L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

Université de Poitiers

FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES UNIVERSITÉ DE POITIERS

Modalités du CC2

Rappel :

Il y aura 3 contrôles continus au cours du semestre en mathématiques générales respectivement de coefficients 3, 3 et 6.
Le CC1 aura lieu en octobre 2021
Le CC2 devrait se dérouler en novembre 2021 ; il aura lieu à la fin d'une séance de TD, et durera 30 minutes.
Le CC3 aura lieu en décembre 2021.

La note du CC2, contrairement aux autres CC, **sera conservée lors de la 2nde session** (pour les étudiants qui iront en 2nde session).

Principe du CC2 :

Une feuille de 4 exercices sera distribuée au début du semestre. Pour chaque groupe de TD, un exercice sera tiré au sort parmi ces 4 exercices. Le sujet du CC2 sera constitué de cet **exercice** (avec modifications très mineures) et d'une courte **question de cours** (construites à partir des énoncés ($\star$) du support de cours).

Pour le CC2, comme pour le CC1 et le CC3, aucun document, aucun objet électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.

Précisions :

• **Les exercices du CC2 seront donc identiques aux exercices de la feuille préalablement distribuée, à l'exception de changements de valeurs, de notations de variables, de fonctions similaires...**
Par exemple, une question "Résoudre $z^2 = -2$ dans $\mathbb{C}$" pourra être transformée en "Résoudre $w^2 = -3$ dans $\mathbb{C}$", ou encore "Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = \cos(\dfrac{1}{1+x^2})$" pourra être transformée en "Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = \sin(\dfrac{1}{1+x^2})$".

La question de cours sera aussi tirée au sort parmi une liste de questions de cours choisies en fonction de l'exercice déjà tiré au sort, afin d'équilibrer les différents sujets.

Une question de cours ne consiste pas forcément à réciter par coeur un énoncé.
Par exemple, on pourrait tout aussi bien avoir "Définir le module d'un nombre complexe" et "Exprimer $z\bar{z}$ en fonction des parties réelle et imaginaire du nombre complexe z" comme question de cours.

• Un feuille d'indication/avertissements vous sera aussi distribuée afin de vous aider à préparer au mieux les exercices.
Vous recevrez des emails, au cours du semestre, pour vous indiquer quelles questions deviennent abordables après l'achèvement d'un chapitre. Il est important de commencer à préparer les exercices au plus tôt.

Jusqu'à 48h avant l'épreuve, vous aurez la possibilité et vous êtes même fortement encouragés à :
– **faire corriger vos solutions écrites par un des enseignants** (qui vous diront si c'est juste ou faux, et dans ce dernier cas là où c'est faux) ;
– **poser des questions à l'enseignant du cours** (et uniquement l'enseignant du cours) **au début ou à la fin de chaque cours.**

L1 PCIT-IM-LAS - Mathématiques Générales - 2021/2022

Les 4 exercices du CC2

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.
Durée (un des 4 exercices + une rapide question de cours) : 30 minutes

Exercice 1 :

On définit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \alpha + \mathrm{i}\beta & \longmapsto & \mathrm{e}^{2\alpha}\mathrm{e}^{-i\beta} \end{array}$$

(où α et β sont réels).
a) Montrer que pour tout z, w dans $\mathbb{C}$, on a $f(z+w) = f(z)f(w)$.
b) Soit $w \in \mathbb{C}$ non nul. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = w$. Ce z est-il unique ? Existe-t-il $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$?
c) En déduire que f n'est pas une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Puis, sans justifier, donner un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ tel que f réalise une bijection de E dans $\mathbb{C}^*$.
d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = f(\bar{z})$.

Exercice 2 :

Soient a, b, c et d dans $\mathbb{R}$, tels que $c \neq 0$. On définit la fonction

$$f: \quad z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\ .$$

Toutes les réponses devront être données en fonction des paramètres a, b, c et d.
a) Donner l'ensemble de définition D_f de f.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à deux inconnues $f(z) = f(z')$.
c) Soit $w \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $f(z) = w$ où l'inconnue z est dans D_f. En déduire l'image $\mathrm{Im}\ f$ de f lorsque f n'est pas constante.
d) Sans justifier, donner une condition pour que la fonction f réalise une bijection de D_f vers $\mathrm{Im}\ f$.

Exercice 3 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit l'application

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (\alpha x_1 + x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 - \alpha x_3) \end{array}.$$

a) Soit (S_0) le système linéaire $f_\alpha(x_1, x_2, x_3) = 0$ avec α comme paramètre. Échelonner (S_0). Sous quelle condition le système (S_0) a-t-il une unique solution ?
b) A-t-on f_α est bijective pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$? Justifier.
c) Soit $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ fixé. Soit (S) le système linéaire $f_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ avec quatre paramètres α, y_1, y_2 et y_3. Échelonner (S). (On pourra s'aider de la question a).)
Montrer que (S) est compatible si et seulement si :

$$\alpha^2 + 5\alpha + 6 \neq 0 \text{ ou } 7y_1 + (3\alpha - 1)y_2 + (-\alpha - 2)y_3 = 0.$$

d) En déduire, sans justifier, toutes les valeurs de α pour lesquelles f_α est bijective.

Exercice 4 :

a) Dresser le tableau de variations de $f(x) = 2x\ln(3x) - 2x$.
En déduire que f réalise une bijection de $[\frac{1}{3}, +\infty[$ vers un ensemble à déterminer. (On prendra soin de bien écrire toutes les hypothèses du théorème utilisé pour répondre à cette question.)
b) Notons f^{-1} la réciproque, calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
c) Dresser le tableau de $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3x - 1$. Notons $x_0 = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$. Montrer que g réalise une bijection de $]x_0, +\infty[$ vers un ensemble à déterminer.
d) Montrer que $g(x) = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une est évidente et l'autre est dans $]x_0, +\infty[$.