  $Z_1$  dans  $X$ .

On peut remarquer que l'éclatement de  $Z_1$  dans  $X^a$  est aussi le plongement de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 2, à l'automorphisme près qui échange  $\alpha$  et  $\beta$ .

On peut aussi montrer que les éclatements de  $Z'_1, Y_1, Y_2'', Y_1 \sqcup Y_2'', Y_0, Y_0 \sqcup Y_2'',$  et  $Z'_1 \sqcup Y_2''$  dans  $Bl_{Z_2}X^a$  sont les plongements de Fano de  $G/H$  de polygones  $G/H$ -réflexifs respectifs n° 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Soit  $X$  l'éclatement de  $Z_2$  dans  $X^b$ . Alors  $X$  possède un diviseur irréductible  $G$ -stable de plus que  $X^b$  : le diviseur exceptionnel  $E \subset Z_2 \times \mathbb{P}(V(\omega_\beta)) \simeq Z_2 \times \mathbb{P}^2$ . Et il possède le même nombre de  $G$ -orbites fermées :  $0 \in Z_2$  est remplacée par  $Y_0 := E \cap \{0\} \times \mathbb{P}^2 \subset E$ , et  $Y_{2,2} \subset Z_2$  est remplacée par  $Y'_{2,2} := E \cap Y_{2,2} \times \mathbb{P}^2 \simeq G/B$ . Ainsi l'éventail colorié  $\mathbb{F}$  de  $X$  a le même nombre de cônes coloriés de dimension 2 que l'éventail colorié  $\mathbb{F}^b$  de  $X^b$ . Comme il existe un morphisme  $X \rightarrow X^b$ , on en déduit que les cônes sans couleur des éventails  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{F}^b$  sont les mêmes. Pour connaître les couleurs de  $X$ , on regarde si les couleurs  $D_\alpha$  et  $D_\beta$  contiennent une orbite fermée ou pas. Ici, seule  $D_\beta$  est une couleur de  $X$ , donc  $X$  est le plongement de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 10. De plus, on a montré que  $X$  est lisse. On note  $Z'_1$  la transformée stricte de  $Z_1$  dans  $X$ .

On peut remarquer que l'éclatement de  $Z_1$  dans  $X^b$  est aussi le plongement de  $G/H$  de polygone  $G/H$ -réflexif n° 10, à l'automorphisme près qui échange  $\alpha$  et  $\beta$ .

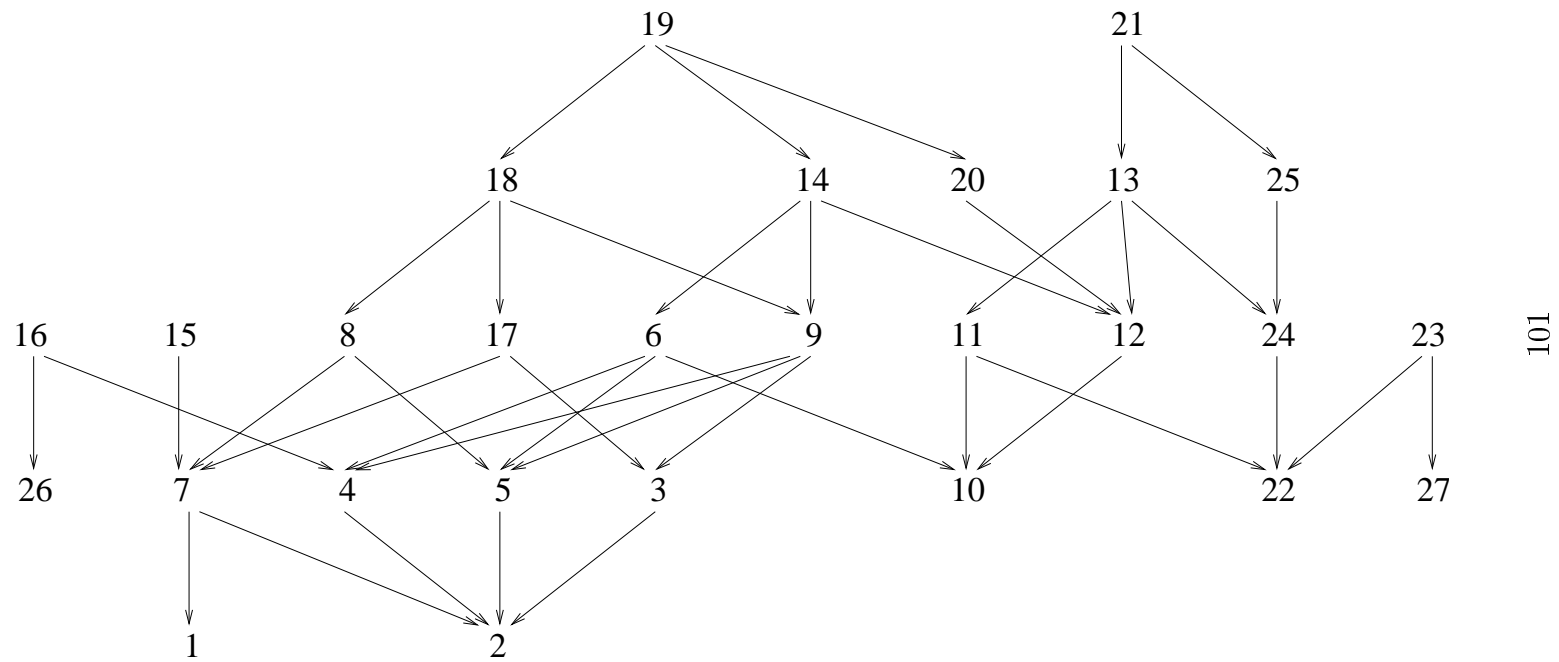
On peut alors aussi montrer que les éclatements de  $Y_{1,2}, Y'_{2,2}, Z'_1, Z'_1 \sqcup Y'_{2,2}$  et  $Z'_1 \sqcup Y_{1,2}$  dans  $Bl_{Z_2}X^b$  sont les plongements de Fano de  $G/H$  de polygones  $G/H$ -réflexifs respectifs n° 6, 11, 12, 13 et 14.

Les plongements de Fano de  $G/H$  de polygones  $G/H$ -réflexifs n° 15 à 21 peuvent s'obtenir par une suite d'éclatements de sous-variétés irréductibles et stables par  $G$  dans une des variétés ci-dessus.

Ensuite, les plongements lisses de Fano de  $G/H$  n° 23, 24, 25 s'obtiennent à partir du plongement de  $G/H$  n° 22, toujours par une suite d'éclatements de sous-variétés irréductibles et stables par  $G$ . Et les plongements lisses de Fano de  $G/H$  n° 26 et 27 sont des contractions d'un diviseur irréductible et  $G$ -stable dans les plongements de Fano de  $G/H$  respectifs n° 16 et 23. En effet, le plongement de  $G/H$  n° 16 (respectivement n° 23) est l'éclatement d'une  $G$ -orbite fermée du plongement de  $G/H$  n° 26 (respectivement n° 27).

Dans la figure suivante, on représente comme à la fin de la partie 7.1,

les éclatements ( $G$ -équivariants) qui existent entre les différents plongements lisses de Fano de  $G/H$ .



101



# Bibliographie

- [AB04] V. Alexeev et M. Brion, *Boundedness of spherical Fano varieties*, The Fano Conference, 69-80, Univ. Torino, Turin, 2004.
- [BA04] V. Alexeev et M. Brion, *Toric degenerations of spherical varieties*, Selecta Math. (N.S.) **10** (2004), no. 4, 453-478.
- [Ak95] D. N. Akhiezer, *Lie group actions in complex analysis*, Aspects of Mathematics, E27. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1995.
- [Ba81] V. Batyrev, *Toroidal Fano 3-folds*, Math USSR-Izv. **19** (1982), 13-25; Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **45** (1981), 704-717, 927.
- [Ba94] V. Batyrev, *Dual polyedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), 493-535.
- [BB92] A. Borisov et L. Borisov, *Singular toric varieties*, (in Russian) Mat. Sb. **183** (1992), 134-141. English transl. : Russian Acad. Sci. Sb. Math. **75** (1993), 277-283.
- [Bo75] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 7 et 8, C.C.L.S., Paris 1975.
- [Br87] M. Brion, *Sur l'image de l'application moment*, Séminaire d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin (Paris, 1986), 177-192, Lecture Notes in Math. **1296**, Springer, Berlin, 1987.
- [Br89] M. Brion, *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. **58** (1989), no. 2, 397-424.
- [Br94] M. Brion, *Factorisation de certains morphismes birationnels*, Compositio Math. **91** (1994), no. 1, 57-66.
- [Br97a] M. Brion, *Curves and divisors in spherical varieties*, Algebraic groups and Lie groups, 21-34, Austral. Math. Soc. Lect. Ser. **9**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

- [Br97b] M. Brion, *Variétés sphériques*, Notes de cours, 1997.
- [Ca06] C. Casagrande, *The number of vertices of a Fano polytope*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 1, 121-130.
- [Co36] J.G. van der Corput, *Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen II*, Acta Arith. **2** (1936), 145-146.
- [De01] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2001.
- [De03] O. Debarre, *Fano Varieties*, in Higher Dimensional Varieties and Rational Points, Budapest, 2001, K. Böröczky Jr., J. Kollár and T. Szamuely editors, Bolyai Society Mathematical Studies **12**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 93-132.
- [De70] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **3** (1970), 507-588.
- [EW91] G. Ewald et U. Wessels, *On the ampleness of invertible sheaves in complete projective toric varieties*, Results Math. **19** (1991), no. 3-4, 275-278.
- [Fu93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematical Studies **131**, Princeton University Press, 1993.
- [Ha77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [He83] D. Hensley, *Lattice vertex polytopes with interior lattice points*, Pacific J. Math. **105** (1983), 183-191.
- [Hu75] J.E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, 1975.
- [Kn91] F. Knop, *The Luna-Vust Theory of Spherical Embeddings*, Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups, Manoj-Prakashan, 1991, 225-249.
- [KK89] F. Knop, H. Kraft, D. Luna et T. Vust, *Local properties of algebraic group actions*, Algebraic Transformation Groups and Invariant Theory, 63-75, DMV Sem. **13**, Birkhäuser, Basel 1989.
- [Kr85] H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Viehweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1985.
- [LV83] D. Luna et T. Vust, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186-245.

- [LZ91] J. Lagarias et G. Ziegler, *Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice*, *Canad. J. Math.* **43** (1991), 1022-1035.
- [Ni05] B. Nill, *Gorenstein toric Fano varieties*, *Manuscripta Math.* **116** (2005), no. 2, 183-210.
- [Od78] T. Oda, *Torus embeddings and applications* (Based on joint work with Katsuya Miyake), *Tata Inst. of Fund. Research* **58**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.
- [Od88] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Springer-Verlag, 1988.
- [Pa83] F. Pauer, *Glatte Einbettungen von  $G/U$* , *Mathematische Annalen* **262** (1983), 421-429.
- [Sp98] T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups, Second Edition*, Birkhäuser, 1998.
- [Ti06] D. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, preprint, arXiv : math.AG/0602228.
- [WW82] K. Watanabe, M. Watanabe, *The classification of Fano 3-folds with torus embeddings*, *Tokyo J. Math.* **5** (1982), 37-48.

# Index

- $-K_X$ , 6
- $G, T, B, U$ , 11
- $R, R^+$ , 11
- $S$ , 11
- $\Lambda, \Lambda^+$ , 11
- $W$ , 11
- $\check{\alpha}$ , 11
- $\omega_\alpha$ , 11
- $N_G(H)$ , 11
- $R_u(H)$ , 11
- $W_I$ , 11
- $s_\alpha$ , 11
- $R_I, R_I^+$ , 11
- $P_I$ , 11
- $V(\lambda)$ , 11
- $v_\lambda$ , 11
- $P(\lambda)$ , 11
- $V^G, V^U$ , 12
- $V^{(B)}$ , 12
- $I$ , 13
- $M, N$ , 13
- $n$ , 13
- $d$ , 13
- $M_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}}$ , 13
- $X_1, \dots, X_m$ , 15
- $\mathcal{D}$ , 15
- $D_\alpha$ , 15
- $\sigma$ , 15
- $\check{\alpha}_M$ , 16
- $G \times^P Y$ , 17
- $\Gamma_S, \Gamma_I$ , 22
- $a_\alpha$ , 31
- $\rho^P$ , 31
- $x_i$ , 32
- $\chi_C$ , 32
- $h_D$ , 32
- $\mathcal{D}_X$ , 33
- $Q$ , 33
- $Q^*$ , 33
- $(-K_X)^d$ , 41
- $\rho$ , 43
- $Q_D^*$ , 55
- $\phi_D$ , 57
- $\eta_1, \dots, \eta_k, \theta_1, \dots, \theta_k$ , 70
- Automorphisme de  $(N, \mathcal{D})$ , 37
- Cône colorié, 17
- Couleur, 15
- Couleur d'un cône ou éventail colorié, 17
- Couleur de  $X$ , 15
- Degré, 41
- Eventail colorié, 18
- Eventail complet, 18
- Face coloriée, 18

$\mathbb{Q}$ -factoriel, 52  
 de Fano, 6  
  
 Horosphérique (sous-groupe ou espace homogène), 12  
 Horosphérique (variété), 14  
  
 Image d'une couleur, 16  
 Isomorphisme de plongements, 14  
  
 Lisse (pour un couple  $(I, J)$ ), 22  
 Localement factoriel, 21  
  
 Plongement, 14  
 Polytope moment, 55  
  
 Réflexif, 6  
 $G/H$ -réflexif, 33  
 Rang, 13  
  
 Segment (d'un polygone  $G/H$ -réflexif), 60  
 Simple, 15  
 Sphérique (espace homogène ou variété), 14  
  
 Toroidal, 15





## RÉSUMÉ

Une variété horosphérique est une variété algébrique normale dans laquelle un groupe algébrique réductif opère avec une orbite ouverte fibrée en tores sur une variété de drapeaux. La dimension de ces tores est appelée le rang de la variété horosphérique. En particulier, les variétés toriques et les variétés de drapeaux sont horosphériques. Dans cette thèse, on classe les variétés horosphériques de Fano en termes de certains polytopes rationnels qui généralisent les polytopes réflexifs considérés par V. Batyrev. Puis on obtient une majoration du degré des variétés horosphériques lisses de Fano, analogue à celle donnée par O. Debarre dans le cas torique. On étend un résultat récent de C. Casagrande : les variétés horosphériques  $\mathbb{Q}$ -factorielles de Fano ont leur nombre de Picard majoré par deux fois la dimension. On donne aussi de nombreux exemples en rang 2.

## ABSTRACT

A horospherical variety is a normal algebraic variety where a reductive algebraic group acts with an open orbit which is a torus bundle over a flag variety. The dimension of the torus is called the rank of the horospherical variety. For example, toric varieties and flag varieties are horospherical. In this thesis, we classify Fano horospherical varieties in terms of certain rational polytopes that generalize the reflexive polytopes considered by V. Batyrev. Then, we obtain an upper bound on the degree of smooth Fano horospherical varieties, analogous to that given by O. Debarre in the toric case. We extend a recent result of C. Casagrande : the Picard number of any Fano  $\mathbb{Q}$ -factorial horospherical variety is bounded by twice the dimension. Also, we give several examples in rank 2.

## MOTS-CLÉS

variété de Fano, variété horosphérique, polytope rationnel, degré, nombre de Picard.

## CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14J45 14L30 14M17 52B20