L1 PCIT-IM - Mathématiques Générales

Complément de cours sur les fonctions réciproques de fonctions classiques

Fonction arcsin.

Définition 1.
Soit f la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème des fonctions réciproques, on peut affirmer que $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$ et que f établit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} f \ : \ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

La fonction réciproque de f est appelée arcsinus et notée $x \mapsto \arcsin x$. C'est une bijection de l'intervalle $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \arcsin \ : \ [-1, 1] &\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \arcsin x \end{aligned}$$

Interprétation géométrique

Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arcsin x$ est un élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et son sinus vaut x. Il est identifié à une mesure d'angle.

Exemple 2.
1) Dessiner et donner les mesures de l'angle orienté aigu dont le sinus vaut $\frac{1}{12}$.

2)Dessiner et donner les mesures de l'angle orienté aigu dont le sinus vaut $-\frac{1}{3}$.

3) Donner les solutions de $\sin x = \frac{1}{12}$ et les dessiner.

Résolution d'équations trigonométriques simples

Proposition 3.
1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sin x = \sin y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \ x = y + k2\pi \text{ ou } x = \pi - y + k2\pi$$

2) (i) Soit $a \in [-1, 1]$ alors l'équation $\sin x = a$ possède une infinité de solutions réelles qui forment l'ensemble :

$$S = \{\arcsin(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$$

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| > 1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'a pas de solutions réelles.

Exemple 4. *Résoudre l'équation* $\sin 2x = \dfrac{1}{3}$.

Opérations et valeurs remarquables

Exemple 5. *Quelle est la valeur de* $\arcsin(\dfrac{1}{2})$ *?*

C'est la mesure d'angle θ de type $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ telle que $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, donc :

$$\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$$

Quelques valeurs remarquables pour arcsin :

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 6.

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x, \ \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin(\sin x) &= x, \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Attention : l'expression $\sin(\arcsin x)$ n'est définie que pour $x \in [-1, 1]$, en revanche, l'expression $\arcsin(\sin x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors que l'égalité avec x n'est vérifiée que pour $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

Exemple 7. $\arcsin(\sin(\dfrac{5\pi}{6})) = \arcsin(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Proposition 8.
1) La fonction arcsin *est continue et strictement croissante sur* $[-1, 1]$.

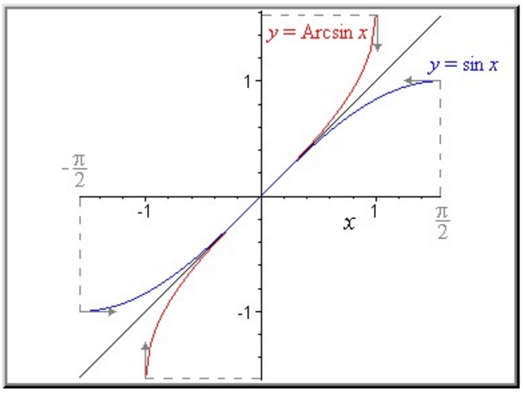
2) La fonction arcsin *est une fonction impaire.*

3) La fonction arcsin *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et :*

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Démonstration. 1) Résulte de ce que la fonction $f \ : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin x$ est une bijection continue croissante.
2) Résulte de ce que la fonction sin est impaire et de ce que l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a pour milieu 0.
3) Comme on a $f'(x) = \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et comme sur cet intervalle $\cos x$ ne s'annule qu'en $\pm\frac{\pi}{2} = \arcsin \pm 1$, il résulte du théorème des fonctions réciproques que la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. De plus, si $x \in]-1, 1[$ et $y = \arcsin x$, on a $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sin' y} = \dfrac{1}{\cos y}$. Or $y = \arcsin x$ est un élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de sorte que $\cos y > 0$. On a donc $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, si bien que $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. □

Étude graphique de arcsin :



Fonction arccos

Définition 9.
Soit f la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$. D'après le théorème des fonctions réciproques, on peut affirmer que $f([0, \pi]) = [f(\pi), f(0)] = [-1, 1]$ et que f établit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} f \ : \ [0, \pi] & \to [-1, 1] \\ x & \mapsto \cos x \end{aligned}$$

La fonction réciproque de f est appelée arccosinus et notée $x \mapsto \arccos x$. C'est une bijection de l'intervalle $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \arccos \ : \ [-1, 1] & \to [0, \pi] \\ x & \mapsto \arccos x \end{aligned}$$

Interprétation géométrique

Pour tout x de type $[-1, 1]$, $\arccos x$ est un élément de type $[0, \pi]$ et son cosinus vaut x. Il est identifié à une mesure d'angle.

Exemple 10.
1) Dessiner et donner les mesures de l'angle orienté obtus dont le cosinus vaut $\frac{1}{12}$.

2)Dessiner et donner les mesures de l'angle orienté obtus dont le cosinus vaut $-\frac{1}{3}$.

3) Résoudre $\cos x = \frac{1}{12}$. Faire un dessin pour illustrer.

Résolution d'équations trigonométriques simples

Proposition 11.
1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos x = \cos y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \ x = y + k2\pi \text{ ou } x = -y + k2\pi$$

2) (i) Soit $a \in [-1,1]$ alors l'équation $\cos x = a$ possède une infinité de solutions réelles qui forment l'ensemble :

$$S = \{\arccos(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$$

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| > 1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'a pas de solutions réelles.

Exemple 12. *Résoudre l'équation $\cos 2x = \frac{1}{3}$.*

Opérations et valeurs remarquables

Exemple 13. *Quelle est la valeur de $\arccos(\frac{1}{2})$?*
C'est la mesure d'angle θ de type $[0,\pi]$ telle que $\cos\theta = \frac{1}{2}$, donc :

$$\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

Quelques valeurs remarquables pour arccos :

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arccos 1 = 0.$$

On obtient d'autres valeurs remarquables en utilisant la relation $\arccos -x = \pi - \arccos x$.

Proposition 14.

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x, \ \forall x \in [-1,1] \\ \arccos(\cos x) &= x, \ \forall x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Attention : l'expression $\cos(\arccos x)$ n'est définie que pour $x \in [-1,1]$, en revanche, l'expression $\arccos(\cos x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors que l'égalité avec x n'est vérifiée que pour $x \in [0,\pi]$.

Exemple 15.
$\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

Proposition 16.
1) La fonction arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.

2) On a $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $x \in [-1,1]$.

3) La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Étude graphique de $\arccos$ **:**