L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

TD 1 : les nombres complexes

Pré-requis

Exercice 1 :

Écrire les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs, préciser (en prouvant) s'ils sont vrais ou faux.
(1) Le carré de tout réel est positif ou nul.
(2) Il existe des réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.
(3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
(4) Les réels ne sont pas tous des quotients d'entiers.
(5) Il existe un réel dont la somme avec n'importe quel autre réel est toujours strictement positive.
(6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
(7) Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
(8) Pour chaque réel x, on peut trouver un réel tel que la somme des deux soit strictement positive.

Exercice 2 :

Soient n et p deux entiers naturels.
Écrire en langage formalisé les phrases suivantes :
a) n est un entier naturel pair.
b) p est un entier naturel impair.
c) Le produit de deux nombres pairs est toujours un nombre pair (et le démontrer)
d) Le produit de deux nombres impairs est toujours un nombre impair (et le démontrer)
e) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair (et le démontrer)
f) p est un nombre premier.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) $|3x - 11| = 5$
b) $|x - 1| \leq 3$
c) $|x + 2| > 4$.

Écritures d'un nombre complexe

Exercice 4 :

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :
$z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{5-3\mathrm{i}}, \quad z_2 = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} + \dfrac{1}{-1+2\mathrm{i}}.$

Exercice 5 :

Mettre sous forme algébrique la plus simplifiée possible les nombres suivants :

$z_1 = e^{\mathrm{i}\pi/4}, \quad z_2 = 3e^{-5\mathrm{i}\pi/6}, \quad z_3 = e^{\mathrm{i}\pi/12}, \quad z_4 = e^{\mathrm{i}31\pi/3}, \quad z_5 = e^{\mathrm{i}2019\pi/6}, \quad z_6 = e^{\mathrm{i}\pi/7} + e^{-\mathrm{i}\pi/7}$
$z_7 = e^{\mathrm{i}\pi/5} + e^{-\mathrm{i}\pi/5}, \quad z_8 = e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $z_9 = e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants avec un argument entre $-\pi$ et π :

$$z_1 = 2e^{\mathrm{i}2019\pi/7}, \quad z_2 = -e^{\mathrm{i}\pi/8}, z_3 = -3e^{\mathrm{i}\pi/9}e^{\mathrm{i}\pi/3}, \quad z_4 = \frac{-e^{\mathrm{i}\pi/5}}{e^{\mathrm{i}\pi/10}}, \quad z_5 = (e^{\mathrm{i}\pi/3})^{46}$$

Exercice 7 :

Mettre **rapidement** sous forme trigonométrique les nombres suivants avec un argument entre $-\pi$ et π et vérifier par un dessin rapide que l'argument proposé est cohérent :

$$z_1 = \mathrm{i}, \quad z_2 = -2, \quad , z_3 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_4 = -1 + \mathrm{i}, \quad z_5 = -3\mathrm{i}, \quad z_6 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

Exercice 8 :

Mettre sous forme algébrique la plus simplifiée possible les nombres suivants :

$$z_1 = (-1+\mathrm{i})^{20}, \quad z_2 = (\sqrt{3} - \mathrm{i})^{2019}$$

Exercice 9 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants avec un argument entre $-\pi$ et π :

$$z_1 = \frac{(1+\mathrm{i})^8}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5}, \quad z_2 = \frac{(1-\mathrm{i})^5(\mathrm{i}-\sqrt{3})^4}{(1+\mathrm{i})^3}$$

Exercice 10 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants :
$z_1 = e^{\mathrm{i}\pi/5} + e^{-\mathrm{i}\pi/5}, \quad z_2 = e^{\mathrm{i}\pi/5} - e^{-\mathrm{i}\pi/5}, \quad z_3 = 1 + e^{-\mathrm{i}\pi/7}, \quad z_4 = 1 - e^{-\mathrm{i}\pi/9}, \quad z_5 = \dfrac{1-e^{\mathrm{i}x}}{1-e^{\mathrm{i}y}}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 :

a) On a vu en cours qu'en exprimant de 2 manières $\mathrm{e}^{i(a+b)}$, on peut montrer que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. Faire la même chose pour retrouver les formules de $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.
b) Montrer que $\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} = 2\cos(\frac{a-b}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$.
c) Montrer que $\mathrm{e}^{ia} - \mathrm{e}^{ib} = 2i\sin(\frac{a-b}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$.
d) Retrouver les formules pour $\cos a + \cos b$ et $\sin a + \sin b$.

Racines d'un nombre complexe

Exercice 12 :

Calculer sous forme trigonométrique les racines carrées complexes des nombres suivants :

$z_1 = 4e^{i\pi/5}, \quad z_2 = 2e^{i\pi/4}, \quad z_3 = -5, \quad z_4 = -e^{i\pi/7}, \quad z_5 = -9, \quad z_6 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_7 = i$

Exercice 13 :

Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $3 + 4i$. (On pourra reproduire la même méthode du dernier exercice du chapitre 1 vu en cours.)

Exercice 14 :

Calculer sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de $a = 1 + i$. en déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

Exercice 15 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 2z + 1 + i = 0$ *b*) $z^2 - 2iz - 1 = 0$ c) $z^4 + (1 - i)z^2 = i$

Exercice 16 :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes :
(1) $x^3 = -1$ (2) $x^4 = -1$ (3) $x^3 = 27$ (4) $x^4 = 8$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(1) $z^3 = -1$ (2) $z^4 = -1$ (3) $z^3 = 27$ (4) $z^4 = 8$

Exercice 17 :

Résoudre les équations suivantes et représenter l'ensemble des solutions dans le plan complexe.
a) $z^3 = 2(1 + i)$ *b*) $z^5 = \dfrac{8(1+i)}{\sqrt{3} - i}$ *c*) $z^3 = (z + 1)^3$ *d*) $z^4 = (z + 1)^4$

L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

TD 2 : systèmes linéaires

Pré-requis

Exercice 1 :

Décrire géométriquement (avec une phrase) les ensembles suivants :
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
c) $\{(x, 2x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
d) $\{(x, 2x+1) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
e) $\{(3z, 2z, z) \ ; \ z \in \mathbb{R}\}$
f) $\{(x, 2x+1, 3x-2) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
g) $\{(y-z, y, z) \ ; \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$
h) $\{(y-2z+1, y-2, z) \ ; \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 2 :

Donner des équations des ensembles suivants (c'est-à-dire les écrire sous formes {type | condition}) :
a) $\{(x, 2x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
b) $\{(x, 2x+1) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
c) $\{(3z, 2z, z) \ ; \ z \in \mathbb{R}\}$
d) $\{(x, 2x+1, 3x-2) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
e) $\{(y-z, y, z) \ ; \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$
f) $\{(y-2z+1, y-2, z) \ ; \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 3 :

Décrire paramétriquement les ensembles suivants :
a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 5z = 0\}$
d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 2z = 7\}$.

Exercice 4 :

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$ Soit $F = \{(x, x, 12) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
a) Trouver un exemple d'élément de F et montrer qu'il est dans E.
b) Montrer que le cas particulier précédent est en fait une généralité, c'est à dire montrer que $F \subset E$.
c) A-t-on $E \subset F$?
d) Soit $G = \{(x, x, z) \ ; \ (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que $G = E$.

Exercice 5 :

a) Soit $E = \{a(2,3,-1) + b(1,-1,-2)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{a(3,7,0) + b(5,0,-7)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Les ensembles E et F sont-ils égaux ?
b) Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x + y - z = 0 = x - y\}$. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ 2y - z = 0\}$. Les ensembles E et F sont-ils égaux ?

Résolutions de systèmes linéaires

Exercice 6 :

Résoudre chacun des systèmes linéaires suivants en utilisant si besoin l'algorithme de Gauss, écrire l'ensemble des solutions avec une notation ensembliste adaptée et préciser **quand ça a un sens** si c'est une droite de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou un plan de $\mathbb{R}^3$.

$$a)\ \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 3y - 3z = -3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ 3x + 2y + z + t = -2 \\ y + 2z + 2t = 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3t = 12 \end{cases} \qquad h)\ x + 2y + 3z = 1$$

Exercice 7 :

Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'équation :

$$(m+1)x + 2 - m = 0$$

Exercice 8 :

Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = a \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 7x - 4y - a^2 z = a - 4 \end{cases}$$

L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

TD 3 : applications et fonctions

FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES UNIVERSITÉ DE POITIERS

Pré-requis

Exercice 1 :

Soit $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+3}$ avec $z \in \mathbb{C}$. Quelle est l'application f induite ?
Même question avec $f((x,y)) = 12x + y$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Soit $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$.
a) Donner le domaine de définition de f.
b) Écrire l'application $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ comme la composée de trois applications g, h et k qu'on décrira complètement.
c) Donner toutes les autres fonctions qu'on peut construire par composition avec les fonctions associées à g, h et k. Préciser leurs domaines de définition.

Exercice 3 :

1) Soit $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2 + 12$. Déterminer Im f.
2) Soit $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+2, x-y+3, y-12)$. Déterminer Im f.
3) Soit $f \ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln x$. Déterminer Im f.

Fonctions continues et dérivables

Exercice 4 :

Pour chacune des fonctions suivantes, faire l'étude de l'ensemble de définition, le repérage des problèmes de dérivabilité et l'étude des variations.
a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ b) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ c) $f(x) = (x-1)^2$ d) $f(x) = \ln(x^2+12)$ e) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$. Justifier que f est dérivable sur D_f sauf éventuellement à une extrémité de D_f. Puis dresser le tableau de variation de f.

Exercice 6 :

Étudier la fonction $x \longmapsto \ln(1+x) - x$ et en déduire que pour tout $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

TD 4 : bijections, applications et fonctions réciproques

Bijections

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
a) D'après l'étude des variations de f, est-ce que l'application $f \ : \ D_f \to \mathbb{R}$ est bijective ?
b) Montrer que f induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque.
c) Déterminer (en justifiant) le plus grand intervalle I contenant 0 et un intervalle J tels que f induise une bijection de I sur J.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$.
Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.
Peut-on décrire explicitement f^{-1} ?

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $I = [0, \sqrt{2}[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^4}$
Montrer sans calcul de dérivée que f est monotone sur I et qu'elle induit une bijection. Peut-on expliciter f^{-1} ? Montrer que f^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{3}$ et calculer sa valeur. Tracer le graphe de f^{-1}.

Exercice 4 :

Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que $\ln x = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$. Est-il unique ?

Exercice 5 :

On dit qu'une application définie sur E et à valeurs dans F est **injective** quand chaque élément de F a au plus un antécédent dans E.
On dit qu'une application définie sur E et à valeurs dans F est **surjective** quand chaque élément de F a au moins un antécédent dans E.
Une application définie sur E et à valeurs dans F est **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective.
a) Supposons que l'on puisse trouver deux éléments distincts x et y de E tels que $f(x) = f(y)$. Que peut-on dire de l'application f concernant son injectivité ou sa surjectivité ?
b) Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Écrire la définition en langage formalisé de " f est surjective".
c) Montrer que les applications suivantes ne sont pas injectives :
(i) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$ (ii) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x+y, x+y),$
(iii) $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-1)(x-12),$ (iv) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$

d) Montrer que les applications suivantes ne sont pas surjectives :
(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$ (ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, 12+x)$
(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x-12|$
e) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x+y$. Montrer que f est surjective, est-elle bijective ?
f) Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est bijective.

Arctangente

Exercice 6 :

1) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour quelles valeurs de x est-on sûr d'avoir $x \mapsto \arctan(u(x))$ définie et dérivable ? Calculer la dérivée dans ce cas.
2) Étudier la fonction g définie par $g(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$ et simplifier son expression.

Exercice 7 :

Résoudre l'équation $\tan x = \dfrac{12}{7}$.

Exercice 8 :

Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On sait que l'on peut poser $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi/2, 3\pi/2]$.
a) Montrer que $r > 0$.
b) Pourquoi $\tan\theta$ est-il bien défini ? Calculer $\tan\theta$ en fonction de a et b.
c) Donner une expression de θ à l'aide de la fonction arctan quand $a > 0$ puis pour $a < 0$ (faire un dessin).
d) Application : Donner la forme trigonométrique (à l'aide de arctan) des nombres complexes suivants :
$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = -2 + i.$

L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

TD 5 : primitives et intégrales

Primitives

Exercice 1 :

Calculer les primitives suivantes en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies :

a) $\displaystyle\int (x^2+2x+2)\,dx$ b) $\displaystyle\int (\mathrm{e}^t + 2\cos t - \sin t)\,dt$ c) $\displaystyle\int dx$ d) $\displaystyle\int 12\alpha\,dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

e) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3})\,dx$ f) $\displaystyle\int (t^2 + \frac{1}{t^2})^2\,dt$ g) $\displaystyle\int \frac{x^5-3x-1}{x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int 12\sqrt{t}\,dt$ i) $\displaystyle\int t^{\sqrt{2}}\,dt$

Exercice 2 :

Calculer les primitives suivantes en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies :

a) $\displaystyle\int \frac{6t^5}{1+t^6}\,dt$ b) $\displaystyle\int e^{12x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{1+3t^2}$ e) $\displaystyle\int \sin t \cos t\,dt$ f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$

g) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$

Exercice 3 :

Calculer les primitives suivantes en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies :

a) $\displaystyle\int (x-1)\ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int x\sin 3x\,dx$ c) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x}\,dx$ d) $\displaystyle\int (t^2-t)\ln t\,dt$ e) $\displaystyle\int t(\ln t)^2\,dt$

Exercice 4 :

Calculer la primitive qui vaut 42 en $x=0$ de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{12+\mathrm{e}^{2x}}$ en précisant son intervalle de définition.

Intégrales

Exercice 5 :

Calculer, à l'aide d'une intégrale, la primitive qui vaut 0 en $x=1$ de $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$ en précisant son intervalle de définition.

Exercice 6 :

Calculer

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln t)^5}{t}\,dt$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,dx$

Exercice 7 :

Calculer
a) $\displaystyle\int_0^1 te^{2t}\,dt$ b) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$ (On sera amené à écrire $\dfrac{t}{1+t}$ sous la forme $a+\dfrac{b}{1+t}$ avec a et b réels à déterminer.)

Exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chacune des intégrales suivantes, trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n à l'aide d'une intégration par parties :
a) $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\,dx$ b) $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^n\,dt$ c) $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n\,dt$

Exercice 9 :

Dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, on considère la partie D du plan délimitée par l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = x(x-1)(x-4)$ avec $1 \leq x \leq 4$. Calculer l'aire du domaine D.

L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

Université de Poitiers

FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES UNIVERSITÉ DE POITIERS

TD 6 : fonctions polynomiales

Exercice 1 :

Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la factorisation est possible puis donner par observation du degrés, du coefficient dominant et du terme constant la forme de $Q(x)$:
Ex : $x^3-1=(x-1)Q(x)$ car 1 est racine de x^3-1, de plus $\exists a \in \mathbb{R},\ Q(x)=x^2+ax+1$.

a) $2x^4-4x^3+3x^2-12=(x-2)Q(x)$, b) $x^4+x^3+3x^2+x+2=(x^2+1)Q(x)$,
c) $3x^3+4x^2+6x+5=(x+1)Q(x)$.

Exercice 2 :

Effectuer la division euclidienne de A par B dans chacun des deux cas suivants :
a) $A(x)=x^3+2x+1,\quad B(x)=x(x+1)$;
b) $A(x)=3x^5+x^4+2x^3-2x^2-1,\quad B(x)=3x^3-2x^2+x-1$.

Exercice 3 :

Donner la décomposition en facteurs premiers dans $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales suivantes :
a) $P(x)=x^3+1$,
b) $P(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$ (on vérifiera que i est racine de P),
c) $P(x)=x^4-13x^2+36$,
d) $P(x)=x^4-4$,
e) $P(x)=x^4+x^2+1$ (on pourra essayer de faire apparaitre une différence de carrés),
f) $P(x)=x^4+1$,
g) $P(x)=1-x^8$,
h) $P(x) = x^4-x^3-x^2+6$ (on vérifiera que $-1+i$ est racine).

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le reste de la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :
a) $A(x)=x^{2n}+1,\quad B(x)=x^2-x-2$
b) $A(x)=x^{n+1}+x^n+1,\quad B(x)=(x-1)^2$
c) $A(x)=(\cos\alpha+x\ \sin\alpha)^n,\quad B(x)=x^2+1$.

Exercice 5 :

Donner la décomposition en facteurs premiers de la fonction polynomiale $x^3+2x^2-15x-36$ dans $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{C}[x]$. *(Indication : cette fonction polynomiale a une racine double.)*

Exercice 6 :

Donner la décomposition en facteurs premiers de la fonction polynomiale $x^4 - (6+i)x^3 + 6(i+2)x^2 - 4(2+3i)x + 8i$ dans $\mathbb{C}[x]$. *(Indication : cette fonction polynomiale a une racine triple.)*

Exercice 7 :

Soit P une fonction polynomiale telle que : la division eculidienne de $P(x)$ par $x-2$ donne comme reste 1 et la division eculidienne de $P(x)$ par $x-3$ donne comme reste -4. Quel est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par le produit $(x-2)(x-3)$?

L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

TD 7 : fonctions rationnelles

Exercice 1 :

Soit $F(x) = \dfrac{x^6-1}{x^4-1}$. Montrer que F n'est pas sous forme réduite dans $\mathbb{R}(x)$ et simplifiez-la.

Exercice 2 :

Parmi les fonctions rationnelles suivantes, repérer celles qui ont une partie entière non nulle et les écrire comme somme d'une fonction polynomiale et d'une fonction rationnelle qui a sa partie entière nulle :

a) $F(x) = \dfrac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$ b) $F(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$ c) $F(x) = \dfrac{x^5+x^4+1}{x^3-x}$

d) $F(x) = \dfrac{2x^3+x^2-x+1}{x^2-2x+1}$ e) $F(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-5}$

Exercice 3 :

1. Soit à décomposer en éléments simples $F(x) = \dfrac{1}{x^3(x^2+1)^2}$. En remarquant que la fonction rationnelle F est impaire, montrer que sa décomposition en éléments simples est de la forme

$$F(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_3}{x^3} + \frac{a_1 x}{x^2+1} + \frac{a_2 x}{(x^2+1)^2}$$

Puis montrer que $\alpha_3 = a_2 = 1$.
En étudiant $\lim_{x\to\infty} xF(x)$ ainsi que l'évaluation en $x=1$ montrer qu'on a les relations $\alpha_1 + a_1 = 0$ et $\alpha_1 + \dfrac{a_1}{2} = -1$.
En déduire $a_1 = -\alpha_1 = 2$ et

$$F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

2. Soit à décomposer en éléments simples la fonction rationnelle paire suivante

$$G(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2(x^4+x^2+1)}.$$

Vérifier que $x^4+x^2+1 = (x^2+1))^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$, puis que que les pôles de F sont, à l'ordre 2, $\pm\mathrm{i}$ et, à l'ordre 1, $\pm\mathrm{j}$ et $\pm\bar{\mathrm{j}}$ (où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$).
Montrer que sa décomposition en éléments simples est de la forme

$$G(x) = \frac{b_1}{x^2+1} + \frac{b_2}{(x^2+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} + \frac{-cx+d}{x^2-x+1}.$$

Montrer que $b_2 = 1$ et $c\mathrm{j} + d = \dfrac{1}{(\mathrm{j}^2+1)^2(\mathrm{j}^2-\mathrm{j}+1)} = -\dfrac{1}{2}$ de sorte que

$$G(x) = \frac{b_1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right).$$

En évaluant en $x = 0$, montrer que $b_1 = 1$ et qu'ainsi

$$G(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right).$$

Exercice 4 :

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$ les fonctions rationnelles suivantes, puis calculer leurs primitives sur des intervalles appropriés :

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-4)}$ b) $\dfrac{x}{x^2-4}$ c) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)^2}$ d) $\dfrac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$

e) $\dfrac{8}{(x+2)(x^2+4)}$ f) $\dfrac{1}{x^3(1+x^2)}$ g) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2(x^3-1)}$ h) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$